BAB II
DASAR TEORI

2.1. OSILASI

Setiap gerak yang berulang dalam selang waktu yang sama disebut gerak periodik. Seperti pergeseran partikel yang bergerak periodik selalu dapat dinyatakan dalam fungsi sinus dan cosinus. Karena pernyataan yang memuat fungsi ini maka diberi istilah **harmonik**, dengan gerak periodik sering juga disebut **gerak harmonik.**

Jika suatu partikel dalam gerak periodik bergerak bolak-balik melalui lintasan yang sama, geraknya disebut **gerak osilasi atau vibrasi (getaran).** Bumi penuh dengan gerak osilasi misalnya osilasi roda keseimbangan arloji,dawai biola, massa yang diikatkan pada pegas, atom dalam molekul atau dalam kisi zat padat, molekul udara ketika ada gelombang bunyi dan sebagainya.

Banyak benda berosilasi yang gerak bolak-baliknya tidak tepat sama karena gaya gesekan melesapkan tenaga geraknya. Dawai biola akhirnya berhenti bergetar dan pendulum berhenti berayun. Gerak semacam ini disebut gerak harmonik teredam (damped harmonic motion). Walaupun pada kebanyakan benda tidak dapat menghindari gesekan, selalu dapat meniadakan efek redamannya dengan menambahkan tenaga ke dalam sistem yang berosilasi untuk mengisi kembali tenaga yang terdisipasi oleh gesekan. Pegas utama dalam arloji dan beban yang berayun pada bandul jam memberikan tenaga eksternal untuk maksud di atas, sehingga sistim yang berosilasi, yaitu roda keseimbangan atau bandul bergerak seolah - olah tanpa redaman.

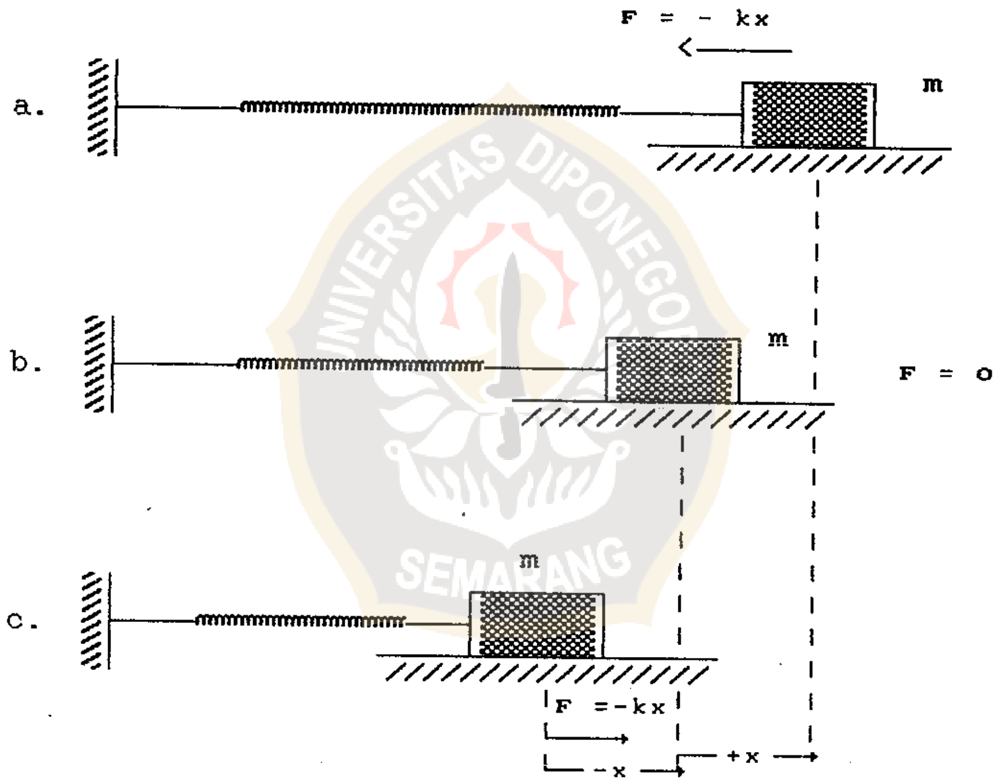
Bukan saja sistim mekanis yang dapat berosilasi gelombang radio, gelombang mikro dan cahaya tampak adalah osilasi dari vektor medan magnetik dan medan elektrik. Rangkaian yang ditala (tuned) dalam radio dan rongga logam tertutup yang mengandung tenaga gelombangmikro dapat berosilasi secara elektromagnetik. Analoginya sangat dekat, keduanya didasarkan atas kenyataan bahwa osilasi mekanik maupun elektromagnetik digambarkan oleh persamaan matematis dasar yang sama.Periode (T) suatu gerak harmonik adalah waktu yang dibutuhkan untuk menempuh satu lintasan lengkap dengan geraknya, yaitu satu getaran penuh atau satu putaran (cycle). Frekuensi gerak ν adalah banyaknya getaran atau putaran tiap satuan waktu. Jadi frekuensinya adalah kebalikan dari periode, yaitu

$$\nu = \frac{1}{T} \tag{2.1}$$

Satuan SI untuk frekuensi adalah putaran per detik (rps) atau dikenal dengan hertz (Hz). Posisi pada saat tidak ada gaya netto yang bekerja pada partikel yang berosilasi disebut posisi seimbang. Simpangan (pergeseran) linier atau sudut adalah jarak linier atau sudut, partikel yang berosilasi dari posisi seimbangnya pada sembarang saat.

2.1.1. Osilasi Harmonik Sederhana

Getaran yang paling mendasar dari sebuah partikel tunggal atau sistim satu dimensi adalah harmonik sederhana. Misalnya pada pegas,



Gambar 2.1. Osilasi harmonik sederhana. Gaya yang dilakukan oleh pegas diperlihatkan untuk masing-masing keadaan. Balokmeluncur di atas meja horizontal tanpa gesekan. (Halliday,1978)

Dengan menerapkan hukum Hooke dan hukum Newton kedua,

$$F = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

$$-kx = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

atau

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0 \qquad (2.2)$$

dengan $\omega = k/m$ (frekuensi alamiah)

Persoalan osilator harmonik sederhana menjadi penting karena dua alasan yang berikut:

Pertama, kebanyakan persoalan yang menyangkut getaran mekanis untuk amplitudo yang kecil kembali menjadi osilator harmonik sederhana atau kombinasi getaran yang demikian. Hal ini sama saja dengan mengatakan bahwa jika ditinjau sebagian kecil kurva gaya pemulih (di sekitar titik asal) dalam gambar di samping, maka bagian ini akan mendekati bentuk garis lurus yang merupakan ciri khas gerak harmonik sederhana. Kedua, persamaan (2.2) muncul dalam banyak persoalan fisis seperti misalnya dalam bidang akustik, optika, mekanika, rangkaian elektris, dan bahkan dalam fisika atom. Osilator harmonik sederhana menunjukan ciri yang biasa dijumpai dalam banyak sistem fisis.

Penyelesaian persamaan (2.2) merupakan fungsi sinus atau cosinus, karena mempunyai sifat periodik dan terbatas.

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$$

Ruas kiri dan kanan dikalikan dengan $2\frac{dx}{dt}$, sehingga

$$2\frac{dx}{dt}\frac{d^2x}{dt^2} = -2\,\omega^2 x\frac{dx}{dt}$$

atau

$$2\dot{x}\,\ddot{x} = -2\,\omega^2 x\,\dot{x}$$

$$\int 2\dot{x}\,d\dot{x} = \int -2\,\omega^2\,x\,dx$$

$$\dot{x}^2 = -\,\omega^2 x^2 + C$$

Dengan syarat batas $\dot{x} = 0$, $x = A$ sehingga $C = \omega^2 A^2$

$$\dot{x}^2 = \omega^2 (A^2 - x^2)$$

atau

$$\dot{x} = \omega\sqrt{(A^2 - x^2)}$$

$$\frac{dx}{dt} = \omega\sqrt{A^2 - x^2}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{A^2 - x^2}} = \omega \int dt$$

penyelesaiannya adalah : $\sin^{-1}\left(\frac{x}{A}\right) = \omega t + \emptyset$

dengan $\emptyset$ = fase awal atau konstanta fase.

Sehingga ,

$$x = A \sin(\omega t + \emptyset)$$

atau

$$x = A \text{ Cos } (\omega t + \emptyset) \tag{2.3}$$

Merupakan penyelesaian dari persamaan differensial getaran selaras (Pers 2.2). Besaran ω disebut frekuensi sudut (angular frequency), besaran ini berbeda dari frekuensi υ dengan faktor 2π. Dimensinya adalah kebalikan waktu (sama dengan laju sudut), dan satuannya adalah radian per detik.

Konstanta A memiliki arti fisis yang sederhana. Fungsi Cosinus maupun sinus dapat memiliki harga dari -1 sampai dengan 1. Dengan demikian simpangan x memiliki harga maksimum A, diukur dari posisi seimbang pusat x = 0. A (saat x maksimum) dinamakan amplitudo untuk gerak yang bersangkutan. Karena A belum ditetapkan oleh persamaan differensial di atas, maka masih mungkin diperoleh dengan berbagai harga amplitudo, tetapi dengan frekuensi dan periode yang sama. Frekuensi suatu gerak harmonik sederhana tidak bergantung kepada amplitudo geraknya.

Besaran $(\omega t + \emptyset)$ disebut fase gerak. Duabuah gerak dapat mempunyai amplitudo dan frekuensi yang sama, tetapi fasenya berlainan. Sebagai contoh, misalnya $\emptyset = -\pi/2$

$$x = A \text{ Cos}(\omega t + \emptyset) = A \text{ Cos } (\omega t - 90^\circ)$$
$$= A \text{ Sin } \omega t \tag{2.4}$$

yang memberikan simpangan sama dengan nol saat t = 0.

2.1.2. Osilasi Harmonik Teredam (Damped Harmonic Oscillation)

Sampai saat ini masih dianggap bahwa tidak ada gaya gesekan yang bekerja pada osilator. Jika anggapan ini dipegang dengan ketat, bandul atau pegas akan terus berosilasi. Pada kenyataannya amplitudo osilasi berkurang sedikit demi sedikit sampai akhirnya menjadi nol karena pengaruh gesekan. Dikatakan bahwa osilasinya teredam oleh gesekan dan disebut gerak harmonik teredam.

Persamaan gerak untuk sebuah partikel (benda) yang dikenai gaya pemulih linier dan gaya gesek sebanding dengan kecepatannya yaitu ,

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + kx = 0 \qquad (2.5)$$

dengan b dx/dt merupakan gaya redaman, dan

b = konstanta redaman (kg/det)

Dengan mensubstitusikan bentuk :

$$\frac{d^2x}{d^2t} = p^2, \qquad \frac{dx}{dt} = p$$

kedalam persamaan (2.5), maka diperoleh :

$$mp^2 + bp + k = 0 \qquad (2.6)$$

Penyelesaiannya dalam p adalah :

$$p = \frac{-b}{2m} \pm \left[\left(\frac{b}{2m} \right)^2 - \frac{k}{m} \right]^{1/2} \qquad (2.7)$$

dengan $\dfrac{k}{m} = \omega_o^2$

Pada penyelesaian ini terdapat tiga kasus yaitu :

a. Osilasi teredam kecil (Underdamped Oscillation)

$$\left(\frac{b}{2m} \right)^2 < \frac{k}{m}$$

dengan

$$\omega_o = \sqrt{\frac{k}{m}} \;,\quad \gamma = \frac{b}{2m} \;,\quad \omega_1 = \left(\omega_o^2 - \gamma^2 \right)^{1/2}$$

dan γ = koefisien redaman

$\dfrac{\omega_o}{2\pi}$ = frekuensi alamiah osilator tak teredam

Jadi ada dua penyelesaian untuk p yaitu :

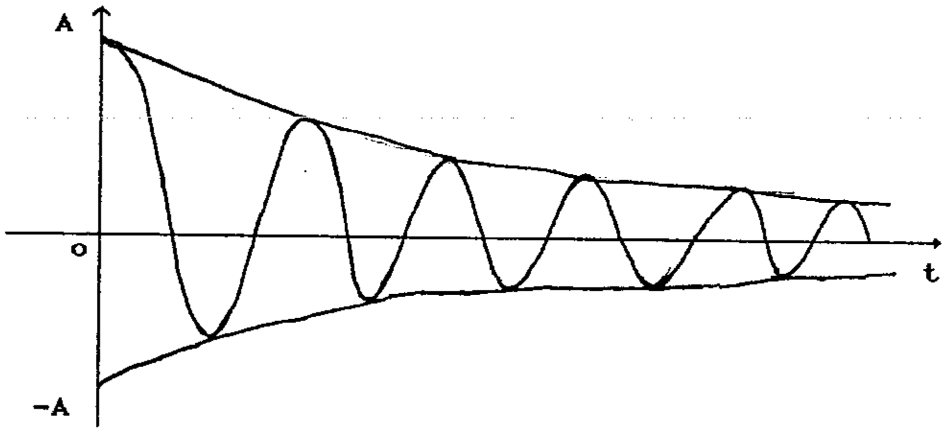
$$p = -\gamma \pm i\omega_1 \qquad (2.8)$$

$$x = C_1 e^{-\gamma t + i\omega t} + C_2 e^{-\gamma t - i\omega t}$$

$$C_1 = 1/2\ A\ e^{i\theta} \;; \quad C_2 = 1/2\ A\ e^{-i\theta}$$

$$x = A\ e^{-\gamma t} \operatorname{Cos} (\omega_1 t + \theta) \qquad (2.9)$$

Pada persamaan (2.9) ini, hubungan frekuensi osilasi $(\omega_1/2\pi)$ dengan amplitudo $Ae^{-\gamma t}$, menurun secara eksponensial terhadap waktu



Gambar 2.2. Gerak Osilator Harmonik teredam

Konstanta A dan θ tergantung pada syarat awal. Frekuensi osilasi berkurang tanpa redaman. Penyelesaian di atas dapat juga berbentuk :

$$x = e^{-\gamma t}(B_1 \operatorname{Cos} \omega_1 t + B_2 \operatorname{Sin} \omega_1 t) \qquad (2.10)$$

b. Osilasi Teredam Besar (Overdamped Oscillation)

$$\left(\frac{b}{2m}\right)^2 > \frac{k}{m}$$

Sehingga,

$$(\omega_o^2 - \gamma^2)^{1/2} = i\alpha \text{ , dengan } \alpha = \sqrt{\gamma^2 - \omega_o^2}$$

Sehingga persamaannya menjadi

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \alpha^2 X_t = 0 \qquad (2.11)$$

dengan

$$X_t = e^{\gamma t} X(t)$$

Penyelesaiannya : $X_t = A' \exp(\alpha t) + B' \exp(-\alpha t)$

$$X(t) = X_t \, e^{-\gamma t} \tag{2.12}$$

$$X_t = A' \exp\left[(\alpha - \gamma)t\right] + B' \exp\left[-(\alpha + \gamma)t\right]$$

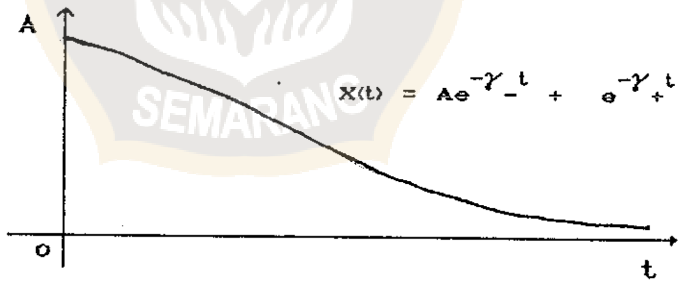
$$X_t = A' \exp\left[-(\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_o^2})t\right] + B' \exp\left[-(\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_o^2})t\right]$$

Karena, $\left[-(\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_o^2})t\right] > \left[-(\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_o^2})t\right] \equiv \gamma_- > 0$

Maka X(t) merupakan gabungan dua fungsi eksponen turun yang mengecil dengan cepat dan lambat, dalam hal ini tidak terjadi osilasi ; X(t) menuju nol dalam waktu yang cukup lama dengan tetapan peluruhan (decay),

$$\gamma_- = \gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_o^2} \quad \text{yang kecil}$$

grafiknya,



Gambar 2.3. Gerak osilator harmonik teredam lampau

c. Osilasi Teredam Kritis ($\gamma = \omega_o$)

$$\frac{d^2 X_t}{dt^2} = 0$$

Penyelesaiannya adalah $X_t = A_t + B$

Gambar 2.4. Gerak osilator harmonik teredam kritis

2.1.3. Faktor Kualitas Gerak Harmonik Sederhana Teredam

Faktor kualitas (Q) dari sistem osilator didefenisikan sebagai,

$$Q = \frac{\text{Energi yang disimpan /putaran}}{\text{Energi yang hilang /radian frekuensi angular}}$$

$$= 2\pi \times \frac{\text{Energi tersimpan /putaran}}{\text{Energi yang hilang / putaran}}$$

$$= \frac{2\pi E}{p/\nu}$$

$$= \frac{E}{P/\omega}$$

dengan P adalah daya.

Untuk osilator harmonik ($\omega_o t \gg 1$)

$$Q \cong \frac{E}{E/\omega t} \approx \omega_o t \qquad (2.15)$$

Terlihat bahwa nilai $\omega_o t$ adalah menyatakan pengukuran yang baik dari ketiadaan redaman sebuah osilator. $\omega_o t$ yang tinggi atau Q yang tinggi berarti bahwa osilator tersebut teredam kecil. (Berkeley Physics Course)

2.2. Osilasi Paksaan (Forced Oscillation)

2.2.1. Osilasi Paksaan dan Resonansi

Sejauh ini, yang dimaksud dengan osilasi benda secara alamiah adalah osilasi yang terjadi bila benda disimpangkan dan kemudian dilepaskan. Tanpa meninjau gaya gesekannya. Sebagai contoh, bandul matematis yang disimpangkan, jika tidak ada gesekan maka akan terus berosilasi, ataupun benda yang diikatkan pada pegas.

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0$$

dengan frekuensi alamiahnya $\omega = 2\pi\nu\sqrt{\frac{k}{m}}$

Tetapi pada kenyataannya akan selalu ada gaya gesekannya, walaupun sangat kecil, sehingga tidak mungkin bandul ataupun benda yang diikatkan pada pegas tersebut akan terus berosilasi. Jika ditinjau gaya gesekannya sebesar $b\frac{dx}{dt}$ maka,

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + kx = 0$$

frekuensinya menjadi $\omega' = 2\pi\nu' = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{b}{2m}\right)^2}$ (2.16)

Keadaannya akan menjadi lain bila sistem dikenai gaya eksternal yang berosilasi. Seperti getaran jembatan oleh tentara yang berbaris di atasnya, getaran sangkar motor karena adanya impuls periodik yang ditimbulkan oleh ketidakteraturan tangkai porosnya, dan getaran garpu tala jika dihadapkan pada gaya periodik dari gelombang bunyi. Osilasi semacam inilah yang disebut dengan osilasi paksaan (forced oscillation). Frekuensi osilasi yang dipaksa ini sama dengan frekuensi gaya eksternalnya dan bukan frekuensi alamiah benda. Meskipun demikian, tanggapan atau respon benda bergantung kepada hubungan antara frekuensi alamiah dan frekuensi paksaannya. Impuls-impuls kecil yang diberikan berturut-turut dengan frekuensi yang tepat dapat menghasilkan osilasi dengan amplitudo yang besar.

Persamaan gerak osilator terpaksa diperoleh dari hukum gerak kedua (Newton). Pada osilasi paksaan disamping gaya pemulih (restoring force), $-kx$ dan gaya peredam $-bdx/dt$, masih ada gaya lain yang bekerja yaitu gaya eksternal yang berosilasi (berbentuk sinusoidal) misalkan $F_m \cos \omega'' t$. Gaya ini bekerja pada benda sehingga persamaan geraknya menjadi,

$$F_{net} = F_s + F_f + F_d$$

dengan , $F_s = -kx$ = gaya pemulih (restoring force)

$F_f = -b\, dx/dt$ = gaya peredam (friction force)

$$F_d = F_m \cos \omega'' t = \text{gaya pemicu (driven force)}$$

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + kx = F_m \cos \omega'' t \qquad (2.18)$$

Untuk menyelesaikan persamaan differensial linier tak homogen ini digunakan teorema sebagai berikut :

"Jika $X_i(t)$ adalah solusi persamaan differensial linier tak homogen , dan $X_h(t)$ adalah solusi persamaan differensial linier homogen , maka $X(t) = X_i(t) + X_h(t)$ juga merupakan solusi persamaan differensial tak homogen (Keith R. Symon, 1971)"

2.2.2. Perlakuan Analitik Terhadap Osilasi Paksaan

Kasus yang paling penting adalah jika gaya yang bekerja berbentuk sinusoidal. Terdapat banyak penyelesaian untuk persamaan (2.18) di atas. Tetapi dari tinjauan fisis diharapkan adalah satu penyelesaian yang merupakan osilasi steady dari koordinat-x pada frekuensi yang sama seperti gaya yang bekerja.

$$x = A \sin (\omega'' t - \emptyset) \qquad (2.19)$$

Dari persamaan ini dapat dikembangkan dengan mendifferensialkan dua kali terhadap t,

$$x = A\,(\text{Sin}\ \omega''t.\ \text{Cos}\ \emptyset - \text{Cos}\ \omega''t.\text{Sin}\ \emptyset\,)$$

$$dx/dt = \omega''A\ (\ \text{Cos}\ \omega''t.\ \text{Cos}\emptyset + \text{Sin}\ \omega''t.\ \text{Sin}\ \emptyset\,)$$

$$d^2x/dt^2 = -\omega''^2 A\ (\ \text{Sin}\ \omega''t.\ \text{Cos}\ \emptyset - \text{Cos}\ \omega''t.\ \text{Sin}\ \emptyset\,)$$

dan dengan mensubstitusikan persamaan ini ke persamaan (2.18), diperoleh ,

$$-\omega''^2 A\ (\text{Sin}\ \omega''t.\ \text{Cos}\ \emptyset - \text{Cos}\ \omega''t.\text{Sin}\ \emptyset\,) + (b\omega''/m)\ A\ (\text{Cos}\ \omega''t.\ \text{Cos}\ \emptyset + \text{Sin}\ \omega''t.\text{Sin}\ \emptyset\,) + \omega^2 A(\text{Sin}\ \omega''t.\ \text{Cos}\emptyset - \text{Cos}\ \omega''t.\ \text{Sin}\ \emptyset).$$

$$= f\ \text{Cos}\ \omega''t$$

dengan $f = F/m$

$$[(\omega^2 - \omega''^2)\text{Cos}\ \emptyset + (b\omega''/m)\ \text{Sin}\ \emptyset\,]\ \text{Sin}\ \omega''t - [(\omega''^2 - \omega^2)\ \text{Sin}\ \emptyset + (b\omega''/m)\ \text{Cos}\ \emptyset - (f/A)\text{Cos}\ \omega''t\,] = 0 \qquad (2.20)$$

Saat $t = \pi/2\omega''$, $\text{Cos}\ \omega''t = 0$ dan $\text{Sin}\ \omega''t = 1$.

Karena itu , $[(\omega^2 - \omega''^2)\ \text{Cos}\ \emptyset + (b\omega''/m)\text{Sin}\ \emptyset\,] = 0$

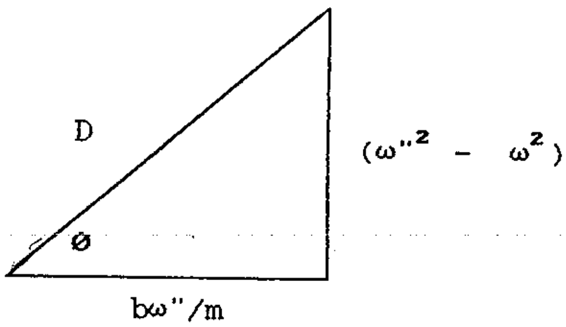
$$\frac{\text{Sin}\ \emptyset}{\text{Cos}\ \emptyset} = \frac{\omega''^2 - \omega^2}{b\omega''/m} = \tan\ \emptyset \qquad (2.21)$$

Saat $t = 0$, $\text{Sin}\ \omega''t = 0$, $\text{Cos}\ \omega''t = 1$.

Karena itu pernyataan dalam kurung kedua sama dengan nol.

$$f/A = (\omega''^2 - \omega^2)\sin\varnothing + (b\omega''/m)\,\mathrm{Cos}\,\varnothing. \qquad (2.22)$$

Fase.



Sehingga persamaan (2.22) dapat ditulis,

$$\frac{f}{A} = \frac{(\omega''^2 - \omega^2)^2 + b^2\omega''^2/m^2}{D}$$

$$= D$$

$$A = f/D$$

dengan $D = \sqrt{(\omega''^2 - \omega^2)^2 + \left(\frac{b\omega''}{m}\right)^2}$ (2.23)

Jika hasil persamaan (2.23) dimasukkan ke persamaan (2.19), maka diperoleh harga simpangannya :

$$x = \frac{f}{D}\,\mathrm{Sin}\,(\omega''t - \varnothing) \qquad (2.24)$$

(Khanna ,1983)

2.2.3. Pengaruh Redaman Pada Amplitudo Osilasi Paksaan

Pada persamaan di atas diperoleh :

$$A = \frac{f}{D} = \frac{f}{\sqrt{(\omega''^2 - \omega^2)^2 + (b\omega''/m)^2}}$$

terlihat bahwa A tergantung pada hubungan ω'' dan ω.

terlihat bahwa A tergantung pada hubungan ω'' dan ω. Amplitudonya mencapai maksimum saat $\omega'' = \omega$ $(\omega''/\omega = 1)$.

$$A_m = \frac{f}{b\omega''/m} = \frac{fm}{b\omega''} \qquad (2.25)$$

Kasus inilah yang disebut sebagai **amplitudo resonansi**. Frekuensi saat amplitudo maksimum disebut frekuensi amplitudo resonansi ω'', yang besarnya

$$\left.\frac{dA}{d\omega}\right|_{\omega = \omega''} = 0$$

$$\omega = \omega'' = (\omega^2 - 2\gamma^2)^{1/2} \qquad (2.26)$$

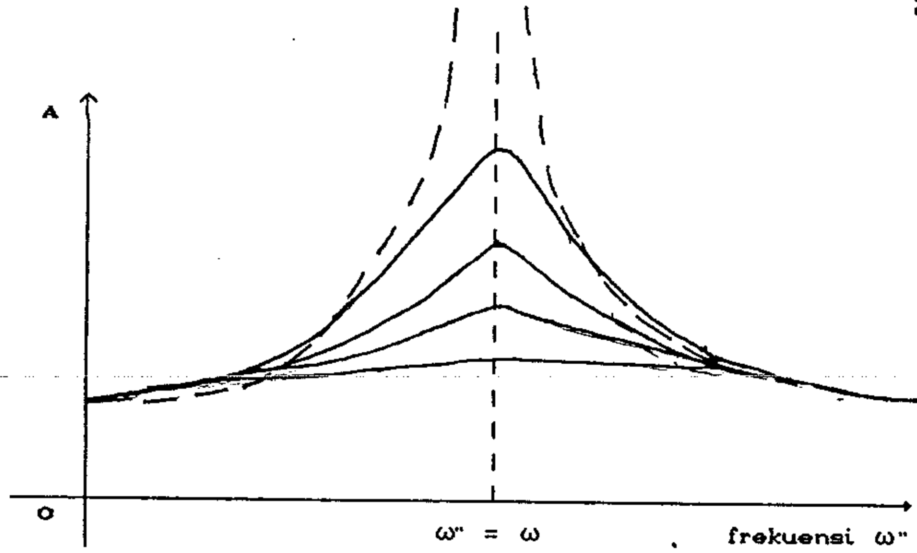
dengan $\gamma = b/2m$,

yang menyatakan bahwa koefisien redaman menurun dengan meningkatnya frekuensi resonansi dan dalam limit $\gamma \longrightarrow 0$, $\omega'' \longrightarrow \omega$, merupakan frekuensi alamiah osilator bebas. Jika redaman sangat kecil, dengan teorema binomial ω'' dapat disederhanakan menjadi,

$$\omega'' = \omega \left(1 - \frac{1}{2}\frac{2\gamma^2}{\omega^2} + \ldots \right)$$

$$\omega'' \simeq \omega - \frac{\gamma^2}{\omega} \qquad (2.27)$$

yang merupakan frekuensi resonansi osilator pemicu.



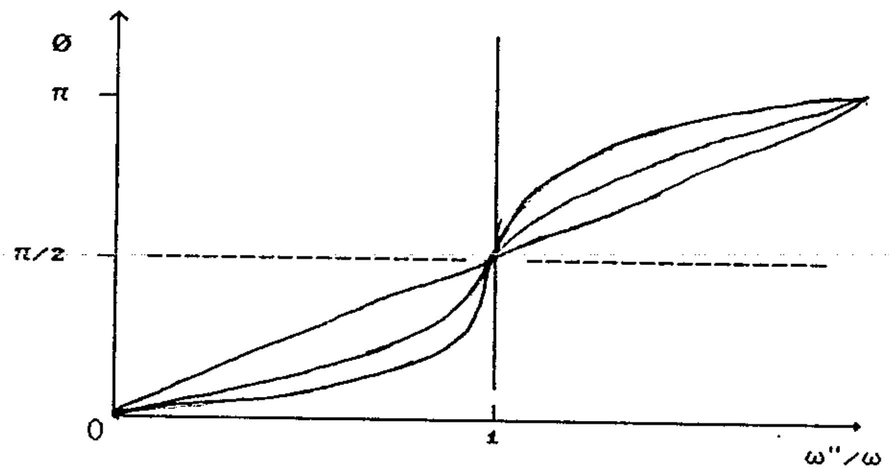
Gambar. 2.5. Kurva yang menunjukkan pengaruh redaman pada amplitudo osilasi paksaan

2.2.4. Pengaruh Redaman Pada Phase Osilasi Paksaan

Dari persamaan sebelumnya terlihat bahwa sudut fase tergantung pada nilai b, ω" dan ω pada keseluruhan syarat fisis sistim.

$$\tan \emptyset = \frac{\omega''^2 - \omega^2}{b\omega''/m}$$

Ø menyatakan perbedaan fase antara gaya pemicu F dan gerak hasil X yaitu menyatakan sebuah delay antara aksi dan responnya.



Gambar. 2.6. Sudut phase sebagai fungsi frekuensi

Pada gambar di atas saat $\emptyset = 0$ dan $\omega = 0$ meningkat menjadi $\emptyset = \pi/2$, untuk ($\omega = \omega_0$) dan mencapai $\emptyset = \pi$ untuk $\omega \approx \infty$, merupakan frekuensi yang sangat tinggi, osilasi sistem adalah 180° di luar fase dengan gaya pemicu. Untuk berbagai frekuensi eksternal, sudut fase $\emptyset$ adalah nol saat redaman b sangat besar.

Ini berarti bahwa gaya dan simpangan di luar fase dengan $\pi/2$, karena gaya sebanding dengan Cos $\omega''t$ dan simpangannya terhadap Sin $\omega''t$.

Pada sisi lain jika redaman tidak ada ($b = 0$), $\emptyset$ bernilai $-\pi/2$ atau $+\pi/2$. Untuk $\emptyset = -\pi/2$ merupakan frekuensi gaya eksternal di bawah resonansi, dan $\emptyset = +\pi/2$ merupakan frekuensi gaya eksternal di atas resonansi. Karena itu x sebanding dengan Sin $(\omega''t \pm \pi/2) = \pm$ Cos $\omega''t$, dan berada di dalam atau di luar fase 2π dengan gaya pemicu.

2.2.5. Tenaga yang dihasilkan dalam osilasi paksaan

Dalam sebuah getaran luar yang diperkuat, usaha yang dilakukan sebanding dengan hasil dari gaya dan simpangan dimana daya yang dipakai atas kecepatan menghasilkan tenaga. Gaya periodiknya adalah

$$F = F_o \cos \omega''t.$$

dan simpangannya diberikan oleh

$$X = a \sin (\omega''t - \emptyset)$$

Tenaga yang dihasilkan untuk simpangan kecil dx adalah

$$E = \int F\, dx$$

$$= \int F_o \cos \omega''t\, [a.\cos (\omega''t - \emptyset).\ d(\omega''t)]$$

Sedangkan tenaga yang dihasilkan per putaran gerak,

$$E = F_o\, a \int_0^{2\pi} \cos \omega''t.\ \cos (\omega''t - \emptyset)\ d(\omega''t)$$

Karena $\cos (\omega''t - \emptyset) = \cos \omega''t.\ \cos \emptyset + \sin \omega''t.\sin \emptyset$

$$E = F_o\, a \int_0^{2\pi} \cos \omega''t\ (\cos \omega''t.\cos \emptyset + \sin \omega''t.\sin \emptyset) d(\omega''t)$$

$$E = F_o.a \cos \emptyset \int_0^{2\pi} \cos^2 \omega''t.\ d(\omega''t) +$$

$$F_o\, a \sin \emptyset \int_0^{2\pi} \cos \omega''t \sin \omega''t\ d(\omega''t).$$

$$E = F_o.\ a.\ \cos \emptyset \int_0^{2\pi} (1 + \cos 2\omega''t)/2\ d(\omega''t) +$$

$$F_o\, a \sin \emptyset \int_0^{2\pi} (\sin 2\omega''t)/2\ \ d(\omega''t)$$

$$= Fo.a\ .Cos\ \emptyset\ [\omega''t/2]_{o}^{2\pi} + Fo\ a\ Sin\ \emptyset\ [0]$$

$$= Fo\ a\ Cos\ \emptyset\ .[\pi]$$

$$E = \pi\ Fo.a.\ Cos\ \emptyset \qquad (2.27)$$

2.2.6. Pemborosan Daya (Dissipasi Daya) - Kuat Resonansi yang Diperlakukan Secara Matematika

Bagaimana cara mempertahankan osilasi terhadap redaman (b) yang berbeda dipengaruhi oleh laju tenaga yang dihasilkan, hal ini dikenal dengan **dissipasi daya** dan tergantung pada hubungan fase antara gaya yang mempengaruhi dan osilasi paksaan. Daya mekanik tersebut adalah hasil dari gaya dan kecepatan, Jika gaya persatuan massa adalah f Cos ω"t dan kecepatan **v** diperoleh dengan mendifferensialkan persamaan (2.24).

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{f\omega''}{D}\ Cos\ (\omega''t - \emptyset)$$

$$= f.\ \frac{Cos\ \emptyset}{b\ /\ m}\ .\ Cos\ (\omega''t - \emptyset) \qquad (2.28)$$

Daya yang dihasilkan adalah gaya yang bekerja dikalikan dengan kecepatan.

$$P = f.Cos\ \omega''t\ .\ dx/dt$$

$$= f.\ Cos\ \omega''t\ (f.m.Cos\ \emptyset\ /b).COs\ (\omega''t - \emptyset)$$

$$= \frac{f^2.m.\ Cos\ \emptyset}{2b}\ .2.\ Cos\ \omega''t.\ Cos\ (\omega''t - \emptyset)$$

$$= \frac{f^2.m.\ Cos\ \emptyset}{2b}.2.\ Cos\ \omega''t(Cos\ (\omega''t.Cos\ \emptyset$$

$$+ Sin\ \omega''t.Sin\ \omega''t\ .Sin\ \emptyset)$$

$$= \frac{f^2\ m.Cos\ \emptyset}{2b}\left[2.\ Cos^2\omega''t\ Cos\ \emptyset\ +\ Sin\ \ \omega''t.Cos\ \omega''t.Sin\ \emptyset\right]$$

$$= \frac{f^2.m.Cos\ \emptyset}{2b}\left[2\ Cos^2\omega''t.Cos\ \emptyset - Cos\ \emptyset + 2\ Cos\ \omega''t.Sin\ \omega''t.\right.$$

$$\left.Sin\ \emptyset + Cos\ \emptyset\right]$$

$$= \frac{f^2.m.Cos\ \emptyset}{2b}\left[(2\ Cos^2\omega''t.\ -\ 1).Cos\ \emptyset + (Sin\ 2\omega''t.Sin\ \emptyset)\ +\right.$$

$$\left.Cos\ \emptyset\right]$$

$$= \frac{f^2.m.Cos\ \emptyset}{2b}\left[Cos\ 2\omega''t.Cos\ \emptyset + Sin\ 2\omega''t.Sin\ \emptyset + Cos\ \emptyset\right]$$

$$= \frac{f^2.m.Cos\ \emptyset}{2b}\left[Cos\ (2\omega''t\ -\ \emptyset\ ) + Cos\ \emptyset\right] \qquad (2.29)$$

Nilai rata - rata hubungan pertama untuk periode yang lengkap adalah nol, maka daya rata-rata yang dihasilkan adalah :

$$P_{rata-rata} = \frac{f\ .m.Cos^2\emptyset}{2b} \qquad (2.30)$$

Jika $\emptyset = \pi/2$, $P_{rata-rata} = 0$

$\emptyset = 0$ (resonansi) , $P_{rata-rata} = P_{maks} = \dfrac{f^2.m}{2b}$ (2.31)

Persamaan ini berhubungan erat dengan **kuat resonansi.** Karena redaman mempunyai pengaruh daya yang cukup saat mendekati resonansi. Dengan menyatakan A sebagai fraksi amplitudo maksimum A_m, diperoleh

$$\frac{A}{A_m} = \frac{b\omega''/m}{\sqrt{(\omega''^2-\omega)^2 + (b\omega''/m)^2}} \qquad (2.32)$$

dengan cara yang sama, pernyataan daya rata-rata yang dihasilkan untuk mempertahankan osilasi dalam kasus resonansi adalah :

$$\frac{P_{rata\text{-}rata}}{P_{maks}} = \cos^2\emptyset \qquad (2.33)$$

dengan mensubstitusikan harga Cos Ø didapat,

$$\frac{P_{rata\text{-}rata}}{P_{maks}} = \frac{(b\omega''/m)^2}{(\omega''^2-\omega^2)^2 + (b\omega''/m)^2}$$

$$\text{Saat } \omega'' = \omega, \quad \frac{P_{rata\text{-}rata}}{P_{maks}} = 1$$

terdapat tenaga maksimum dalam osilasi paksaan dan pada frekuensi yang mendekati resonansi. Dan saat

$$\omega''^2 - \omega^2 = \pm\, b\omega''/m$$

$$(\omega'' - \omega)(\omega'' + \omega) = \pm\, b\omega''/m$$

$$(\omega'' + \omega \approx 2\omega''), \quad (\omega'' - \omega) = \pm\, b/2m$$

$$\frac{\omega''}{\omega} = 1 \pm \frac{b}{2m\omega} \qquad (2.34)$$

$$\frac{P_{rata\text{-}rata}}{P_{maks}} = \frac{4k^2.P^2}{8k^2.P^2} = \frac{1}{2} \qquad (2.35)$$

Rasio $b/2m\omega$ merupakan pengukuran **kuat resonansi**

2.2.7. Impedansi Mekanik dan Resonansi

Pada perrsamaan (2.28), diperoleh,

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{f\omega''}{D} \text{ Cos } (\omega''t - \emptyset)$$

Kuantitas D/ω'' disebut sebagai **impedansi mekanik sistem** dan dinyatakan dengan **Z_m**.

$$Z_m = D/\omega'' = \sqrt{(\omega'' - \frac{\omega^2}{\omega''}) + (b/m)^2}$$

Dengan mensubstitusikan **Z_m** ini ke persamaan kecepatan diperoleh :

$$v = \frac{f}{Z} \text{ Cos } (\omega''t - \emptyset).$$

Terlihat bahwa kecepatan sefase dengan gaya. Harga **v** yang terbesar selama beberapa periode gerak adalah f/Z dan disebut **kecepatan amplitudo (velocity amplitude)**.

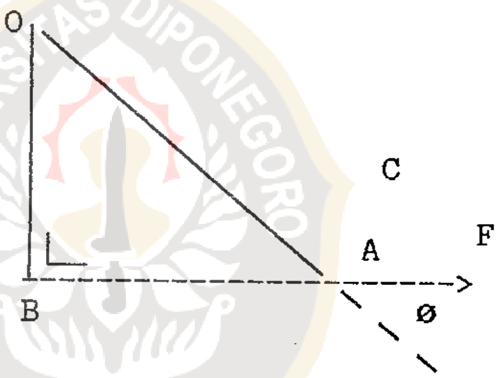
1. $b = 0$, tidak ada redaman ,dalam kasus tersebut $Z = \infty$, untuk $\omega'' = 0$ dan $\omega'' = \infty$. Dengan mengambil harga nol saat $\omega'' = \omega^2/\omega''$, frekuensi gaya yang bekerja sebanding dengan frekuensi alamiah sistim dan kecepatannya menjadi tak hingga dan disebut sebagai kejadian **'Resonance Catastrophe'** (Bencana

Resonansi).

2. Jika b berhingga (terdapat redaman), walaupun resonansi terjadi 'bencana resonansi' dapat dikurangi dan terbatas.

2.3. Teori Torka

Ketika gaya bekerja pada sebuah benda, benda tersebut tidak hanya bergerak dalam arah gaya tersebut, tetapi juga biasanya berputar kembali di sekitar sejumlah titik. Tinjau gaya F yang bekerja pada partikel A.



Andaikan bahwa pengaruh gaya tersebut menggerakan partikel di sekitar O. Eksperimen-eksperimen yang umum menyarankan keefektifan rotasi F meningkat dengan jarak tegak lurus (disebut lengan engkol) b = OB dari pusat rotasi O terhadap garis kerja gaya. Sebagai contoh saat membuka pintu, kita selalu mendorong atau menarik sejauh mungkin dari engsel dan menjaganya dalam arah dorongan atau tarikan tegak lurus pintu. Hal ini biasa disebut torka τ.

$$\tau = F \cdot b \quad \text{atau}$$

$$\text{Torka} = \text{Gaya x panjang lengan engkol}$$

Torka harus dinyatakan sebagai hasil kali satuan gaya dan satuan jarak. Dalam sistim SI torka dinyatakan sebagai Nm. Dari gambar terlihat bahwa, $b = r \sin \varnothing$ maka

$$\tau = F \cdot r \sin \varnothing$$