

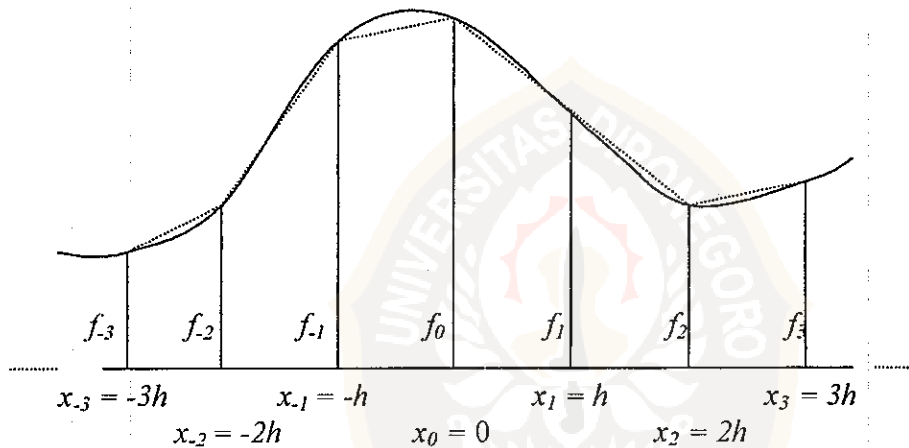
LAMPIRAN A : URAIAN TEORI

Algoritma Numerov

Jika diperhatikan turunan di $x = 0, f'(0)$. (Formula yang akan diperoleh secara umum dapat dibentuk sederhana pada x yang berubah-ubah dengan translasi). Dengan menganggap juga bahwa f pada kisi ditempatkan setimbang dari nilai-nilai x

$$f_n = f(x_n); \quad x_n = nh \quad (3.1)$$

dengan tujuan memperkirakan nilai dari $f'(0)$ dalam bentuk f_n (lihat gambar 2.1).



Gambar 2.1 Nilai-nilai f pada kisi yang ditempatkan setimbang. Garis putus-putus menunjukkan interpolasi linear.

Digunakan deret Taylor untuk memperluas f dari $x = 0$

$$f(x) = f_0 + xf' + \frac{x^2}{2!}f'' + \frac{x^3}{3!}f''' + \dots \quad (3.2)$$

semua turunan dievaluasi pada $x = 0$. Sehingga dapat dibuktikan bahwa

$$f_{\pm 1} = f(x = \pm h) = f_0 \pm hf' + \frac{h^2}{2}f'' \pm \frac{h^3}{6}f''' + O(h^4) \quad (3.3)$$

$$f_{\pm 2} = f(x = \pm 2h) = f_0 \pm 2hf' + 2h^2f'' \pm 4\frac{h^3}{3}f''' + O(h^4) \quad (3.4)$$

dengan $O(h^4)$ merupakan bentuk dari order h^4 atau yang lebih tinggi. Untuk memperkirakan ukuran dari bentuk tersebut maka dapat menganggap bahwa f dan turunannya mempunyai order yang sama dari besarnya, seperti kasus untuk beberapa fungsi dari hubungan fisis.

Dengan mengurangi f_{-1} dan f_1 seperti yang diberikan pada (3.3) maka setelah sedikit penyusunan kembali akan didapatkan

$$f' = \frac{f_1 - f_{-1}}{2h} - \frac{h^2}{6} f''' + O(h^4). \quad (3.5)$$

Bentuk yang mengikutsertakan f''' akan hilang seperti halnya h menjadi kecil dan merupakan dominan error yang dikelompokkan dengan perkiraan perbedaan terbatas yang berlaku pada bentuk pertama

$$f' \approx \frac{f_1 - f_{-1}}{2h}. \quad (3.6)$$

Rumus “3 nilai” ini akan menjadi eksak jika f merupakan polinomial derajat kedua dalam interval 3 nilai $[-h, +h]$ karena yang ketiga dan semua turunan order yang lebih tinggi akan hilang. Oleh karena itu hal yang pokok dari persamaan (3.6) adalah menganggap bahwa interpolasi polinomial kuadrat dari f melalui 3 nilai $x = \pm h$ dengan nilai nol tetap berlaku.

Persamaan (3.6) merupakan hasil yang sangat lazim, mengingatkan pada rumus yang digunakan untuk mendefinisikan turunan dalam kalkulus dasar. Bentuk error (dari order h^2) dalam prinsipnya dapat dibuat sekecil mungkin sesuai yang diharapkan dengan menggunakan lebih kecil lagi nilai-nilai dari h . Perlu dicatat juga bahwa perbedaan simetrik kira-kira $x = 0$ digunakan sehingga ini akan lebih akurat (oleh satu order h) daripada perbedaan rumus bagian depan dengan bagian belakang

$$f' \approx \frac{f_1 - f_0}{h} + O(h) \quad (3.7)$$

$$f' \approx \frac{f_0 - f_{-1}}{h} + O(h). \quad (3.8)$$

Rumus 2 nilai ini didasarkan pada anggapan bahwa f diperkirakan pada fungsi linear dengan interval antara $x = 0$ dan $x = \pm h$.

Pendiferensialan numerik adalah proses intrinsik yang tidak stabil (bukan limit yang didefinisikan dengan baik seperti $h \rightarrow 0$) dan pasti diambil dengan hati-hati.

Ini dimungkinkan untuk mengembangkan rumus 3 nilai persamaan (3.6) dengan hubungan f pada titik kisi yang berpindah lebih jauh dari $x = 0$. Sebagai contoh dengan menggunakan persamaan (3.3) dan (3.4) sehingga akan didapatkan rumus "5 nilai" berikut

$$f' \approx \frac{1}{12h} [f_{-2} - 8f_{-1} + 8f_1 - f_2] + O(h^4) \quad (2.9)$$

yang membatalkan semua turunan dalam deret Taylor melalui order ke-4. Menghitung turunan pada jalan ini dengan menganggap bahwa f diperkirakan dengan baik pada polinomial derajat ke-4 diatas interval 5 nilai $[-2h, 2h]$. Meskipun membutuhkan lebih banyak perhitungan, perkiraan ini mempunyai penyesuaian yang lebih akurat. Pada kenyataannya, sebuah akurasi dapat disesuaikan dengan persamaan (3.6) yang didapatkan dengan sebuah langkah yang sepuluh kali lebih besar. Ini dapat dijadikan sebuah penyesuaian penting ketika beberapa nilai dari f harus disimpan dalam komputer, seperti akurasi yang lebih besar mengijinkan sebuah tabulasi yang lebih jarang sehingga menghemat ruang penyimpanan. Bagaimanapun karena persamaan (3.9) membutuhkan lebih banyak operasi matematis dari persamaan (3.6) dan disana dapat menyesuaikan pembatalan diantara bentuk-bentuk yang bervariasi (dapat berbentuk koefisien positif dan negatif), permasalahan kepresisian ditunjukkan pada nilai yang lebih besar dari h .

Rumus untuk turunan yang lebih tinggi dapat dibentuk dengan mengambil kombinasi yang sesuai pada persamaan (3.3) dan (3.4). Sebagai contoh dapat dilihat dengan mudah pada persamaan

$$f_1 - 2f_0 + f_{-1} = h^2 f'' + O(h^4) \quad (3.10)$$

sehingga perkiraan tersebut untuk turunan kedua yang akurat untuk h^2 adalah

$$f'' \approx \frac{f_1 - 2f_0 + f_{-1}}{h^2} \quad (3.11)$$

Perbedaan rumus untuk turunan yang bervariasi dari f itu akan akurat pada order yang lebih tinggi dari h yang dapat diperoleh dengan mudah.

Aliran Panas pada sebuah batang logam atau plat

Bila dalam suatu sistem terdapat gradien suhu, atau bila dua sistem yang suhunya berbeda disingkirkan, maka akan terjadi perpindahan energi. Proses saat transport energi itu berlangsung disebut sebagai perpindahan panas. Apa yang ada dalam perpindahan, yang disebut panas itu tidak dapat diukur atau diamati secara langsung, tetapi pengaruhnya dapat diamati dan diukur. Aliran panas adalah suatu proses dengan mengubah energi dalam suatu sistem.

Perpindahan panas dapat didefinisikan sebagai berpindahnya energi dari satu daerah ke daerah lainnya sebagai akibat dari beda suhu yang terdapat di seluruh alam semesta, maka hal ikhwal aliran panas bersifat se-universal hal ikhwal yang berkaitan dengan tarikan gravitasi. Tetapi tidak sebagaimana halnya gravitasi, aliran panas tidak dikendalikan oleh sebuah hubungan yang unik, namun oleh kombinasi dari berbagai hukum fisika yang tidak saling bergantung (Kreith, 1986). Persamaan aliran panas adalah

$$\nabla^2 u = \frac{1}{\alpha^2} \frac{\partial u}{\partial t} \quad (3.12)$$

Dengan u adalah temperatur dan α^2 adalah sebuah konstanta karakteristik dari materi saat panas mengalir. Secara umum (3.12) adalah persamaan diferensial parsial yang dinyatakan dalam ruang tiga dimensi dalam koordinat kartesian (x, y, z) , silinder (r, θ, z) , atau bola (r, θ, φ) . Dianggap penyelesaian dari (3.12) dari bentuk

$$u = F(x, y, z)T(t). \quad (3.13)$$

(Catatan : di sini u adalah temperatur dan T adalah faktor dalam u yang bergantung waktu).

Dengan mensubstitusi (3.13) ke (3.12) akan didapatkan

$$T\nabla^2 F = \frac{1}{\alpha^2} F \frac{dT}{dt}. \quad (3.14)$$

Kemudian membagi (3.14) dengan FT sehingga didapatkan

$$\frac{1}{F} \nabla^2 F = \frac{1}{\alpha^2} \frac{1}{T} \frac{dT}{dt}. \quad (3.15)$$

Bagian kiri bentuk di atas hanya fungsi dari variabel ruang x, y, z dan bagian kanan hanya fungsi dari waktu. Keduanya merupakan konstanta yang sama dan dapat ditulis

$$\begin{aligned} \frac{1}{F} \nabla^2 F = -k^2 & \quad \text{atau} \quad \nabla^2 F + k^2 F = 0 & \quad \text{dan} \\ \frac{1}{\alpha^2} \frac{1}{T} \frac{dT}{dt} = -k^2 & \quad \text{atau} \quad \frac{dT}{dt} = -k^2 \alpha^2 T. \end{aligned} \quad (3.16)$$

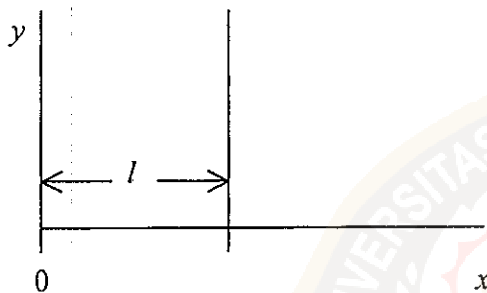
Persamaan waktu dapat diintegrasikan untuk mendapatkan

$$T = e^{-k^2 \alpha^2 t}. \quad (3.17)$$

Dapat dilihat alasan fisis di sini untuk memilih konstanta pembagi $(-k^2)$ menjadi negatif. Saat t naik, suhu dari badan mungkin menurun menjadi nol seperti pada (3.17).

Dapat dibandingkan aliran panas yang melalui plat dengan ketebalan l . Diasumsikan bahwa permukaan plat sangat luas sehingga dapat diabaikan beberapa hal dan menganggap bahwa aliran panas hanya pada jarak x (lihat gambar 2.2).

Permasalahan ini identik dengan permasalahan aliran panas pada batang logam yang disekat dengan panjang l yang juga terjadi hanya pada jarak x . Anggap plat terjadi pada distribusi suhu *steady state* pada $x=0$ suhu 0° dan $x=l$ suhu 100° . Pada saat $t=0$ dan $x=l$ suhu pada dinding (seperti suhu pada dinding $x=0$) 0° . Nantinya akan didapatkan distribusi suhu sepanjang sumbu x .



Gambar 2.2 Aliran panas yang terjadi pada batang dengan $x=0$ dan $x=l$ pada suhu 0° hingga 100° .

Diketahui bahwa permasalahan ini berbentuk linear pada distribusi suhu *steady state*. Suhu *steady state* u_0 sesuai dengan persamaan Laplace yang pada kasus satu dimensi $d^2u_0/dx^2 = 0$. Penyelesaian dari persamaan ini adalah $u_0 = ax + b$, dengan a dan b adalah konstanta dari kondisi tersebut. Karena $u_0 = 0$ pada $x=0$ dan $u_0 = 100$ pada $x=l$ maka didapatkan

$$u_0 = \frac{100}{l}x \quad (3.18)$$

Dari $t = 0$, u sesuai dengan persamaan aliran panas (3.12) yang penyelesaiannya (3.13) dengan $T(t)$ dihasilkan dari (3.17) dan $F(x)$ sesuai dengan persamaan pertama dari (3.16) sehingga

$$\nabla^2 F + k^2 F = 0 \quad \text{atau} \quad \frac{d^2 F}{dx^2} + k^2 F = 0. \quad (3.19)$$

(Untuk permasalahan satu dimensi, F hanya sebagai fungsi x).

Penyelesaian dari (3.19) adalah (Boas, 1983)

$$F(x) = \begin{cases} \sin kx \\ \cos kx \end{cases} \quad (3.20)$$

Partikel bebas dalam sebuah kotak satu dimensi

Bentuk kekekalan energi adalah $K + V = E$. Jika diberikan potensial sebagai fungsi x yaitu $V(x)$ yang biasanya hasil akhir penyelesaian persamaan berupa $\psi(x)$ dan E . Energi E adalah nilai karakteristik atau nilai eigen, sedangkan penyelesaian fungsi gelombang untuk nilai karakteristik E itu disebut fungsi eigen. Akan dicoba mengkaji nilai eigen yang mewakili energi tersebut pada partikel bebas dalam sebuah kotak satu dimensi yang menggunakan persamaan Schrödinger dalam menyelesaikannya.

Persamaan Schrödinger waktu-bebas satu dimensi, yaitu :

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \psi}{dx^2} + V\psi = E\psi \quad (3.21)$$

dengan potensial yang sesuai ($V = 0$) maka persamaan di atas menjadi

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \psi}{dx^2} = E\psi \quad (3.22)$$

atau

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} = -k^2\psi \quad (3.23)$$

dengan

$$k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2} \quad (3.24)$$

Persamaan (3.23) adalah bentuk persamaan yang telah lazim dikenal; dengan k^2 selalu positif, maka pemecahannya adalah

$$\psi(x) = A \sin kx + B \cos kx \quad (3.25)$$

Dari persamaan (3.24) nilai energi yang diperkenankan adalah :

$$E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \quad (3.26)$$

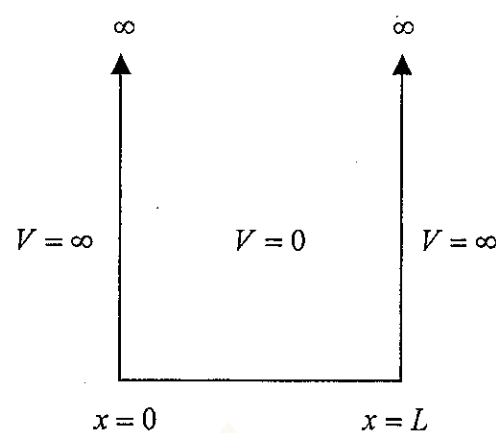
Bila ditinjau sebuah partikel yang bergerak bebas dalam sebuah kotak satu dimensi yang panjangnya L maka potensialnya dapat dinyatakan sebagai berikut

$$\begin{aligned} V(x) &= 0 & 0 \leq x \leq L \\ &= \infty & x < 0, x > L \end{aligned} \quad (3.27)$$

Potensialnya diperlihatkan dalam gambar 2.3 dan seringkali dikenal sebagai potensial sumur persegi takhingga dengan memilih sebarang nilai tetapan bagi V dalam daerah $0 \leq x \leq L$.

Persamaan Schrödinger harus diterapkan secara terpisah pada daerah di dalam dan di luar kotak. Jika diterapkan persamaan (3.21) bagi daerah diluar kotak, akan didapatkan bahwa satu-satunya cara untuk mempertahankan persamaannya bermakna bila $V \rightarrow \infty$ dengan mensyaratkan $\psi = 0$, sehingga $V\psi$ tidak akan menjadi takhingga. Di pihak lain dapat kembali ke pernyataan persoalan semulanya. Jika kedua dinding kotak benar-benar tegar, maka partikel akan selalu berada dalam kotak, sehingga probabilitas untuk menemukan

partikel di luar kotak tentulah nol. Untuk membuat probabilitasnya nol di luar kotak, harus diambil $\psi = 0$ di luar kotak. Jadi akan diperoleh

$$\psi(x) = 0 \quad x < 0, x > L \quad (3.28)$$


Gambar 2.3 Sebuah partikel yang bergerak bebas dalam suatu daerah satu dimensi $0 \leq x \leq L$; daerah $x < 0$ dan $x > L$ diabaikan.

Persamaan Schrödinger untuk $0 \leq x \leq L$, bila $V(x) = 0$, identik dengan persamaan (3.22), sehingga memiliki pemecahan yang sama seperti pada persamaan (3.25) yang mempunyai batasan ($0 \leq x \leq L$).

Pemecahan ini belum lengkap, karena belum ditentukan A dan B , juga belum menghitung nilai energi E yang diperkenankan. Untuk menghitungnya, harus diterapkan persyaratan bahwa $\psi(x)$ harus kontinu pada setiap batas dua bagian ruang. Dalam hal ini, diberi persyaratan bahwa pemecahan untuk $x < 0$ dan $x > 0$ bernilai sama di $x = 0$; begitu pula pemecahan untuk $x > L$ dan $x < L$ haruslah bernilai sama di $x = L$ (Krane, 1992).

LAMPIRAN B : LISTING PROGRAM

B.1 Listing program pada bahasa Delphi

```
{Program penampilan Judul Skripsi}
```

```
unit UJudul;
```

```
interface
```

```
uses
```

```
Windows, Messages, SysUtils, Variants, Classes, Graphics, Controls, Forms,  
Dialogs, StdCtrls;
```

```
type
```

```
TForm1 = class(TForm)
```

```
Label1: TLabel;
```

```
Label2: TLabel;
```

```
Label3: TLabel;
```

```
Label4: TLabel;
```

```
Label5: TLabel;
```

```
Label6: TLabel;
```

```
private
```

```
{ Private declarations }
```

```
public
```

```
{ Public declarations }
```

```
end;
```

```
var
```

```
Form1: TForm1;
```

```
implementation
```

```
{ $R *.dfm }
```

```
end.
```

{ Penyelesaian Permasalahan Syarat Batas dan Nilai Eigen pada Persamaan Diferensial
Orde 2 dengan menggunakan Algoritma Numerov

Kasus : Potensial Elektrostatik pada sebuah muatan bola
Persamaan Umum : $d^2\phi/dr^2 = -4\pi r \rho$



Yang akan dicari : Fungsi eigen baik secara eksak maupun numerik}

```
unit UPotensial_Elektrostatik;  
interface
```

```
uses
```

```
Windows, Messages, SysUtils, Variants, Classes, Graphics, Controls, Forms,  
Dialogs, StdCtrls;
```

```
type
```

```
TForm1 = class(TForm)
```

```
Label1: TLabel;
```

```
Label2: TLabel;
```

```
R_Awal: TLabel;
```

```
R_Akhir: TLabel;
```

```
Lebar_Langkah: TLabel;
```

```
R: TLabel;
```

```
Eksak: TLabel;
```

```
Numerik: TLabel;
```

```
Besarnya_Ralat: TLabel;
```

```
Edit1: TEdit;
```

```
Edit2: TEdit;
```

```
Edit3: TEdit;
```

```
Edit4: TEdit;
```

```
Edit5: TEdit;
```

```
Edit6: TEdit;
```

```
Edit7: TEdit;
```

```
Button1: TButton;
```

```
Button2: TButton;
```

```
ListBox1: TListBox;
```

```
procedure Button1Click(Sender: TObject);
```

```
procedure Button2Click(Sender: TObject);
```

```
private
```

```
{ Private declarations }
```

```
public
```

```
{ Public declarations }
```

```
end;
```

```
var
```

```
Form1: TForm1;
```

```
implementation
```

```
{ $R *.dfm }
```

```
function FNS(R:real):real;
```



```

begin
FNS:=-0.5*R*EXP(-R);
end;

procedure TForm1.Button1Click(Sender: TObject);
var
PHI:array[0..200] of real;
H,R,CON,Rmax,R_Awal,R_Akhir,SM,SZ,SP,Exact,Diff :real;
N,J :integer;

begin
R_Awal:=StrToFloat(Edit1.Text);
R_Akhir:=StrToFloat(Edit2.Text);
H:=StrToFloat(Edit3.Text);
N:=Round((R_Akhir - R_Awal)/H);
CON:=H*H/12;
SM:=0;
SZ:=FNS(H);
PHI[0]:=0;
PHI[1]:= 1 - 0.5*(H+2)*EXP(-H);
for J:= 1 to N do
begin
R:=(J*1)*H;
SP:=FNS(R);
PHI[J+1]:=2*PHI[J] - PHI[J-1] + CON*(SP+10*SZ+SM);
SM:=SZ;
SZ:=SP;
Exact:= 1 - 0.5*(R+2)*EXP(-R);
Diff:=Exact - PHI[J+1];
ListBox1.Items.Add(FormatFloat('#00.00',R) + ' ' + FormatFloat('0.00000000',Exact)
+ ' ' + FormatFloat('0.00000000',PHI[J+1]) + ' ' + FormatFloat('0.00000000',Diff));
Edit4.Text:=FloatToStr(R);
Edit5.Text:=FloatToStr(Exact);
Edit6.Text:=FloatToStr(PHI[J+1]);
Edit7.Text:=FloatToStr(Diff);
end;
end;

procedure TForm1.Button2Click(Sender: TObject);
begin
Application.Terminate;
end;

end.

```

{ Penyelesaian Permasalahan Syarat Batas dan Nilai Eigen pada Persamaan Diferensial Orde 2 dengan menggunakan Algoritma Numerov

Kasus : Aliran Panas pada sebuah batang
 Persamaan Umum : $d^2F/dx^2 + k^2 * F = 0$
 Yang akan dicari : Nilai eigen (Harga K)}

unit UMencari_Nilai_Eigen;

interface

uses

Windows, Messages, SysUtils, Variants, Classes, Graphics, Controls, Forms,
 Dialogs, StdCtrls;

type

TForm1 = **class**(TForm)

Label1: TLabel;

Label2: TLabel;

Label3: TLabel;

K: TLabel;

DK: TLabel;

Batas_Awal: TLabel;

Batas_Akhir: TLabel;

N: TLabel;

Nilai_Eigen: TLabel;

Edit1: TEdit;

Edit2: TEdit;

Edit3: TEdit;

Edit4: TEdit;

Edit5: TEdit;

Edit6: TEdit;

PROSES: TButton;

KELUAR: TButton;

ListBox1: TListBox;

procedure PROSESClick(Sender: TObject);

procedure KELUARClick(Sender: TObject);

private

{ Private declarations }

public

{ Public declarations }

end;

var

Form1: TForm1;



implementation

```
{ $R *.dfm }
```

```
procedure TForm1.PROSESClick(Sender: TObject);
```

```
label
```

```
86;
```

```
const
```

```
TOLK=1.E-5;
```

```
var
```

```
x,N : integer;
```

```
iterasi:integer;
```

```
K,DK,H : real;
```

```
Batas_Awal,Batas_Akhir : real;
```

```
CON:real;
```

```
PHIP,PHIM,PHIZ,PHIOLD : real;
```

```
begin
```

```
  K:=StrToFloat(Edit1.Text);
```

```
  DK:=StrToFloat(Edit2.Text);
```

```
  Batas_Awal:=StrToFloat(Edit3.Text);
```

```
  Batas_Akhir:=StrToFloat(Edit4.Text);
```

```
  N:=StrToInt(Edit5.Text);
```

```
  H:=(Batas_Akhir - Batas_Awal)/N;
```

```
  K:=K/(Batas_Akhir - Batas_Awal);
```

```
  PHIM:=0;
```

```
  PHIZ:=0.01;
```

```
  CON:=(K*K*H*H)/12;
```

```
  for x:= 1 to (N-1) do
```

```
    begin
```

```
      PHIP:=2*(1-5*CON)*PHIZ - (1+CON)*PHIM;
```

```
      PHIP:=PHIP/(1+CON);
```

```
      PHIM:=PHIZ;
```

```
      PHIZ:=PHIP;
```

```
    end;
```

```
  iterasi:=0;
```

```
  PHIOLD:=PHIP;
```

```
86: while Abs(DK) > TOLK do
```

```
  begin
```

```
    iterasi:=iterasi+1;
```

```
    K:=K+DK;
```

```
    PHIM:=0;
```

```
    PHIZ:=0.01;
```

```
    CON:=(K*K*H*H)/12;
```

```

for x:= 1 to (N-1) do
  begin
    PHIP:=2*(1-5*CON)*PHIZ - (1+CON)*PHIM;
    PHIP:=PHIP/(1+CON);
    PHIM:=PHIZ;
    PHIZ:=PHIP;
  end;
ListBox1.Items.Add(FormatFloat('0#',iterasi) + ' ' + FormatFloat('#0.0000000000',K));
if PHIP*PHIOLD > 0 then goto 86
else
  begin
    K:=K-DK;
    DK:=DK/2;
  end;
end;
Edit6.Text:=FloatToStr(K);
end;

```

```

procedure TForm1.KELUARClick(Sender: TObject);
begin
  Application.Terminate;
end;

end.

```

{ Penyelesaian Permasalahan Syarat Batas dan Nilai Eigen pada Persamaan Diferensial Orde 2 dengan menggunakan Algoritma Numerov

Kasus : Partikel Bebas dalam sebuah kotak satu dimensi
 Persamaan Umum : $d^2\psi / dx^2 + k^2\psi = 0$
 Yang akan dicari : Nilai eigen (Nilai_K)}

```
unit UMenghitung_Nilai_Eigen;
```

```
interface
```

```
uses
```

```
Windows, Messages, SysUtils, Variants, Classes, Graphics, Controls, Forms,
Dialogs, StdCtrls;
```

```
type
```

```
TTForm1 = class(TForm)
  Label1: TLabel;
  Label2: TLabel;
```

```
Label3: TLabel;  
K: TLabel;  
DK: TLabel;  
L_Awal: TLabel;  
L_Akhir: TLabel;  
N: TLabel;  
PROSES: TButton;  
KELUAR: TButton;  
Nilai_K: TLabel;  
ListBox1: TListBox;  
EPart1: TEdit;  
EPart2: TEdit;  
EPart3: TEdit;  
EPart4: TEdit;  
EPart5: TEdit;  
EPart6: TEdit;  
procedure PROSESClick(Sender: TObject);  
procedure KELUARClick(Sender: TObject);  
private  
  { Private declarations }  
public  
  { Public declarations }  
end;  
  
var  
  TForm1: TForm1;  
  
implementation  
  
{$R *.dfm}  
  
procedure TForm1.PROSESClick(Sender: TObject);  
label  
  85;  
  
const  
  TOLK=1.E-5;  
  
var  
  K,DK : real;  
  y,iterasi,N : integer;  
  H,CON : real;  
  L_Awal,L_Akhir : real;  
  PHIP,PHIM,PHIZ,PHIOLD : real;  
  
begin
```

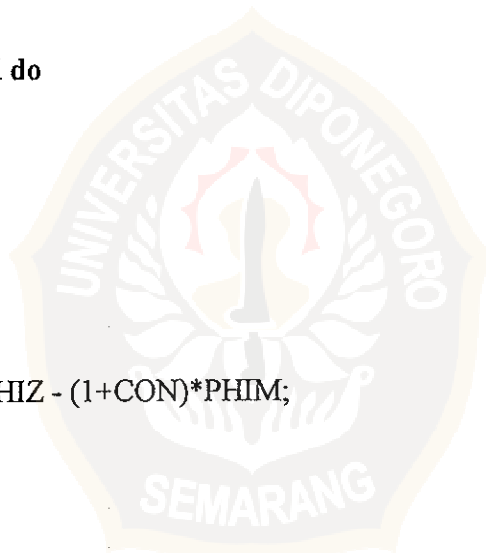



```

L_Awal:=StrToFloat(EPart1.Text);
L_Akhir:=StrToFloat(EPart2.Text);
K:=StrToFloat(EPart3.Text);
DK:=StrToFloat(EPart4.Text);
N:=StrToInt(EPart5.Text);
H:=(L_Akhir - L_Awal)/N;
K:=K/(L_Akhir - L_Awal);
PHIM:=0;
PHIZ:=0.01;
CON:=(K*K*H*H)/12;
for y:= 1 to (N-1) do
  begin
    PHIP:=2*(1-5*CON)*PHIZ - (1+CON)*PHIM;
    PHIP:=PHIP/(1+CON);
    PHIM:=PHIZ;
    PHIZ:=PHIP;
  end;
iterasi:=0;
PHIOLD:=PHIP;
85: while Abs(DK) > TOLK do
  begin
    iterasi:=iterasi+1;
    K:=K+DK;
    PHIM:=0;
    PHIZ:=0.01;
    CON:=(K*K*H*H)/12;
    for y := 1 to (N-1) do
      begin
        PHIP:=2*(1-5*CON)*PHIZ - (1+CON)*PHIM;
        PHIP:=PHIP/(1+CON);
        PHIM:=PHIZ;
        PHIZ:=PHIP;
      end;
    ListBox1.Items.Add(FormatFloat('0#',iterasi) + ' ' + FormatFloat('#0.0000000000',K));
    if PHIP*PHIOLD > 0 then goto 85
    else
      begin
        K:=K-DK;
        DK:=DK/2;
      end;
    end;
EPart6.Text:=FloatToStr(K);
end;

procedure TForm1.KELUARClick(Sender: TObject);
begin

```



```
Application.Terminate;
end;
```

```
end.
```

B.2 Listing program pada bahasa Pascal

B.2.1 Kasus potensial elektrostatik

```
Program Potensial_elektostatik;
Uses crt;
```

```
Function FNS(R:real):real;
Begin
  FNS:=-0.5*R*EXP(-R);
End;
```

```
Var
  PHI:array[0..200] of real;
  a,b,h,R,CON,Rmax,SM,SZ,SP,Exact,DIFF :real;
  N,J :integer;
```

```
Begin
  Clrscr;
  Write('R awal = ');Readln(a);
  Write('R akhir = ');Readln(b);
  Write('lebar langkah (h) = ');Readln(h);
  Clrscr;
  Writeln('-----');
  Writeln('! R ! EXACT ! Numerik ! Ralat !');
  Writeln('-----');
  N:=Round((b-a)/h);
  CON:=H*H/12;
  SM:=0;
  SZ:=FNS(H);
  PHI[0]:=0;
  PHI[1]:= 1 - 0.5*(H+2)*EXP(-H);
  For J:=1 to N do
    Begin
      R:=(J*1)*H;
      SP:=FNS(R);
      PHI[J+1]:= 2*PHI[J] - PHI[J-1] + CON*(SP+10*SZ+SM);
      SM:=SZ;
      SZ:=SP;
```

```

EXACT:= 1 - 0.5*(R+2)*EXP(-R);
DIFF:=EXACT - PHI[J+1];
Writeln('!R:9:6,!EXACT:9:6,!PHI[J+1]:9:6,!DIFF:9:6,!');
End;
Writeln('-----');
Writeln('R= ',R);
Writeln('Exact= ',Exact);
Writeln('Numerik= ',PHI[J+1]);
Writeln('Ralat= ',Diff);
Readln;
End.

```

B.2.2 Kasus mencari nilai eigen

Program nilaieigen;

```

uses crt;
const
  TOLK=1.E-5;

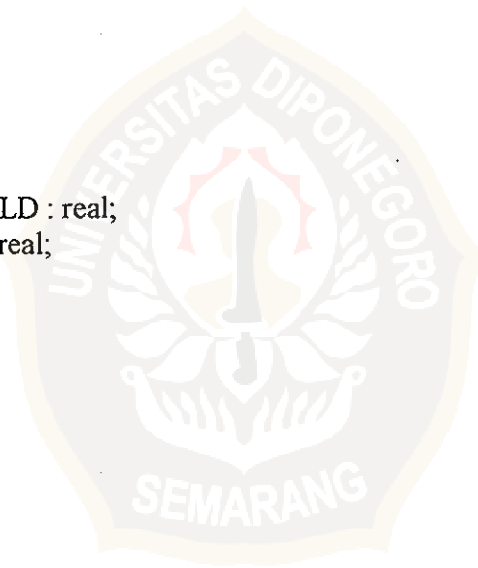
var
  x,N : integer;
  iterasi:integer;
  CON:real;
  PHIP, PHIM, PHIZ, PHIOLD : real;
  Batas_awal, Batas_akhir : real;
  H,K,DK : real;

procedure Eigen_fungsi;
begin
  PHIM:=0;
  PHIZ:=0.01;
  CON:=(K*K*H*H)/12;
  for x:= 1 to (N-1) do
  begin
    PHIP:= 2*(1-5*CON)*PHIZ - (1+CON)*PHIM;
    PHIP:= PHIP/(1+CON);
    PHIM:= PHIZ;
    PHIZ:= PHIP;
  end;
end;

label
  43;

begin
  Clrscr;

```

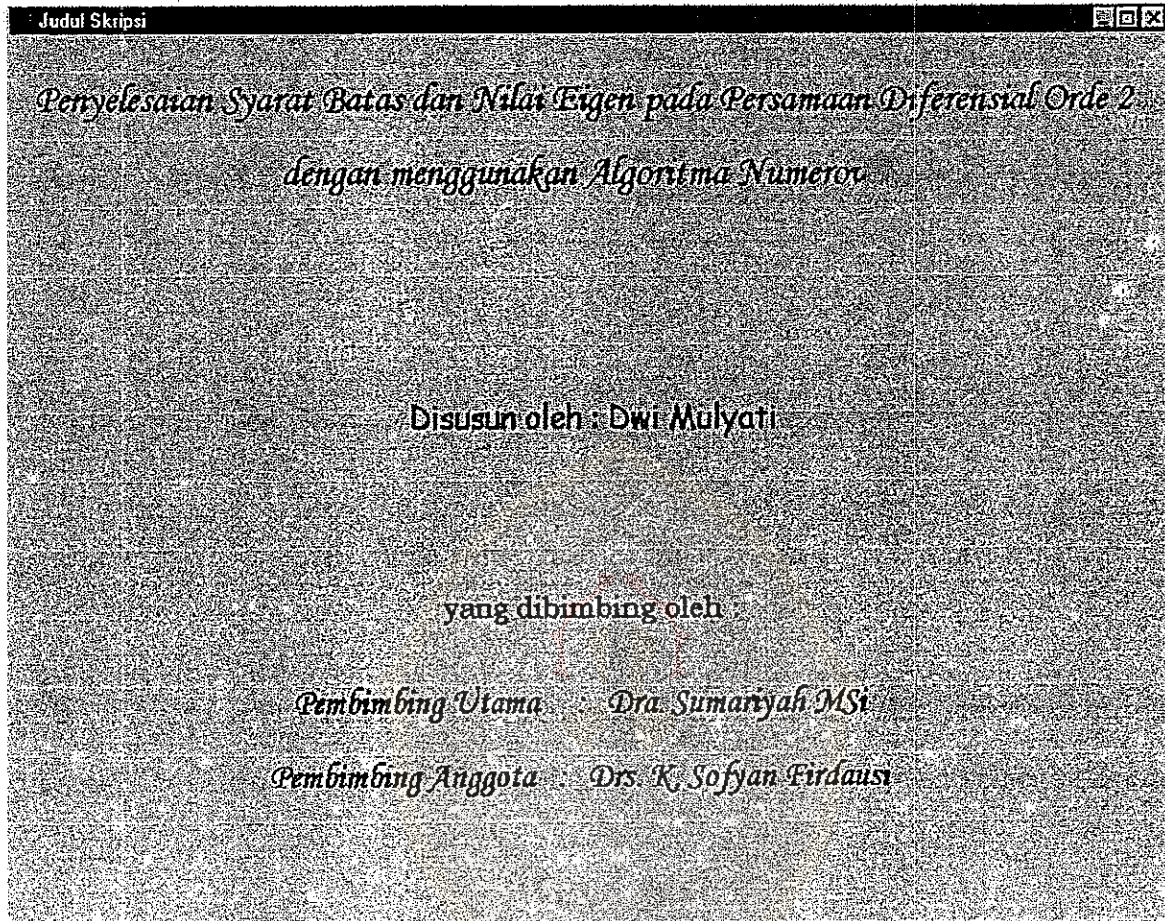


```
Write('K= ');Readln(K); {tebakan awal}
Write('DK= ');Readln(DK); {h awal}
Write('Batas_awal= ');Readln(Batas_awal);
Write('Batas_akhir= ');Readln(Batas_akhir);
Write('N= ');Readln(N);
H:=(Batas_akhir - Batas_awal)/N;
K:=K/(Batas_akhir - Batas_awal);
Eigen_fungsi;
iterasi:=0;
PHIOLD:=PHIP;
43: while Abs(DK) > TOLK do
  begin
    iterasi:=iterasi+1;
    K:=(K+DK);
    Eigen_fungsi;
    Writeln(' ',iterasi,' ',K:15:14,' ');
    if PHIP*PHIOLD > 0 then goto 43
    else
      begin
        K:=(K-DK);
        DK:=DK/2;
      end;
    end;
  Writeln('eigenvalue= ',K);
  Readln;
end.
```



LAMPIRAN C : TAMPILAN OUTPUT PROGRAM

C.1 Hasil program pada bahasa Delphi



Gambar C.1 Tampilan judul skripsi.

KASUS POTENSIAL ELEKTROSTATIK

Penyelesaian Syarat Batas dan Nilai Eigen pada Persamaan Diferensial Orde 2 dengan menggunakan Algoritma Numeror

R Awal:

R Akhir:

Lebar Langkah:

R:

Eksak:

Numerik:

Besarnya Ralat:

00.20	0.09939617	0.19579033	-0.09639416
00.40	0.19561594	0.28873560	-0.09311965
00.60	0.28654487	0.37639034	-0.08984547
00.80	0.37093945	0.45751098	-0.08657153
01.00	0.44818084	0.53147863	-0.08329779
01.20	0.51808926	0.59811346	-0.08002419
01.40	0.58078516	0.65753587	-0.07675071
01.60	0.63658627	0.71006358	-0.07347732
01.80	0.68593211	0.75613610	-0.07020398
02.00	0.72932943	0.79626013	-0.06693070
02.20	0.76731337	0.83097082	-0.06365745
02.40	0.80042050	0.86080474	-0.06038423
02.60	0.82917077	0.88628180	-0.05711103
02.80	0.85405585	0.90789370	-0.05383785
03.00	0.87553233	0.92609700	-0.05056467

Gambar C.2 Tampilan program untuk kasus potensial elektrostatik.

Mencari Nilai Eigen

**Penyelesaian Syarat Batas dan Nilai Eigen pada Persamaan Diferensial Orde 2
dengan menggunakan Algoritma Numerov**

Kasus: Aliran Panas pada sebuah batang logam atas plat

K:

DK:

Batas_Awal:

Batas_Akhir:

N:

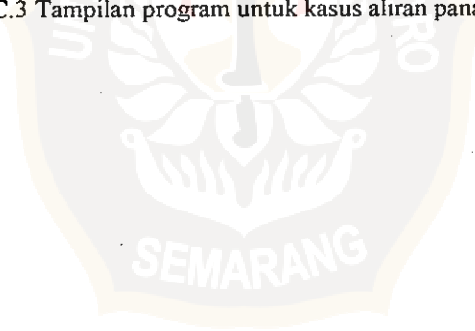
Nilai_Eigen:

PROSES

KELUAR

01	2.0000000000
02	3.0000000000
03	4.0000000000
04	3.5000000000
05	3.2500000000
06	3.1250000000
07	3.2500000000
08	3.1875000000
09	3.1562500000
10	3.1406250000
11	3.1562500000
12	3.1484375000
13	3.1445312500
14	3.1425781250
15	3.1416015625
16	3.1411132813
17	3.1416015625
18	3.1413574219
19	3.1416015625
20	3.1414794922
21	3.1416015625
22	3.1415405273
23	3.1416015625
24	3.1415710449
25	3.1416015625
26	3.1415863037
27	3.1416015625

Gambar C.3 Tampilan program untuk kasus aliran panas.



Mencari Nilai Eigen

Penyelesaian Syarat Batas dan Nilai Eigen pada Persamaan Diferensial Orde 2
dengan menggunakan Algoritma Numerov

Kasus: Partikel Bebas dalam sebuah kotak satu dimensi

L Awal K

L Akhir DK

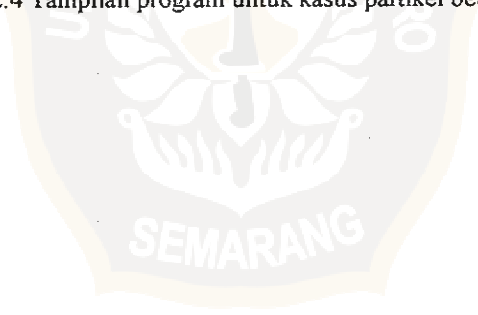
N

PROSES **KELUAR**

Nilai K

01	2.0000000000
02	3.0000000000
03	4.0000000000
04	3.5000000000
05	3.2500000000
06	3.1250000000
07	3.2500000000
08	3.1875000000
09	3.1562500000
10	3.1406250000
11	3.1562500000
12	3.1484375000
13	3.1445312500
14	3.1425781250
15	3.1416015625
16	3.1411132813
17	3.1416015625
18	3.1413574219
19	3.1416015625
20	3.1414794922
21	3.1416015625
22	3.1415405273
23	3.1416015625
24	3.1415710449
25	3.1416015625
26	3.1415863037
27	3.1416015625

Gambar C.4 Tampilan program untuk kasus partikel bebas.



C.2 Hasil program pada bahasa Pascal

C.2.1 Kasus potensial elektrostatik

R awal = 0
 R akhir = 3
 lebar langkah (h) = 0.2

R	EXACT	Numerik	Ralat
0.200000	0.099396	0.195790	-0.096394
0.400000	0.195616	0.288736	-0.093120
0.600000	0.286545	0.376390	-0.089845
0.800000	0.370939	0.457511	-0.086572
1.000000	0.448181	0.531479	-0.083298
1.200000	0.518089	0.598113	-0.080024
1.400000	0.580785	0.657536	-0.076751
1.600000	0.636586	0.710064	-0.073477
1.800000	0.685932	0.756136	-0.070204
2.000000	0.729329	0.796260	-0.066931
2.200000	0.767313	0.830971	-0.063657
2.400000	0.800421	0.860805	-0.060384
2.600000	0.829171	0.886282	-0.057111
2.800000	0.854056	0.907894	-0.053838
3.000000	0.875532	0.926097	-0.050565

R= 3.0000000000E+00
 Exact= 8.7553232908E-01
 Numerik= 9.2609699787E-01
 Ralat= -5.0564668785E-02

C.2.2 Kasus mencari nilai eigen

K= 1
 DK= 1
 Batas_awal= 0
 Batas_akhir= 1
 N= 100

1	2.0000000000
2	3.0000000000
3	4.0000000000
4	3.5000000000
5	3.2500000000
6	3.1250000000
7	3.2500000000
8	3.1875000000
9	3.1562500000

```
| 10 | 3.14062500000 |
| 11 | 3.15625000000 |
| 12 | 3.14843750000 |
| 13 | 3.14453125000 |
| 14 | 3.14257812500 |
| 15 | 3.14160156250 |
| 16 | 3.14111328130 |
| 17 | 3.14160156250 |
| 18 | 3.14135742190 |
| 19 | 3.14160156250 |
| 20 | 3.14147949220 |
| 21 | 3.14160156250 |
| 22 | 3.14154052730 |
| 23 | 3.14160156250 |
| 24 | 3.14157104490 |
| 25 | 3.14160156250 |
| 26 | 3.14158630370 |
| 27 | 3.14160156250 |
```

eigenvalue= 3.1415863037E+00



LAMPIRAN D : HASIL KOMPUTASI

Tabel 1 Potensial elektrostatik analitik dan numerik untuk $0 < R \leq 5$

No.	R	Potensial elektrostatik		Ralat
		Analitik	Numerik	
1	0.2	0.099396	0.195790	-0.096394
2	0.4	0.195616	0.288736	-0.093120
3	0.6	0.286545	0.376390	-0.089845
4	0.8	0.370939	0.457511	-0.086572
5	1.0	0.448181	0.531479	-0.083298
6	1.2	0.518089	0.598113	-0.080024
7	1.4	0.580785	0.657536	-0.076751
8	1.6	0.636586	0.710064	-0.073477
9	1.8	0.685932	0.756136	-0.070204
10	2.0	0.729329	0.796260	-0.066931
11	2.2	0.776731	0.830971	-0.063657
12	2.4	0.800421	0.860805	-0.060384
13	2.6	0.829171	0.886282	-0.057111
14	2.8	0.854056	0.907894	-0.053838
15	3.0	0.875532	0.926097	-0.050565
16	3.2	0.894018	0.941310	-0.047291
17	3.4	0.909892	0.959911	-0.044018
18	3.6	0.923494	0.964239	-0.040745
19	3.8	0.935125	0.972597	-0.037472
20	4.0	0.945053	0.979252	-0.034199
21	4.2	0.953514	0.984439	-0.030926
22	4.4	0.960713	0.988365	-0.027653
23	4.6	0.966829	0.991208	-0.024379
24	4.8	0.972019	0.993125	-0.021106
25	5.0	0.976417	0.994250	-0.017833

Tabel 2 Potensial elektrostatik analitik dan numerik untuk $0 < R \leq 10$

No	R	Potensial elektrostatik		Ralat
		Analitik	Numerik	
1	0.4	0.195616	0.371569	-0.175953
2	0.8	0.370939	0.525463	-0.154524
3	1.2	0.518089	0.651196	-0.133107
4	1.6	0.636586	0.748283	-0.111697
5	2.0	0.729329	0.819621	-0.090292
6	2.4	0.800421	0.869309	-0.068888
7	2.8	0.854056	0.901542	-0.047486
8	3.2	0.894018	0.920103	-0.026085
9	3.6	0.923494	0.928178	-0.004684
10	4.0	0.945053	0.928336	0.016717
11	4.4	0.960713	0.922595	0.038118
12	4.8	0.972019	0.912500	0.059519
13	5.2	0.980140	0.899221	0.080920
14	5.6	0.985948	0.883627	0.102321
15	6.0	0.990085	0.866363	0.123722
16	6.4	0.993021	0.847898	0.145123
17	6.8	0.995099	0.828575	0.166524
18	7.2	0.996566	0.808640	0.187926
19	7.6	0.997598	0.788271	0.209327
20	8.0	0.998323	0.767595	0.230728
21	8.4	0.998831	0.746701	0.252129
22	8.8	0.999186	0.725655	0.273531
23	9.2	0.999434	0.704502	0.294932
24	9.6	0.999607	0.683274	0.316333
25	10.0	0.999728	0.661993	0.337735

Tabel 3 Potensial elektrostatik $0 < R \leq 10$
pada lebar langkah sebesar 0.2

No.	R	Potensial elektrostatik		Ralat
		Analitik	Numerik	
1	0.20	0.099396	0.195790	-0.096394
2	0.40	0.195616	0.288736	-0.093120
3	0.60	0.286545	0.376390	-0.089845
4	0.80	0.370939	0.457511	-0.086572
5	1.00	0.448181	0.531479	-0.083298
6	1.20	0.518089	0.598113	-0.080024
7	1.40	0.580785	0.657536	-0.076751
8	1.60	0.636586	0.710064	-0.073477
9	1.80	0.685932	0.756136	-0.070204
10	2.00	0.729329	0.796260	-0.066931
11	2.20	0.767313	0.830971	-0.063657
12	2.40	0.800421	0.860805	-0.060384
13	2.60	0.829171	0.886282	-0.057111
14	2.80	0.854056	0.907894	-0.053838
15	3.00	0.875532	0.926097	-0.050565
16	3.20	0.894018	0.941310	-0.047291
17	3.40	0.909892	0.953911	-0.044018
18	3.60	0.923494	0.964239	-0.040745
19	3.80	0.935125	0.972597	-0.037472
20	4.00	0.945053	0.979252	-0.034199
21	4.20	0.953514	0.984439	-0.030926
22	4.40	0.960713	0.988365	-0.027653
23	4.60	0.966829	0.991208	-0.024379
24	4.80	0.972019	0.993125	-0.021106
25	5.00	0.976417	0.994250	-0.017833
26	5.20	0.980140	0.994700	-0.014560
27	5.40	0.983289	0.994575	-0.011287
28	5.60	0.985948	0.993962	-0.008014
29	5.80	0.988193	0.992933	-0.004740
30	6.00	0.990085	0.991552	-0.001467
31	6.20	0.991679	0.989873	0.001806
32	6.40	0.993021	0.987942	0.005079
33	6.60	0.994150	0.985798	0.008352
34	6.80	0.995099	0.983474	0.011625
35	7.00	0.995897	0.980998	0.014899

Tabel 3 Potensial elektrostatik $0 < R \leq 10$
pada lebar langkah sebesar 0.2

No.	R	Potensial elektrostatik		Ralat
		Analitik	Numerik	
36	7.20	0.996566	0.978394	0.018172
37	7.40	0.997127	0.975682	0.021445
38	7.60	0.997598	0.972880	0.024718
39	7.80	0.997992	0.970001	0.027991
40	8.00	0.998323	0.967058	0.031265
41	8.20	0.998599	0.964062	0.034538
42	8.40	0.998831	0.961020	0.037811
43	8.60	0.999024	0.957940	0.041084
44	8.80	0.999186	0.954829	0.044357
45	9.00	0.999321	0.951691	0.047630
46	9.20	0.999434	0.948531	0.050904
47	9.40	0.999528	0.945352	0.054177
48	9.60	0.999607	0.942157	0.057450
49	9.80	0.999673	0.938950	0.060723
50	10.00	0.999728	0.935731	0.063996

Tabel 4 Potensial elektrostatik $0 < R \leq 10$
pada lebar langkah sebesar 0.1

No.	R	Potensial elektrostatik		Ralat
		Analitik	Numerik	
1	0.10	0.049921	0.099427	-0.049506
2	0.20	0.099396	0.148450	-0.049054
3	0.30	0.148059	0.196660	-0.048601
4	0.40	0.195616	0.243765	-0.048149
5	0.50	0.241837	0.289533	-0.047696
6	0.60	0.286545	0.333789	-0.047244
7	0.70	0.329610	0.376401	-0.046792
8	0.80	0.370939	0.417279	-0.046339
9	0.90	0.410474	0.456361	-0.045887
10	1.00	0.448181	0.493615	-0.045434
11	1.10	0.484050	0.529032	-0.044982
12	1.20	0.518089	0.562619	-0.044530
13	1.30	0.550323	0.594400	-0.044077
14	1.40	0.580785	0.624410	-0.043625
15	1.50	0.609522	0.652695	-0.043173
16	1.60	0.636586	0.679307	-0.042720
17	1.70	0.662035	0.704303	-0.042268
18	1.80	0.685932	0.727748	-0.041816

Tabel 4 Potensial elektrostatik $0 < R \leq 10$
pada lebar langkah sebesar 0.1

No.	R	Potensial elektrostatik		Ralat
		Analitik	Numerik	
19	1.90	0.708341	0.749704	-0.041363
20	2.00	0.729329	0.770240	-0.040911
21	2.10	0.748964	0.789423	-0.040458
22	2.20	0.767313	0.807319	-0.040006
23	2.30	0.784443	0.823997	-0.039554
24	2.40	0.800421	0.839522	-0.039101
25	2.50	0.815309	0.853958	-0.038649
26	2.60	0.829171	0.867367	-0.038197
27	2.70	0.842067	0.879811	-0.037744
28	2.80	0.854056	0.891348	-0.037292
29	2.90	0.865193	0.902033	-0.036840
30	3.00	0.875532	0.911920	-0.036387
31	3.10	0.885125	0.921059	-0.035935
32	3.20	0.894018	0.929501	-0.035482
33	3.30	0.902260	0.937290	-0.035030
34	3.40	0.909892	0.944470	-0.034578
35	3.50	0.916957	0.951083	-0.034125
36	3.60	0.923494	0.957167	-0.033673
37	3.70	0.929538	0.962759	-0.033221
38	3.80	0.935125	0.967893	-0.032768
39	3.90	0.940286	0.972602	-0.032316
40	4.00	0.945053	0.976917	-0.031864
41	4.10	0.949453	0.980865	-0.031411
42	4.20	0.953514	0.984473	-0.030959
43	4.30	0.957259	0.987766	-0.030506
44	4.40	0.960713	0.990767	-0.030054
45	4.50	0.963896	0.993498	-0.029602
46	4.60	0.966829	0.995978	-0.029149
47	4.70	0.969531	0.998228	-0.028697
48	4.80	0.972019	1.000264	-0.028245
49	4.90	0.974309	1.002102	-0.027792
50	5.00	0.976417	1.003757	-0.027340
51	5.10	0.978357	1.005244	-0.026888
52	5.20	0.980140	1.006576	-0.026435
53	5.30	0.981781	1.007764	-0.025983
54	5.40	0.983289	1.008819	-0.025531
55	5.50	0.984675	1.009753	-0.025078
56	5.60	0.985948	1.010574	-0.024626
57	5.70	0.987118	1.011291	-0.024173
58	5.80	0.988193	1.011914	-0.023721
59	5.90	0.989179	1.012448	-0.023269
60	6.00	0.990085	1.012901	-0.022816

Tabel 4 Potensial elektrostatik $0 < R \leq 10$
pada lebar langkah sebesar 0.1

No.	R	Potensial elektrostatik		Ralat
		Analitik	Numerik	
61	6.10	0.990916	1.013280	-0.022364
62	6.20	0.991679	1.013591	-0.021912
63	6.30	0.992379	1.013839	-0.021459
64	6.40	0.993021	1.014028	-0.021007
65	6.50	0.993610	1.014165	-0.020555
66	6.60	0.994150	1.014253	-0.020102
67	6.70	0.994646	1.014295	-0.019650
68	6.80	0.995099	1.014297	-0.019197
69	6.90	0.995515	1.014260	-0.018745
70	7.00	0.995897	1.014189	-0.018293
71	7.10	0.996246	1.014086	-0.017840
72	7.20	0.996566	1.013954	-0.017388
73	7.30	0.996859	1.013794	-0.016936
74	7.40	0.997127	1.013610	-0.016483
75	7.50	0.997373	1.013404	-0.016031
76	7.60	0.997598	1.013176	-0.015579
77	7.70	0.997804	1.012930	-0.015126
78	7.80	0.997992	1.012666	-0.014674
79	7.90	0.998165	1.012386	-0.014222
80	8.00	0.998323	1.012092	-0.013769
81	8.10	0.998467	1.011784	-0.013317
82	8.20	0.998599	1.011464	-0.012864
83	8.30	0.998720	1.011132	-0.012412
84	8.40	0.998831	1.010790	-0.011960
85	8.50	0.998932	1.010439	-0.011507
86	8.60	0.999024	1.010079	-0.011055
87	8.70	0.999109	1.009711	-0.010603
88	8.80	0.999186	1.009336	-0.010150
89	8.90	0.999257	1.008955	-0.009698
90	9.00	0.999321	1.008567	-0.009246
91	9.10	0.999380	1.008173	-0.008793
92	9.20	0.999434	1.007775	-0.008341
93	9.30	0.999483	1.007372	-0.007888
94	9.40	0.999528	1.006965	-0.007436
95	9.50	0.999570	1.006553	-0.006984
96	9.60	0.999607	1.006139	-0.006531
97	9.70	0.999641	1.005721	-0.006079
98	9.80	0.999673	1.005300	-0.005627
99	9.90	0.999701	1.004876	-0.005174
100	10.00	0.999728	1.004450	-0.004722

Tabel 5 Potensial elektrostatik $0 < R \leq 10$
pada lebar langkah sebesar 0.05

No.	R	Potensial elektrostatik		Ralat
		Analitik	Numerik	
1	0.05	0.024990	0.049925	-0.024935
2	0.10	0.049921	0.074797	-0.024876
3	0.15	0.074739	0.099555	-0.024816
4	0.20	0.099396	0.124153	-0.024757
5	0.25	0.123849	0.148547	-0.024698
6	0.30	0.148059	0.172697	-0.024638
7	0.35	0.171991	0.196570	-0.024579
8	0.40	0.195616	0.220135	-0.024519
9	0.45	0.218906	0.243365	-0.024460
10	0.50	0.241837	0.266237	-0.024400
11	0.55	0.264389	0.288730	-0.024341
12	0.60	0.286545	0.310826	-0.024281
13	0.65	0.308289	0.332511	-0.024222
14	0.70	0.329610	0.353772	-0.024162
15	0.75	0.350496	0.374599	-0.024103
16	0.80	0.370939	0.394983	-0.024044
17	0.85	0.390934	0.414918	-0.023984
18	0.90	0.410474	0.434399	-0.023925
19	0.95	0.429557	0.453422	-0.023865
20	1.00	0.448181	0.471987	-0.023806
21	1.05	0.466345	0.490091	-0.023746
22	1.10	0.484050	0.507737	-0.023687
23	1.15	0.501297	0.524925	-0.023627
24	1.20	0.518089	0.541657	-0.023568
25	1.25	0.534430	0.557938	-0.023509
26	1.30	0.550323	0.573772	-0.023449
27	1.35	0.565773	0.589162	-0.023390
28	1.40	0.580785	0.604115	-0.023330
29	1.45	0.595366	0.618637	-0.023271
30	1.50	0.609522	0.632733	-0.023211
31	1.55	0.623260	0.646412	-0.023152
32	1.60	0.636586	0.659679	-0.023092
33	1.65	0.649509	0.672542	-0.023033
34	1.70	0.662035	0.685009	-0.022973
35	1.75	0.674174	0.697088	-0.022914
36	1.80	0.685932	0.708787	-0.022855
37	1.85	0.697318	0.720114	-0.022795
38	1.90	0.708341	0.731077	-0.022736
39	1.95	0.719009	0.741685	-0.022676
40	2.00	0.729329	0.751946	-0.022617

Tabel 5 Potensial elektrostatik $0 < R \leq 10$
pada lebar langkah sebesar 0.05

No.	R	Potensial elektrostatik		Ralat
		Analitik	Numerik	
41	2.05	0.739312	0.761869	-0.022557
42	2.10	0.748964	0.771462	-0.022498
43	2.15	0.758295	0.780734	-0.022438
44	2.20	0.767313	0.789692	-0.022379
45	2.25	0.776027	0.798346	-0.02232
46	2.30	0.784443	0.806704	-0.02226
47	2.35	0.792572	0.814773	-0.022201
48	2.40	0.800421	0.822562	-0.022141
49	2.45	0.807997	0.830078	-0.022082
50	2.50	0.815309	0.837331	-0.022022
51	2.55	0.822364	0.844327	-0.021963
52	2.60	0.829171	0.851074	-0.021903
53	2.65	0.835736	0.857580	-0.021844
54	2.70	0.842067	0.863852	-0.021784
55	2.75	0.848171	0.869896	-0.021725
56	2.80	0.854056	0.875721	-0.021666
57	2.85	0.859728	0.881334	-0.021606
58	2.90	0.865193	0.886740	-0.021547
59	2.95	0.870459	0.891946	-0.021487
60	3.00	0.875532	0.896960	-0.021428
61	3.05	0.880419	0.901787	-0.021368
62	3.10	0.885125	0.906433	-0.021309
63	3.15	0.889656	0.910905	-0.021249
64	3.20	0.894018	0.915208	-0.02119
65	3.25	0.898218	0.919348	-0.021131
66	3.30	0.902260	0.923331	-0.021071
67	3.35	0.906149	0.927161	-0.021012
68	3.40	0.909892	0.930844	-0.020952
69	3.45	0.913493	0.934386	-0.020893
70	3.50	0.916957	0.937790	-0.020833
71	3.55	0.920289	0.941063	-0.020774
72	3.60	0.923494	0.944208	-0.020714
73	3.65	0.926575	0.947230	-0.020655
74	3.70	0.929538	0.950133	-0.020595
75	3.75	0.932386	0.952923	-0.020536
76	3.80	0.935125	0.955601	-0.020477
77	3.85	0.937757	0.958174	-0.020417
78	3.90	0.940286	0.960644	-0.020358
79	3.95	0.942717	0.963015	-0.020298
80	4.00	0.945053	0.965292	-0.020239

Tabel 5 Potensial elektrostatik $0 < R \leq 10$
pada lebar langkah sebesar 0.05

No.	R	Potensial elektrostatik		Ralat
		Analitik	Numerik	
81	4.05	0.947297	0.967477	-0.020179
82	4.10	0.949453	0.969573	-0.02012
83	4.15	0.951524	0.971585	-0.02006
84	4.20	0.953514	0.973515	-0.020001
85	4.25	0.955424	0.975366	-0.019942
86	4.30	0.957259	0.977141	-0.019882
87	4.35	0.959021	0.978843	-0.019823
88	4.40	0.960713	0.980476	-0.019763
89	4.45	0.962337	0.982040	-0.019704
90	4.50	0.963896	0.983540	-0.019644
91	4.55	0.965392	0.984977	-0.019585
92	4.60	0.966829	0.986354	-0.019525
93	4.65	0.968208	0.987674	-0.019466
94	4.70	0.969531	0.988937	-0.019406
95	4.75	0.970801	0.990148	-0.019347
96	4.80	0.972019	0.991306	-0.019288
97	4.85	0.973188	0.992416	-0.019228
98	4.90	0.974309	0.993478	-0.019169
99	4.95	0.975385	0.994494	-0.019109
100	5.00	0.976417	0.995467	-0.019050
101	5.05	0.977407	0.996397	-0.018990
102	5.10	0.978357	0.997287	-0.018931
103	5.15	0.979267	0.998139	-0.018871
104	5.20	0.980140	0.998952	-0.018812
105	5.25	0.980978	0.999730	-0.018753
106	5.30	0.981781	1.000474	-0.018693
107	5.35	0.982551	1.001184	-0.018634
108	5.40	0.983289	1.001863	-0.018574
109	5.45	0.983996	1.002511	-0.018515
110	5.50	0.984675	1.003130	-0.018455
111	5.55	0.985325	1.003721	-0.018396
112	5.60	0.985948	1.004284	-0.018336
113	5.65	0.986545	1.004822	-0.018277
114	5.70	0.987118	1.005336	-0.018217
115	5.75	0.987667	1.005825	-0.018158
116	5.80	0.988193	1.006291	-0.018099
117	5.85	0.988696	1.006736	-0.018039
118	5.90	0.989179	1.007159	-0.017980
119	5.95	0.989642	1.007562	-0.017920
120	6.00	0.990085	1.007946	-0.017861

Tabel 5 Potensial elektrostatik $0 < R \leq 10$
pada lebar langkah sebesar 0.05

No.	R	Potensial elektrostatik		Ralat
		Analitik	Numerik	
121	6.05	0.990510	1.008311	-0.017801
122	6.10	0.990916	1.008658	-0.017742
123	6.15	0.991306	1.008988	-0.017682
124	6.20	0.991679	1.009302	-0.017623
125	6.25	0.992037	1.009600	-0.017564
126	6.30	0.992379	1.009883	-0.017504
127	6.35	0.992707	1.010152	-0.017445
128	6.40	0.993021	1.010407	-0.017385
129	6.45	0.993322	1.010648	-0.017326
130	6.50	0.993610	1.010877	-0.017266
131	6.55	0.993886	1.011093	-0.017207
132	6.60	0.994150	1.011298	-0.017147
133	6.65	0.994403	1.011491	-0.017088
134	6.70	0.994646	1.011674	-0.017028
135	6.75	0.994877	1.011846	-0.016969
136	6.80	0.995099	1.012009	-0.016910
137	6.85	0.995312	1.012162	-0.016850
138	6.90	0.995515	1.012306	-0.016791
139	6.95	0.995710	1.012441	-0.016731
140	7.00	0.995897	1.012568	-0.016672
141	7.05	0.996075	1.012687	-0.016612
142	7.10	0.996246	1.012799	-0.016553
143	7.15	0.996409	1.012903	-0.016493
144	7.20	0.996566	1.013000	-0.016434
145	7.25	0.996715	1.013090	-0.016375
146	7.30	0.996859	1.013174	-0.016315
147	7.35	0.996996	1.013252	-0.016256
148	7.40	0.997127	1.013323	-0.016196
149	7.45	0.997253	1.013389	-0.016137
150	7.50	0.997373	1.013450	-0.016077
151	7.55	0.997488	1.013506	-0.016018
152	7.60	0.997598	1.013556	-0.015958
153	7.65	0.997703	1.013602	-0.015899
154	7.70	0.997804	1.013643	-0.015839
155	7.75	0.997900	1.013680	-0.015780
156	7.80	0.997992	1.013713	-0.015721
157	7.85	0.998080	1.013742	-0.015661
158	7.90	0.998165	1.013766	-0.015602
159	7.95	0.998246	1.013788	-0.015542
160	8.00	0.998323	1.013805	-0.015483

Tabel 5 Potensial elektrostatik $0 < R \leq 10$
pada lebar langkah sebesar 0.05

No.	R	Potensial elektrostatik		Ralat
		Analitik	Numerik	
161	8.05	0.998397	1.013820	-0.015423
162	8.10	0.998467	1.013831	-0.015364
163	8.15	0.998535	1.013839	-0.015304
164	8.20	0.998599	1.013844	-0.015245
165	8.25	0.998661	1.013847	-0.015186
166	8.30	0.998720	1.013846	-0.015126
167	8.35	0.998777	1.013843	-0.015067
168	8.40	0.998831	1.013838	-0.015007
169	8.45	0.998882	1.013830	-0.014948
170	8.50	0.998932	1.013820	-0.014888
171	8.55	0.998979	1.013808	-0.014829
172	8.60	0.999024	1.013794	-0.014769
173	8.65	0.999067	1.013777	-0.014710
174	8.70	0.999109	1.013759	-0.014650
175	8.75	0.999148	1.013739	-0.014591
176	8.80	0.999186	1.013718	-0.014532
177	8.85	0.999222	1.013694	-0.014472
178	8.90	0.999257	1.013669	-0.014413
179	8.95	0.999290	1.013643	-0.014353
180	9.00	0.999321	1.013615	-0.014294
181	9.05	0.999351	1.013586	-0.014234
182	9.10	0.999380	1.013555	-0.014175
183	9.15	0.999408	1.013523	-0.014115
184	9.20	0.999434	1.013490	-0.014056
185	9.25	0.999459	1.013456	-0.013997
186	9.30	0.999483	1.013421	-0.013937
187	9.35	0.999506	1.013384	-0.013878
188	9.40	0.999528	1.013347	-0.013818
189	9.45	0.999550	1.013308	-0.013759
190	9.50	0.999570	1.013269	-0.013699
191	9.55	0.999589	1.013229	-0.013640
192	9.60	0.999607	1.013188	-0.013580
193	9.65	0.999625	1.013146	-0.013521
194	9.70	0.999641	1.013103	-0.013461
195	9.75	0.999658	1.013060	-0.013402
196	9.80	0.999673	1.013015	-0.013343
197	9.85	0.999687	1.012971	-0.013283
198	9.90	0.999701	1.012925	-0.013224
199	9.95	0.999715	1.012879	-0.013164
200	10.00	0.999728	1.012832	-0.013105

Tabel 6 Besarnya ralat untuk $0 < R \leq 20$

No.	h	ralat
1	0.1	0.040514
2	0.2	0.227650
3	0.3	0.520400
4	0.4	0.872767
5	0.5	1.266004
6	0.6	1.654300
7	0.7	2.115000
8	0.8	2.467000
9	0.9	2.795900
10	1.0	3.155690

Tabel 7 Koreksi ralat untuk $0 < R \leq 20$

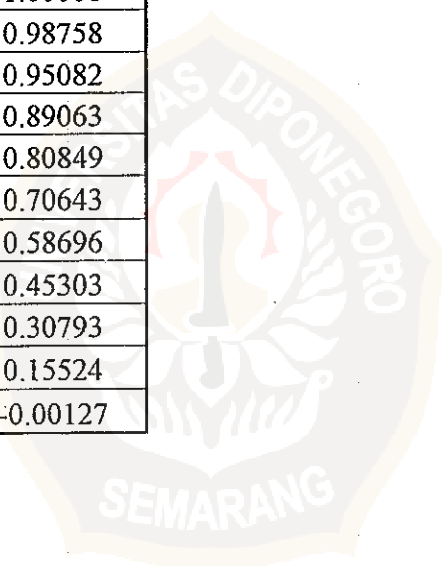
No.	h	Ralat sebelum dikoreksi	Angka koreksi	Ralat setelah dikoreksi
1	0.1	0.040514	1.00400	0.000378
2	0.2	0.227650	1.02265	0.000271
3	0.3	0.520400	1.05200	-0.003158
4	0.4	0.872767	1.08700	0.004819
5	0.5	1.266004	1.12700	0.006760
6	0.6	1.654300	1.16500	0.046781
7	0.7	2.115000	1.21200	0.018707
8	0.8	2.467000	1.24700	0.084811
9	0.9	2.795900	1.28000	0.152421
10	1.0	3.155690	1.31600	0.181563

Tabel 8 Nilai eigen analitik dan numerik untuk $0 < x \leq 1$

No.	Nilai eigen		Ralat
	Analitik	Numerik	
1	3.14286	3.14159	0.00127
2	6.28571	6.28317	0.00254
3	9.42857	9.42477	0.00380
4	12.57143	12.56636	0.00507
5	15.71429	15.70795	0.00634
6	18.85714	18.84955	0.00759
7	22.00000	21.99113	0.00887
8	25.14286	25.13272	0.01014
9	28.28571	28.27431	0.01140
10	31.42857	31.41588	0.01269

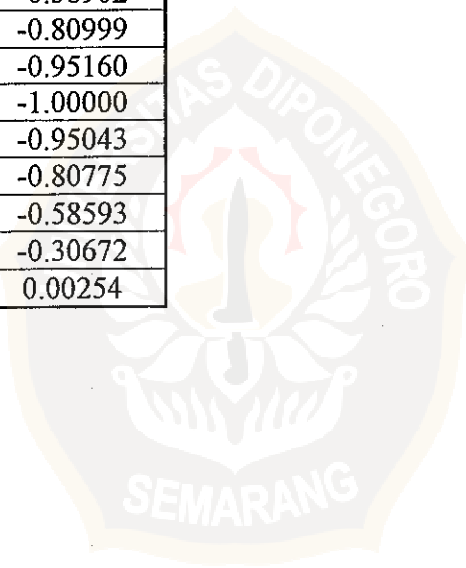
Tabel 9 Fungsi eigen analitik dan numerik pada nilai eigen sebesar 3.14286 untuk $0 < x \leq 1$

No.	x	Fungsi eigen	
		Analitik	Numerik
1	0.00	0.00000	0.00000
2	0.05	0.15643	0.15650
3	0.10	0.30902	0.30914
4	0.15	0.45399	0.45416
5	0.20	0.58779	0.58799
6	0.25	0.70711	0.70733
7	0.30	0.80902	0.80924
8	0.35	0.89101	0.89121
9	0.40	0.95106	0.95121
10	0.45	0.98769	0.98778
11	0.50	1.00000	1.00000
12	0.55	0.98769	0.98758
13	0.60	0.95106	0.95082
14	0.65	0.89101	0.89063
15	0.70	0.80902	0.80849
16	0.75	0.70711	0.70643
17	0.80	0.58779	0.58696
18	0.85	0.45399	0.45303
19	0.90	0.30902	0.30793
20	0.95	0.15643	0.15524
21	1.00	0.00000	-0.00127



Tabel 10 Fungsi eigen analitik dan numerik pada nilai eigen sebesar 6.28671 untuk $0 < x \leq 1$

No.	x	Fungsi eigen	
		Analitik	Numerik
1	0.00	0.00000	0.00000
2	0.05	0.30902	0.30914
3	0.10	0.58779	0.58799
4	0.15	0.80902	0.80924
5	0.20	0.95106	0.95121
6	0.25	1.00000	1.00000
7	0.30	0.95106	0.95082
8	0.35	0.80902	0.80849
9	0.40	0.58779	0.58696
10	0.45	0.30902	0.30793
11	0.50	0.00000	-0.00127
12	0.55	-0.30902	-0.31035
13	0.60	-0.58779	-0.58902
14	0.65	-0.80902	-0.80999
15	0.70	-0.95106	-0.95160
16	0.75	-1.00000	-1.00000
17	0.80	-0.95106	-0.95043
18	0.85	-0.80902	-0.80775
19	0.90	-0.58779	-0.58593
20	0.95	-0.30902	-0.30672
21	1.00	0.00000	0.00254



Tabel 11 Fungsi eigen analitik dan numerik pada nilai eigen sebesar 9.42857 untuk $0 < x \leq 1$

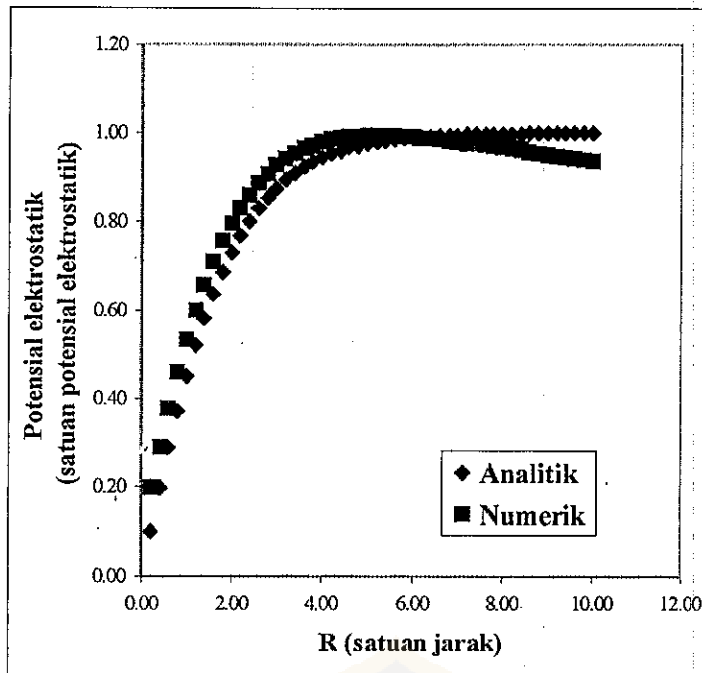
No.	x	Fungsi eigen	
		Analitik	Numerik
1	0.00	0.00000	0.00000
2	0.05	0.45399	0.45416
3	0.10	0.80902	0.80924
4	0.15	0.98769	0.98778
5	0.20	0.95106	0.95082
6	0.25	0.70711	0.70643
7	0.30	0.30902	0.30793
8	0.35	-0.15643	-0.15775
9	0.40	-0.58779	-0.58901
10	0.45	-0.89101	-0.89178
11	0.50	-1.00000	-1.00000
12	0.55	-0.89101	-0.89006
13	0.60	-0.58779	-0.58594
14	0.65	-0.15643	-0.15399
15	0.70	0.30902	0.31155
16	0.75	0.70711	0.70912
17	0.80	0.95106	0.95199
18	0.85	0.98769	0.98718
19	0.90	0.80902	0.80700
20	0.95	0.45399	0.45077
21	1.00	0.00000	-0.00380



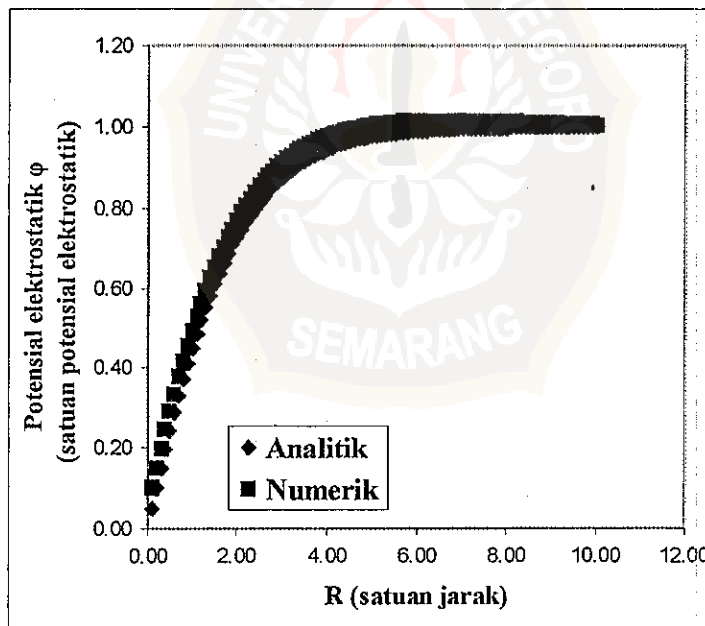
Tabel 12 Fungsi eigen analitik dan numerik untuk $0 < x \leq 1$

No.	X	Nilai eigen = 3.14286		Nilai eigen = 6.28671		Nilai eigen = 9.42857	
		Fungsi eigen		Fungsi eigen		Fungsi eigen	
		Analitik	Numerik	Analitik	Numerik	Analitik	Numerik
1	0.00	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
2	0.05	0.15643	0.15650	0.30902	0.30914	0.45399	0.45416
3	0.10	0.30902	0.30914	0.58779	0.58799	0.80902	0.80924
4	0.15	0.45399	0.45416	0.80902	0.80924	0.98769	0.98778
5	0.20	0.58779	0.58799	0.95106	0.95121	0.95106	0.95082
6	0.25	0.70711	0.70733	1.00000	1.00000	0.70711	0.70643
7	0.30	0.80902	0.80924	0.95106	0.95082	0.30902	0.30793
8	0.35	0.89101	0.89121	0.80902	0.80849	-0.15643	-0.15775
9	0.40	0.95106	0.95121	0.58779	0.58696	-0.58779	-0.58901
10	0.45	0.98769	0.98778	0.30902	0.30793	-0.89101	-0.89178
11	0.50	1.00000	1.00000	0.00000	-0.00127	-1.00000	-1.00000
12	0.55	0.98769	0.98758	-0.30902	-0.31035	-0.89101	-0.89006
13	0.60	0.95106	0.95082	-0.58779	-0.58902	-0.58779	-0.58594
14	0.65	0.89101	0.89063	-0.80902	-0.80999	-0.15643	-0.15399
15	0.70	0.80902	0.80849	-0.95106	-0.95160	0.30902	0.31155
16	0.75	0.70711	0.70643	-1.00000	-1.00000	0.70711	0.70912
17	0.80	0.58779	0.58696	-0.95106	-0.95043	0.95106	0.95199
18	0.85	0.45399	0.45303	-0.80902	-0.80775	0.98769	0.98718
19	0.90	0.30902	0.30793	-0.58779	-0.58593	0.80902	0.80700
20	0.95	0.15643	0.15524	-0.30902	-0.30672	0.45399	0.45077
21	1.00	0.00000	-0.00127	0.00000	0.00254	0.00000	-0.00380

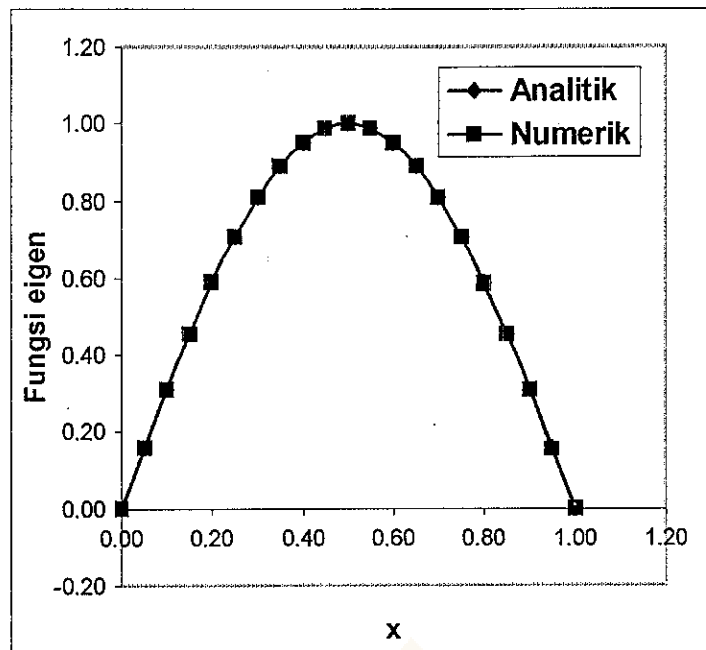
SEMARANG



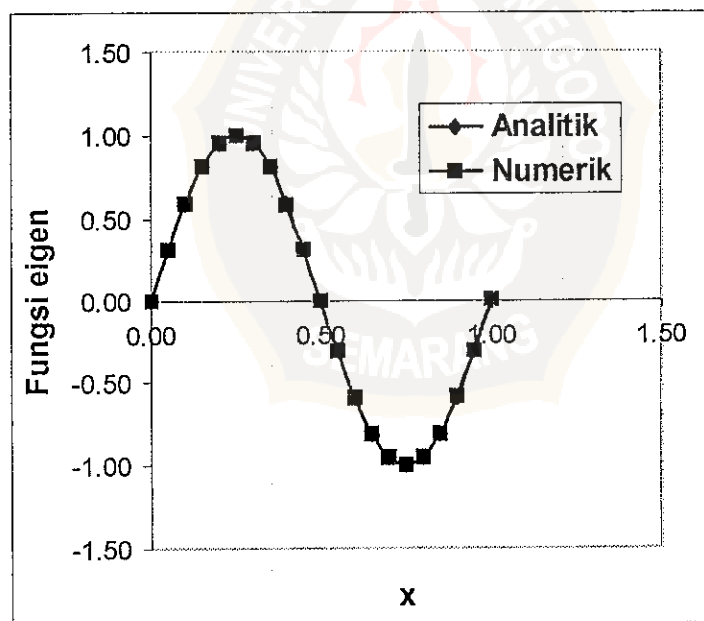
Gambar D.1 Grafik fungsi eigen untuk $0 < x \leq 10$ pada lebar langkah(h) sebesar 0.2.



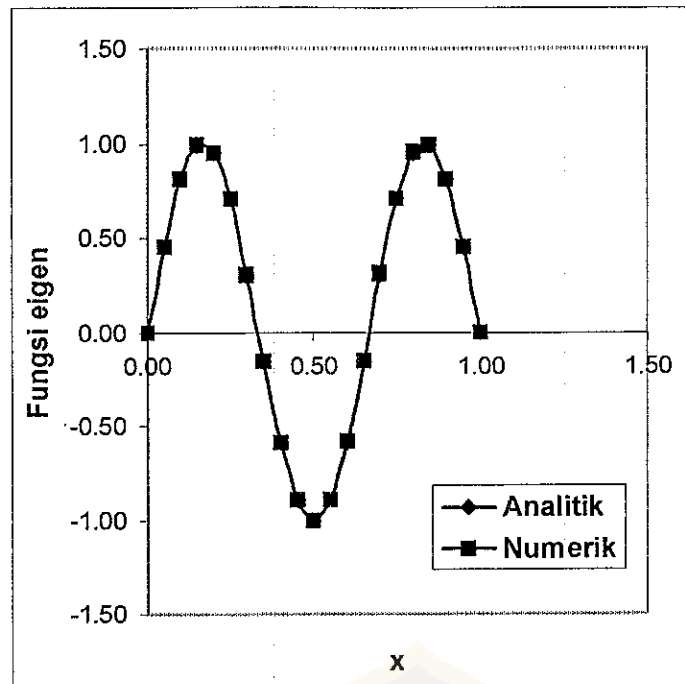
Gambar D.2 Grafik fungsi eigen untuk $0 < x \leq 10$ pada lebar langkah(h) sebesar 0.1.



Gambar D.3 Grafik fungsi eigen pada nilai eigen sebesar 3.14286 untuk $0 < x \leq 1$.



Gambar D.4 Grafik fungsi eigen pada nilai eigen sebesar 6.28571 untuk $0 < x \leq 1$.

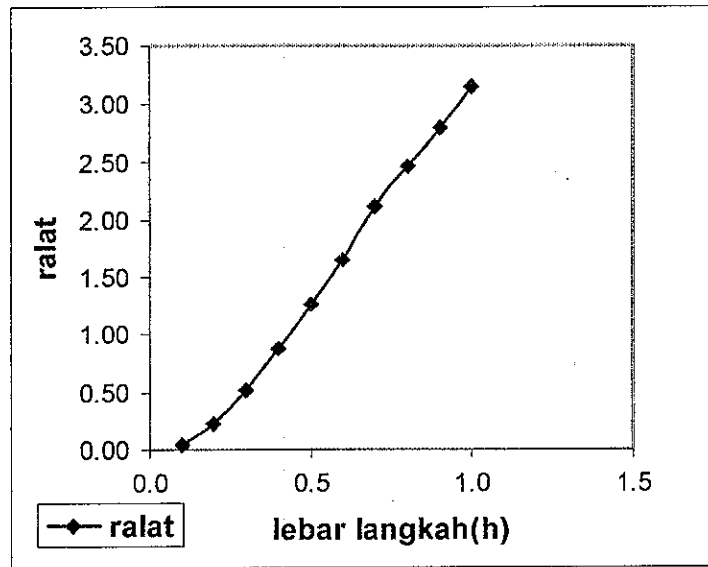


Gambar D.5 Grafik fungsi eigen pada nilai eigen sebesar 9.42857 untuk $0 < x \leq 1$.

Hubungan ralat dengan lebar langkah

Pada hubungan ralat dengan lebar langkah(h) pada jarak R yang besar misalnya untuk batas $0 < R \leq 20$ yang datanya ada pada lampiran tabel 6 dapat ditampilkan grafiknya seperti pada gambar D.6.

Dari gambar D.6 terlihat bahwa pada hubungan ralat dengan lebar langkah menunjukkan hubungan yang sebanding sehingga dengan bertambahnya lebar langkah yang digunakan maka ralatnya juga akan bertambah besar.



Gambar D.6 Grafik ralat sebagai fungsi lebar langkah(h) untuk $0 < R \leq 20$.

