BAB II

OSILATOR KLASIK

Sebagai pembanding dari hasil-hasil kajian osilator kuantum, pada bagian ini akan dibahas secara singkat beberapa hal penting tentang osilator klasik.

Dipandang suatu partikel bermasa m yang terkopel oleh sebuah pegas dengan konstanta gaya $k = m\omega^2$, dimana ω merupakan kecepatan sudut osilator. Untuk deformasi kecil x, pegas akan mengerjakan gaya yang menurut Hooke diberikan oleh

$$F = -kx \tag{2.1}$$

Besar energi potensial osilator

$$V = \frac{1}{2} kx^2 \tag{2.2}$$

Hamiltoniannya

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 x^2 \tag{2.3}$$

Kaitan kanonik sistem dengan demikian

$$\dot{x} = \frac{\delta H}{\delta p}$$

$$= \frac{p}{m} \tag{2.4}$$

$$\dot{p} = -\frac{\delta H}{\delta x}$$

$$= -m\omega^2 x \tag{2.5}$$

dengan tanda titik satu di atas menunjukkan turunannya terhadap waktu. Menyulihkan p dalam persamaan (2.4) ke (2. 5) diperoleh

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0$$

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purposes of security, back-up and preservation. (http://eprints.undip.ac.id)

penyelesaiannya

$$x(t) = A \cos\omega t + B \sin\omega t$$

$$= x_A \cos(\omega t - \varphi) \qquad (2.6)$$

dengan

$$x = \sqrt{A^2 + B^2}$$

$$tg\varphi = \frac{B}{A} \qquad (2.7)$$

Bila pada keadaan awal ($t = t_o$) $x = x_o$ (dengan $x_o < x_A$), dan saat $\omega t - \omega t_o = \frac{\pi}{2}$, $p(t) = p_o$, maka persamaan (2.6) menjadi

$$x(t) = x_o \cos(\omega t - \omega t_o) + \frac{p_o}{\omega m} \sin(\omega t - \omega t_o) \qquad (2.8.a)$$

menilik persamaan (2.4) maka

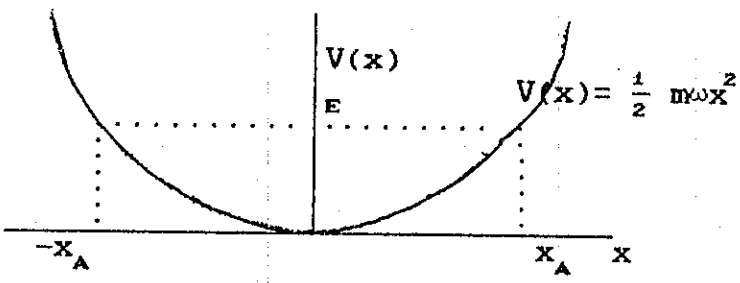
$$p(t) = -m\omega x_o \sin(\omega t - \omega t_o) + p_o \cos(\omega t - \omega t_o) \qquad (2.8.b)$$

energi total osilator karenanya

$$E = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 + \frac{1}{2} m\omega^2 x^2$$

$$= \frac{1}{2} m\omega^2 x_A^2 \qquad (2.9)$$

Karena x_A merupakan variabel yang malar (continuous Variable), nilai E juga demikian. Nilai terendah E adalah nol, yang bersesuaian dengan partikel diam ($x = p = 0$). Pada gambar (2.1) yang melukiskan



Gambar 2.1

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purposes of security, back-up and preservation. (http://eprints.undip.ac.id)

hubungan antara energi potensial dengan koordinat ruang x, ditunjukkan bahwa bila pada titik-titik potong antara garis V(x)=E dengan parabola V(x) ditarik garis sejajar V(x), maka perpotongannya dengan sumbu-x akan memberikan nilai x_A (amplitudo osilasi).

Memasukkan persamaan (2.9) ke (2.6) diperoleh

$$x(t) = \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}} \cos(\omega t-\varphi) \tag{2.10}$$

$$p(t) = -\sqrt{2mE} \sin(\omega t-\varphi) \tag{2.11}$$

yaitu

$$x_A = \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}} \tag{2.12}$$

2.1 Fungsi peluang

Menuliskan kembali persamaan (2.9) sebagai

$$E = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 + \frac{1}{2} m\omega^2 x_A^2$$

$$= \frac{1}{2} m\omega^2 x_A^2$$

maka

$$\dot{x} = \left(\frac{2E}{m} - \omega^2 x_A^2\right)^{1/2}$$

$$= \omega(x^2 - x_A^2)^{1/2} \tag{2.13}$$

yang berarti partikel diam pada kedua titik balik osilasi ($x= \pm x_A$)[1], kemudian bertambah cepat hingga mencapai titik kesetimbangan dan berkurang secara berangsur hingga

---

[1] Schiff, Quantum Mechanics.

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purposes of security, back-up and preservation. (http://eprints.undip.ac.id)

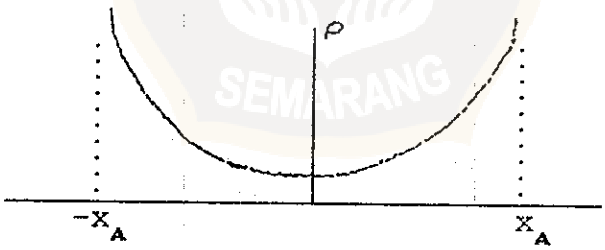
di titik baliknya. Tidak ada alasan bagi sebuah partikel untuk bergerak pada $|x| > |x_A|$, dengan kata lain ada pembatasan bagi gerak partikel sesuai dengan energi yang dimilikinya (persamaan 2.12).

Bila antara kedua titik osilasi diberikan titik-titik dengan selang sama, maka dari (2.13) akan dapat diketahui bahwa makin dekat osilator (partikel) dengan $|x_A|$, waktu tinggalnya makin lama. Mengingat (2.13), makin mendekati $|x_A|$ kecepatan osilator makin kecil, mudah dipahami bahwa peluang untuk mendapatkan partikel setiap saat berbanding terbalik dengan kecepatannya.[2]

$$\rho \sim |\dot{x}^{-1}|$$

$$\sim (x_A^2 - x^2)^{-1/2} \qquad (2.14)$$

Persamaan (2.14) secara intuitif diperlihatkan oleh gambar (2.2).



Gambar 2.2

---

[2] R. Shankar, Principal Quantum Mechanics, bab VII.

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purposes of security, back-up and preservation. (http://eprints.undip.ac.id)

2.2 Energi potensial dan kinetik rata-rata

Akan dicari sifat penting dari osilator harmonik yaitu rata-rata energi potensial dan kinetiknya dalam suatu selang waktu P. Bila rata-rata tersebut secara berurutan dinotasikan dengan <V> dan <K>, maka

$$\langle V\rangle = \frac{1}{P}\int_0^P V(t)dt \qquad (2.15)$$

$$\langle K\rangle = \frac{1}{P}\int_0^P K(t)dt \qquad (2.16)$$

dengan

$$K = \frac{p^2}{2m} \qquad (2.17)$$

$$V = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 \qquad (2.18)$$

Mengambil kembali persamaan (2.7)

$$x(t) = x_A\cos(\omega t-\varphi) \qquad (2.19)$$

$$\dot{x}(t) = -x_A\omega\sin(\omega t-\varphi) \qquad (2.20)$$

Menyulihkan persamaan (2.19) dan (2.20) ke (2.17) dan (2.18)

$$K = \frac{1}{2}mx_A\omega^2\sin^2(\omega t-\varphi)$$

$$V = \frac{1}{2}mx_A\omega^2\cos^2(\omega t-\varphi)$$

sehingga (2.15) dan (2.16) menjadi

$$\langle T\rangle = \frac{1}{2P}mx_A^2\omega^2\int_0^P\sin^2(\omega t-\varphi)dt$$

$$= \frac{1}{4}mx_A^2\omega^2$$

dan

$$\langle V\rangle = \frac{1}{2P}mx_A^2\omega^2\int_0^P\cos^2(\omega t-\varphi)dt$$

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purposes of security, back-up and preservation. (http://eprints.undip.ac.id)

$$= \frac{1}{2} m x_A^2 \omega^2$$

Jadi <V> = <T>. Energi total osilator harmonik dengan demikian

$$\langle E \rangle = \langle K \rangle + \langle V \rangle$$

$$= \frac{1}{2} m\omega^2 x_A^2$$

membandingkan dengan persamaan (2.9)

$$\langle E \rangle = E$$

dari kesamaan ini dapat disimpulkan bahwa energi total osilator harmonik adalah tetap.

Perlu dicatat bahwa kesamaan di atas berlaku hanya untuk osilator harmonik dan tidak demikian untuk osilator takharmonik.[3]

---

[3] C. Kittel, Mechanics, bab VII.

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purposes of security, back-up and preservation. (http://eprints.undip.ac.id)