BAB II
DASAR TEORI

2.1 Pendahuluan

Aliran potensial adalah aliran nonrotasi yang komponen-komponen kecepatannya boleh diturunkan dari fungsi-fungsi potensial kecepatan.

Distribusi kecepatan dan tekanan untuk sebuah medan aliran dapat diketahui dari pola garis arus dan dari penerapan persamaan Bernoulli. Untuk menentukan pola aliran fluida dengan kondisi batas tertentu diperlukan pemecahan persamaan Laplace dalam fungsi aliran (ψ) atau fungsi potensial kecepatan ($\emptyset$) yang memenuhi kondisi batas tersebut. Pola-pola garis arus, serta garis-garis potensial masing-masing akan membentuk suatu jaring-jaring aliran yang berkesesuaian.

Pada bab ini, akan dijelaskan pengertian-pengertian dasar dari gerak aliran fluida untuk membahas masalah aliran potensial fluida.

2.2 Sifat-sifat Fluida

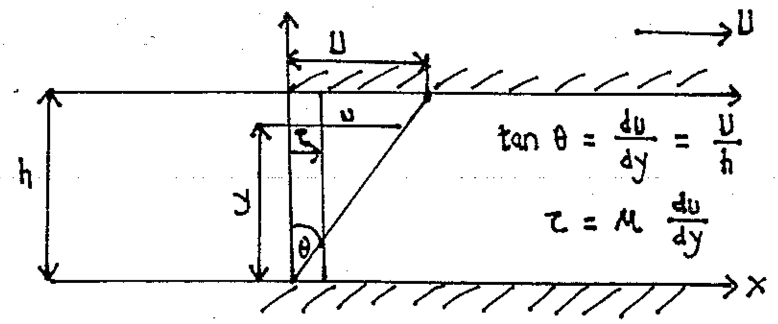
Ada dua bentuk fluida yaitu cair dan gas. Zat cair berubah bentuk menurut bentuk wadah yang di tempatinya, sedangkan zat gas tidak hanya berubah bentuk menurut bentuk wadah yang di tempatinya tetapi juga memenuhi wadah tersebut.

Fluida merupakan materi yang mengalir. Kemampuan mengalir suatu fluida, disebabkan oleh adanya perpindahan partikel-partikel fluida karena pengaruh tegangan geser. Suatu fluida akan bergerak dan berubah secara kontinu apabila dibebani tegangan geser. Sebaliknya suatu zat padat menunjukkan deformasi yang statik apabila menerima suatu tegangan geser.

Newton mendalilkan bahwa tegangan geser dalam sebuah fluida sebanding dengan laju perubahan kecepatan ruang yang normal terhadap aliran. Laju perubahan kecepatan ruang ini disebut gradien kecepatan. Maka :

$$\tau = \mu \frac{du}{dy} \qquad \text{...(2.1)}$$

dimana τ adalah tegangan geser pada arah y ; u adalah kecepatan pada arah x dan μ adalah koefisien kekentalan (viskositas), seperti ditunjukkan pada Gambar (2.1).



Gambar 2.1 Hubungan diantara tegangan geser dan gradien kecepatan dalam satu arah aliran diantara lempeng sejajar

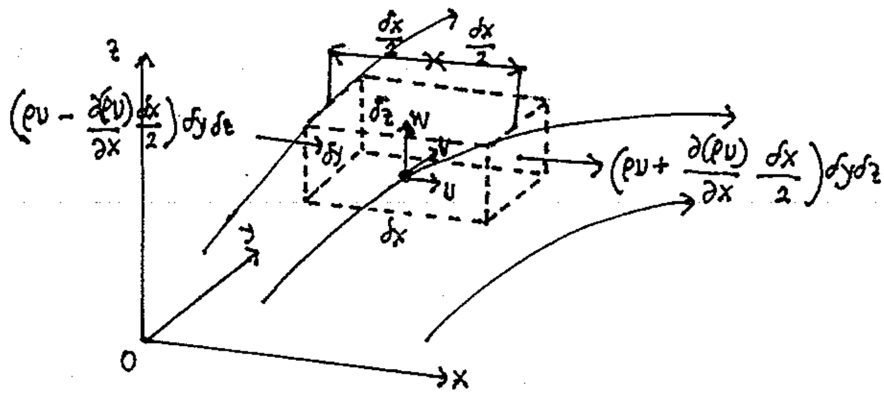
Sifat yang disebut viskositas fluida ini merupakan ukuran ketahanan sebuah fluida terhadap deformasi atau perubahan bentuk. Viskositas merupakan sifat penting dari fluida real, yaitu fluida yang kita jumpai di alam.

Fluida ideal didefinisikan sebagai fluida yang tidak viskos. Dengan demikian, fluida ideal sama sekali tidak dapat menahan gaya geser. Fluida ideal tidak dapat direalisasikan dalam praktek, tetapi dengan model fluida ideal, dapat dikembangkan matematika dari teori gerak fluida ideal, yang dapat mengungkapkan proses yang dialami fluida real.

2.3 Persamaan Kontinuitas

Persamaan kontinuitas mengungkapkan persyaratan bahwa suatu fluida harus kontinu serta bahwa massa fluida bersifat kekal, yakni tidak dapat diciptakan ataupun dimusnahkan.

Tinjau sebuah elemen balok dengan sisi-sisi δx, δy dan δz, melalui suatu fluida yang bergerak (Gambar 2.2).



Gambar 2.2 Laju aliran massa ke dalam dan ke luar dari sebuah elemen volume kontrol

Jika komponen-komponen kecepatan pada waktu t di titik pusat elemen (x,y,z) adalah u, v dan w, maka laju aliran massa melalui titik pusat elemen tersebut dalam arah x adalah

massa jenis X kecepatan X luas = $\rho\ u\ \delta y\ \delta z$

Aliran massa melewati permukaan dalam mendekati titik pusat dengan jarak $^{1}/_{2}\ \delta x$ dari titik pusat adalah

$$\left(\rho u - \frac{\partial \rho u}{\partial x}\ ^{1}/_{2}\ \delta x \right) \delta y\ \delta z$$

Aliran massa melewati permukaan luar menjauhi titik pusat dengan jarak $^{1}/_{2}\ \delta x$ dari titik pusat adalah

$$\left(\rho u + \frac{\partial \rho u}{\partial x}\ ^{1}/_{2}\ \delta x \right) \delta y\ \delta z$$

Laju netto aliran massa yang masuk dalam arah +x per satuan waktu adalah selisih antara laju-laju di atas, yaitu

$$- \frac{\partial}{\partial x} \left(\rho\ u\ \delta y\ \delta z \right) \delta x$$

Demikian pula, laju netto aliran massa yang masuk ke daerah itu dalam arah +y dan +z adalah

$$- \frac{\partial}{\partial y} \left(\rho\ v\ \delta z\ \delta x \right) \delta y$$

dan

$$- \frac{\partial}{\partial z} \left(\rho\ w\ \delta x\ \delta y \right) \delta z$$

Laju pertambahan massa dalam daerah itu adalah

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \; \delta x \; \delta y \; \delta z)$$

Sehingga

$$- \frac{\partial}{\partial x} (\rho u \delta y \delta z)\delta x - \frac{\partial}{\partial y} (\rho v \delta z \delta x)\delta y - \frac{\partial}{\partial z}(\rho w \delta x \delta y)\delta z = \frac{\partial}{\partial t}(\rho \delta x \delta y)\delta z$$

Kemudian dibagi dengan $\delta x \delta y \delta z$, diperoleh

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = - \frac{\partial \rho}{\partial t} \qquad \text{...(2.2)}$$

Untuk fluida dengan kerapatan konstan massa jenis ρ tidak berubah, $\frac{\partial \rho}{\partial t}$ = 0, dan persamaan (2.4) menjadi :

$$\text{div } \vec{V} = \nabla \cdot \vec{V} = 0 \qquad \text{...(2.3a)}$$

dan

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \qquad \text{...(2.3b)}$$

Aliran yang kerapatan massanya dalam persamaan kontinuitas dianggap konstan disebut aliran tak termampatkan (inkompressibel).

Jika komponen kecepatan konstan pada arah z, bentuk persamaan kontinuitas untuk aliran fluida dua dimensi :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \qquad \text{...(2.4)}$$

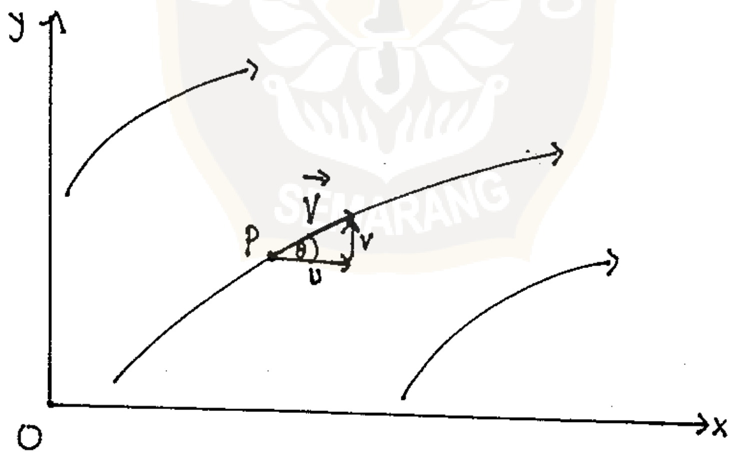
2.4 Garis Arus (Streamline)

Streamline atau garis arus adalah garis yang setiap saat menjadi tempat singgungan vektor-vektor kecepatan. Dalam pola aliran dua dimensi (Gambar 2.3), garis arus melalui titik P(x,y) menyinggung vektor kecepatan $\vec{V}$ pada P, jika u dan v adalah komponen kecepatan pada sumbu x dan y, maka :

$$\frac{v}{u} = \tan \theta = \frac{dy}{dx} \qquad \text{...(2.5a)}$$

atau

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} \qquad \text{...(2.5b)}$$



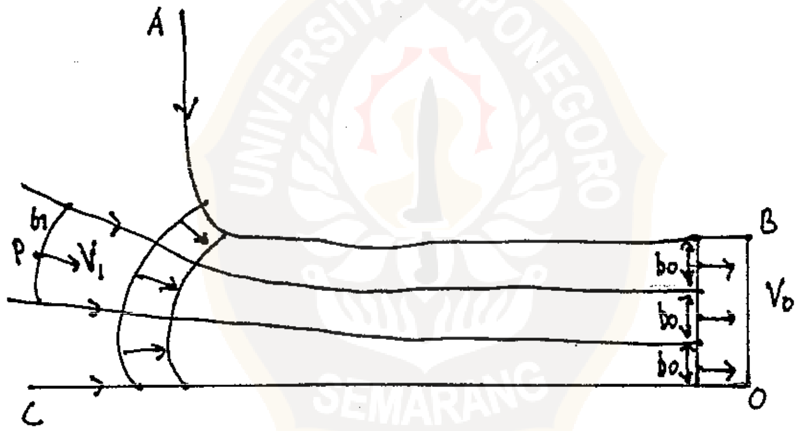
Gambar 2.3 Definisi dari streamline

atau

$$u\, dy - v\, dx = 0 \qquad \text{...(2.5c)}$$

2.5 Pola-pola Aliran Dua Dimensi

Garis-garis arus membagi aliran menjadi beberapa saluran dengan laju aliran yang sama. Jika total aliran per satuan kedalaman normal ke bidang garis arus adalah Q, dan jumlah dari saluran adalah n, maka aliran yang melalui panjang tiap-tiap saluran adalah $q = \frac{Q}{n}$. Kecepatan rata-rata V, dalam saluran dengan lebar b, adalah $V = \frac{q}{b}$, dan kecepatan pada suatu titik berbanding terbalik dengan jarak garis arus pada titik itu.



Gambar 2.4 Aliran dua dimensi memasuki suatu pipa

Pada Gambar (2.4), aliran dua dimensi pada suatu pipa dinyatakan dengan empat garis arus, dua garis arus serupa dengan batas padat, dan aliran total dibagi menjadi tiga saluran. Kita amati bagian dari pipa yang memiliki kecepatan V_0 dan lebar saluran b_0, maka pada titik P,

$$V_i\, b_i = V_o\, b_o$$

$$V_i = V_o \frac{b_o}{b_i} \qquad \ldots(2.6)$$

Karena kecepatan di atas adalah kecepatan rata-rata untuk lebar saluran, maka peningkatan jumlah garis arus, meningkatkan ketepatan perhitungan kecepatan di suatu titik.

Beberapa karakteristik dari pola-pola aliran garis arus yang harus diperhatikan :

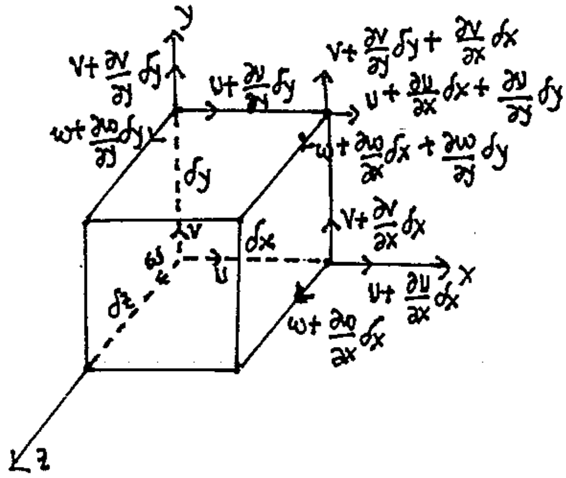
(1) Karena garis arus menyinggung vektor kecepatan pada semua titik, maka tidak ada aliran yang memotong suatu garis arus.

(2) Jarak garis arus berbanding terbalik dengan kecepatan, maka semakin sempit jarak antara garis arus menunjukkan kecepatan yang besar.

(3) Garis arus tidak berpotongan.

2.6 Aliran Rotasional dan Irrotasional

Suatu fluida yang bergerak mengalami pergeseran massa dan perubahan bentuk. Perubahan diumpamakan terjadi dalam interval waktu dt dan dialami oleh elemen dengan sisi-sisi δx, δy dan δz, sedangkan komponen-komponen kecepatan pada titik pusatnya adalah u, v dan w. Ditunjukkan pada Gambar (2.5).



Gambar 2.5 Kecepatan sesaat dibeberapa sudut sebuah kubus elemen fluida

Kecepatan sudut didefinisikan ωz, mengelilingi sumbu z sebagai rata-rata dari perputaran kedua garis δx dan δy dalam arah yang berlawanan dengan perputaran jarum jam

$$\omega z = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) \qquad \text{...(2.7a)}$$

demikian pula laju rotasi terhadap sumbu y

$$\omega y = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right) \qquad \text{...(2.7b)}$$

dan terhadap sumbu x

$$\omega x = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right) \qquad \text{...(2.7c)}$$

Jadi, resultan vektor kecepatan sudut $\vec{\Omega}$ adalah setengah dari curl vektor kecepatan

$$\vec{\Omega} = \frac{1}{2} \text{ curl } \vec{V} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ u & v & w \end{vmatrix}$$

$$\vec{\Omega} = \omega x \ \hat{i} + \omega y \ \hat{j} + \omega z \ \hat{k} \qquad ...(2.8)$$

Apabila aliran digolongkan sebagai aliran tak berotasi (irrotasional), maka kecepatan sudut sama dengan nol. Sehingga,

$$\text{curl } \vec{V} = 0$$

dan

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} \ ; \ \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial z} \ ; \ \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial x} \qquad ...(2.9)$$

Untuk kondisi aliran irrotasional dua dimensi, maka :

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} \qquad ...(2.10a)$$

atau

$$\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \qquad ...(2.10b)$$

2.7 Persamaan Bernouilli

Jika kecepatan V sebuah partikel fluida merupakan fungsi terhadap letak dan waktu, maka V = V(s,t). Karena kecepatan mempunyai sebuah komponen dalam arah s yang bersinggungan dengan garis arus, maka

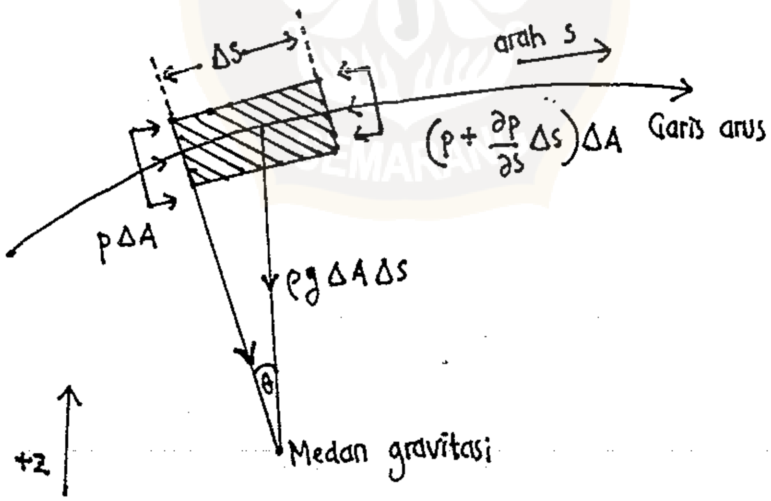
$$dV = \frac{\partial V}{\partial s} ds + \frac{\partial V}{\partial t} dt$$

atau

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\partial V}{\partial s} \frac{ds}{dt} + \frac{\partial V}{\partial t}$$

dan kecepatan di sepanjang garis arus adalah $V = \dfrac{ds}{dt}$, percepatan dalam arah itu adalah :

$$a_s = \frac{dV}{dt} = V \frac{\partial V}{\partial s} + \frac{\partial V}{\partial t}$$



Gambar 2.6 Elemen fluida tidak viskos yang bergerak sepanjang sebuah garis arus

Dari Gambar (2.6), penerapan hukum kedua Newton terhadap sebuah elemen fluida tidak viskos, adalah :

$$\Sigma F = m.a_s$$

$$p\,\Delta A - (p + \frac{\partial p}{\partial s}\Delta s)\,\Delta A - \rho g \Delta A\,\Delta s \sin\theta = \rho \Delta A \Delta s\,(V\frac{\partial V}{\partial s} + \frac{\partial V}{\partial t})$$

dan karena $\sin\theta = \frac{\partial z}{\partial s}$, maka

$$V\frac{\partial V}{\partial s} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial s} + g\frac{\partial z}{\partial s} = -\frac{\partial V}{\partial t}$$

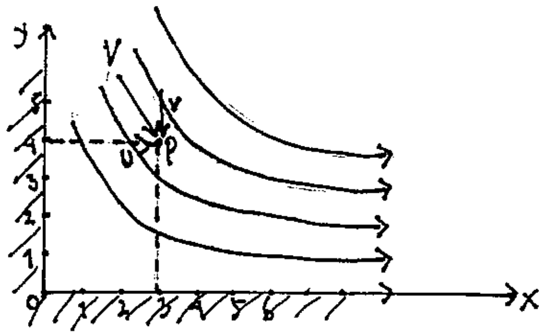
Untuk aliran steady $\frac{\partial V}{\partial t} = 0$, sehingga kalau diintegrasi sepanjang garis arus untuk kerapatan konstan kita mendapatkan

$$\frac{V^2}{2} + \frac{p}{\rho} + g\,z = \text{konstan} \qquad (2.11)$$

Persamaan ini merupakan persamaan Bernoulli.

2.8 Fungsi Aliran

Dalam aliran dua dimensi, persamaan-persamaan untuk garis arus bisa dijelaskan dengan fungsi aliran. Harga-harga fungsi aliran ψ yang berbeda menyatakan garis arus yang berbeda pula.



Gambar 2.7 Aliran irrotasional pada sudut 90°

Dalam aliran steady dua dimensi dalam bidang x dan y, fungsi aliran ψ adalah suatu fungsi dari variabel x dan y,

$$\psi = f\ (x,y)$$

dan fungsi aliran mempunyai sifat-sifat :

(1) Apabila fungsi aliran dari suatu pola aliran merupakan suatu konstanta, maka akan diperoleh persamaan umum untuk garis-garis arus pada pola tersebut, perbedaan konstanta merupakan perbedaan garis-garis arus.

(2) Apabila fungsi aliran diturunkan terhadap y dan x, persamaan umum untuk komponen-komponen kecepatan u dan v bisa diperoleh.

(3) Dalam suatu pola aliran, kecepatan volume aliran dari kiri ke kanan diantara dua garis arus $\psi=C_1$ dan $\psi=C_2$ adalah $\delta Q = \delta\psi = C_2-C_1$.

Sebagai contoh, karakteristik dari fungsi aliran steady dua dimensi untuk aliran nonrotasi pada sudut 90° dapat ditetapkan (Gambar 2.7). Pola aliran ini memenuhi persamaan fungsi aliran

$$\psi = axy$$

Koefisien a ditentukan dari ukuran atau besarnya aliran. Komponen kecepatan u dan v pada suatu titik (x,y) adalah

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} = +ax$$

$$v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = -ay$$

Misalkan a satu satuan, maka komponen kecepatan u dan v pada titik P(3,4) dalam Gambar 2.7, dinyatakan :

$$u = +x = 3 \qquad \text{dan} \qquad v = -y = -4$$

maka kecepatan total pada titik tersebut

$$V = \sqrt{u^2 + v^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$

Kecepatan aliran volumetrik antara dua garis alir $\psi_2 = 10$ dan $\psi_3 = 15$ adalah

$$\begin{aligned} \delta Q &= \delta\psi \\ &= \psi_3 - \psi_2 \\ &= 15 - 10 = 5 \ m^3/\text{detik} \end{aligned}$$

Penerapan fungsi aliran yang paling lazim untuk aliran inkompressibel pada bidang x-y, adalah

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \qquad \ldots(2.12)$$

Persamaän ini akan dipenuhi oleh fungsi aliran $\psi(x,y)$, bila

$$u = \frac{\partial\psi}{\partial y} \quad \text{dan} \quad v = -\frac{\partial\psi}{\partial x}$$

Dengan u dan v adalah komponen kecepatan dalam arah y dan x, sehingga

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial\psi}{\partial x}\right) = 0$$

atau harga kecepatan dari fungsi aliran, adalah

$$\vec{V} = \hat{i}\,\frac{\partial\psi}{\partial y} - \hat{j}\,\frac{\partial\psi}{\partial x} \qquad \text{...(2.13)}$$

Ini hanyalah kiat matematika untuk memudahkan penafsiran geometri. Jika harga u dan v disubtitusikan ke dalam persamaan garis arus

$$u\,dy - v\,dx = 0 \qquad \text{...(2.14)}$$

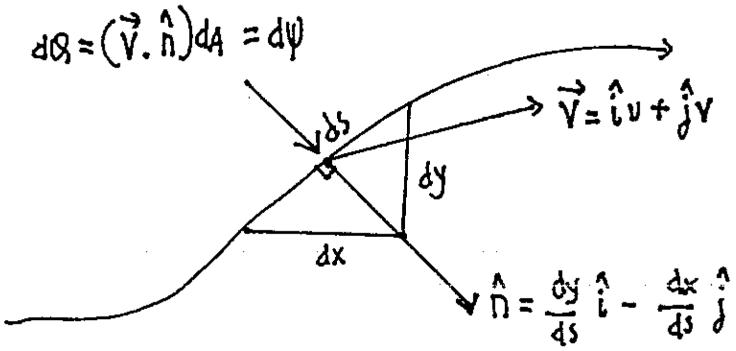
$$\frac{\partial\psi}{\partial y}\,dy + \frac{\partial\psi}{\partial x}\,dx = 0 \qquad \text{...(2.15)}$$

dan total diferensial

$$d\psi = \frac{\partial\psi}{\partial x}\,dx + \frac{\partial\psi}{\partial y}\,dy = 0$$

ψ = konstan, sepanjang garis arus ...(2.16)

Setelah $\psi(x,y)$ diketahui, berbagai garis ψ konstan dapat dipetakan untuk mendapatkan berbagai garis arus aliran. Disamping itu, kita juga dapat mengetahui laju aliran massa berdasarkan harga ψ.



Gambar 2.8 Tafsiran geometri fungsi aliran : debit melalui unsur diferensial suatu permukaan kendali.

Dari Gambar (2.8) dapat dihitung laju aliran volumetrik dQ menembus suatu elemen ds dari suatu permukaan kendali yang tebalnya satu satuan.

$$dQ = \vec{V}.\hat{n}\ dA = \left(\hat{i}\frac{\partial\psi}{\partial y} - \hat{j}\frac{\partial\psi}{\partial x}\right) . \left(\hat{i}\frac{dy}{ds} - \hat{j}\frac{dx}{ds}\right) ds \times (1)$$

$$dQ = \frac{\partial\psi}{\partial x}dx + \frac{\partial\psi}{\partial y}dy = d\psi \qquad \text{...(2.17)}$$

dimana $\hat{n}$ adalah vektor satuan.

Jadi perubahan ψ melintasi unsur itu mempunyai nilai yang sama dengan debit yang melalui unsur tersebut. Debit antara dua titik sebarang di dalam medan aliran sama dengan perubahan fungsi aliran antara kedua titik itu :

$$Q_{1\to 2} = \int_1^2 (\vec{V}.\hat{n})\ dA = \int_1^2 d\psi = \psi_2 - \psi_1 \qquad \text{...(2.18)}$$

Untuk aliran irrotasional dua dimensi, diperoleh

$$\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

maka

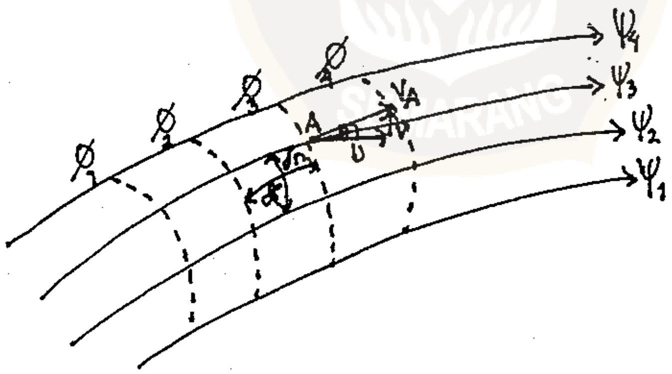
$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0 \qquad \text{...(2.19)}$$

Persamaan ini merupakan bentuk dari persamaan Laplace pada koordinat dua dimensi .

2.9 Fungsi Potensial Kecepatan

Potensial kecepatan dinyatakan sebagai fungsi x, y dan t dari medan kecepatan. Tinjau Gambar (2.9), pada arah s, kecepatan pada arah tersebut Vs.

$$\frac{\partial \phi}{\partial s} = V_s \qquad \text{...(2.20)}$$



Gambar 2.9 Garis arus dan garis ekuipotensial

Untuk arah x dan y, komponen kecepatannya:

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad ; \quad v = \frac{\partial \phi}{\partial y} \qquad \text{...(2.21)}$$

Fungsi potensial kecepatan merupakan asumsi matematis dari aliran irrotasional, maka dalam aliran dua dimensi

$$\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

Persamaan (2.22) disubtitusikan, diperoleh

$$\frac{\partial^2 \emptyset}{\partial y\ \partial x} - \frac{\partial^2 \emptyset}{\partial x\ \partial y} = 0$$

Harga kecepatan $\vec{V}$ dari fungsi potensial kecepatan, adalah

$$\vec{V} = \text{grad } \emptyset = \hat{i}\,\frac{\partial \emptyset}{\partial x} + \hat{j}\,\frac{\partial \emptyset}{\partial y} \qquad \text{...(2.22)}$$

Garis ekuipotensial dalam dua dimensi didefinisikan sebagai harga Ø tetap konstan pada setiap titik dari suatu garis atau bidang.

$$\emptyset\ (x,y) = \text{konstan} = K$$

maka

$$d\emptyset = \frac{\partial \emptyset}{\partial x}\,dx + \frac{\partial \emptyset}{\partial y}\,dy = 0 \qquad \text{...(2.23)}$$

atau

$$u\ dx + v\ dy = 0 \qquad \text{...(2.24)}$$

atau

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{\emptyset} = -\ \frac{u}{v} \qquad \text{...(2.25a)}$$

demikian pula, untuk garis arus,

$$d\psi = - v\,dy + u\,dx = 0$$

atau

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{\psi} = \frac{v}{u} = -\left(\frac{1}{dy/dx}\right)_{\emptyset} \qquad ...(2.25b)$$

sehingga pada setiap titik perpotongan, garis-garis ekuipotensial selalu tegak lurus terhadap garis-garis arus. Kumpulan dari kedua macam garis yang saling berpotongan itu membentuk sebuah sistem bujursangkar kurvalinier yang disebut jaring-jaring aliran (flow net).

Persamaan kontinuitas dapat dinyatakan dalam fungsi potensial kecepatan untuk aliran dua dimensi :

$$\nabla \cdot \vec{V} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial^2 \emptyset}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \emptyset}{\partial y^2} = 0 \qquad ...(2.26)$$

Persamaan ini menunjukkan bahwa fungsi $\emptyset$ seperti juga fungsi ψ merupakan persamaan Laplace untuk aliran irrotasional.

Hubungan dari $\emptyset$, ψ dan komponen kecepatan u dan v pada titik (x,y) dapat dinyatakan dalam dua persamaan :

$$u = \frac{\partial \emptyset}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} \qquad ...(2.27a)$$

$$v = \frac{\partial \emptyset}{\partial y} = - \frac{\partial \psi}{\partial x} \qquad ...(2.27b)$$

Jika v nol, $\frac{\partial \varnothing}{\partial y} = 0$, maka $\varnothing$ hanya tergantung pada x. Demikian pula dengan $\frac{\partial \psi}{\partial x} = 0$, maka ψ hanya tergantung pada y, sehingga

$$u = \frac{d\varnothing}{dx} = \frac{d\psi}{dy}$$

Hubungan antara fungsi aliran ψ dengan fungsi potensial kecepatan $\varnothing$ adalah seperti tabel berikut :

Tabel 2.1 Hubungan Stream dan Potential Function

Stream Function	Potential Function
Persamaan kontinuitas : $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$ Simbol stream function : ψ Streamline dinyatakan dengan $d\psi = 0$ $\psi = K$ Komponen kecepatan : $u = \frac{\partial \psi}{\partial y}$ $v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$ $V = \frac{\partial \psi}{\partial n}$ ∂n adalah bagian dari suatu garis ekuipotensial yang dinyatakan oleh $\partial \varnothing = 0$ ∂n tegak lurus terhadap garis arus Persamaan irrotasional : $\nabla^2 \psi = 0$	Persamaan irrotasional : $\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} = 0$ Simbol potential function : $\varnothing$ Garis ekuipotensial dinyatakan dengan : $d\varnothing = 0$ $\varnothing = K$ Komponen kecepatan : $u = \frac{\partial \varnothing}{\partial x}$ $v = \frac{\partial \varnothing}{\partial y}$ $V = \frac{\partial \varnothing}{\partial s}$ ∂s adalah bagian dari suatu streamline, yang dinyatakan oleh $\partial \psi = 0$ ∂s tegak lurus terhadap garis ekuipotensial Persamaan kontinuitas : $\nabla^2 \varnothing = 0$

2.10 Jaring -jaring Aliran untuk Aliran Dua Dimensi

Suatu himpunan garis arus dan garis ekuipotensial pasangannya akan membentuk suatu jaringan yang tersusun dari elemen-elemen persegi kurvalinier. Pembentukan jaring-jaring aliran berguna untuk memudahkan penggambaran sifat-sifat dan perilaku aliran. Ada sejumlah cara pemecahan persamaan Laplace untuk mendapatkan fungsi-fungsi aliran dan potensial kecepatan untuk aliran dua dimensi, dan dari situ kita bisa mendapatkan informasi yang diperlukan untuk membuat jaring-jaring aliran.

Beberapa karakteristik dari jaring-jaring aliran dapat disebutkan sebagai berikut :

(1) Jaring aliran didasarkan pada asumsi aliran irrotasional, bisa digunakan pada aliran stasioner maupun tidak stasioner.

(2) Hanya ada satu pola aliran yang terbentuk dari sekumpulan jaring aliran pada kondisi batas tertentu.

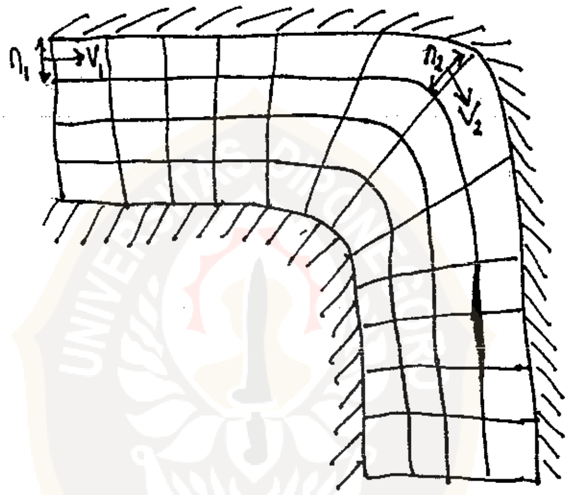
(3) Garis $\emptyset$ selalu berpotongan dengan garis ψ.

(4) Gambar garis-garis ekuipotensial yang memotong garis-garis arus membentuk kisi-kisi segiempat yang mempunyai garis tengah yang sama dan membentuk sudut 90^{o}.

(5) Dalam daerah-daerah aliran yang uniform, memiliki ukuran segiempat yang sama.

(6) Jarak antar garis Ø sama dengan jarak antar garis ψ dan berbanding terbalik dengan kecepatan. Jika s adalah jarak yang dihitung searah aliran sepanjang garis arus, dan n adalah jarak yang memotong aliran sepanjang garis ekuipotensial, kecepatan V pada suatu titik sepanjang garis arus adalah :

$$V = \frac{d\varnothing}{ds} = \frac{d\psi}{dn} \qquad \ldots(2.28)$$



Gambar 2.10 Aliran di sebuah belokan

Berdasarkan persamaan (2.6), $V_1\ n_1 = V_2\ n_2$ seperti pada Gambar (2.10), karena itu variasi kecepatan berbanding terbalik dengan selang antar garis arus. Dari persamaan Bernoulli untuk fluida tak termampatkan yang ideal bila efek gravitasi diabaikan :

$$\left(\frac{1}{2}\rho V_1^2\right) + P_1 = \left(\frac{1}{2}\rho V_2^2\right) + P_2 \qquad \ldots(2.29a)$$

$$\frac{P_1 - P_2}{\frac{1}{2}\rho V_2^2} = 1 - \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^2 \qquad \ldots(2.29b)$$

Variasi tekanan dapat ditentukan dari medan aliran apabila variasi kecepatan diketahui.