

## LAMPIRAN I

### KAITAN KOMUTASI ANTARA OPERATOR MOMENTUM DENGAN POSISI

Dengan mengambil operator momentum

$$P_x = -i\hbar \frac{\delta}{\delta x} \quad (I.1)$$

dan mengingat cara kerja operator  $X$ , yaitu mengalikan suatu fungsi dengan  $x$  dari depan<sup>1</sup>, kaitan komutasi antara  $P_x$  dengan  $X$  dapat dicari. Menuliskan kaitan ini sebagai

$$\begin{aligned} [P_x, X] &= P_x X - X P_x \\ &= -i\hbar \frac{\delta}{\delta x} X + i\hbar X \frac{\delta}{\delta x} \end{aligned} \quad (I.2)$$

dan mengalikannya dari kiri dengan  $\varphi(x)$

$$\begin{aligned} [P_x, X]\varphi(x) &= -i\hbar \frac{\delta}{\delta x} X\varphi(x) + i\hbar X \frac{\delta}{\delta x} \varphi(x) \\ &= -i\hbar \frac{\delta}{\delta x} x\varphi(x) + i\hbar x \frac{\delta}{\delta x} \varphi(x) \\ &= -i\hbar \left( x \frac{\delta}{\delta x} \varphi(x) \right) - \varphi(x) \frac{\delta}{\delta x} x - x \frac{\delta}{\delta x} \varphi(x) \\ &= i\hbar \varphi(x) \end{aligned} \quad (I.3)$$

Kesimpulannya komutator dari  $P_x$  dengan  $X$  adalah

$$[P_x, X] = i\hbar$$

Dari definisi, karena  $[X, P_x] = -[P_x, X]$  (I.4)

$$[X, P_x] = -[P_x, X]$$

mudah dipahami bahwa komutator dari  $X$  dengan  $P_x$  adalah

$$[X, P_x] = -i\hbar \quad (I.5)$$

---

<sup>1</sup> Rojansky bab 1 hal 3

## LAMPIRAN II

### DEVIASI AKAR KUADRAT RATA-RATA (RMS DEVIATION)

Bila  $\langle A \rangle$  menunjukkan rata-rata besaran terukur A pada keadaan ternormalisasi  $|\varphi\rangle$ , yaitu

$$\langle A \rangle = \langle \varphi | A | \varphi \rangle \quad (\text{II.1})$$

besar deviasi rms  $\Delta A$  dapat dituliskan

$$\Delta A = \sqrt{\langle (A - \langle A \rangle)^2 \rangle} \quad (\text{II.2})$$

atau

$$\Delta A = \sqrt{\langle \varphi | (A - \langle A \rangle)^2 | \varphi \rangle} \quad (\text{II.3})$$

karena

$$\begin{aligned} \langle (A - \langle A \rangle)^2 \rangle &= \langle (A^2 - 2A\langle A \rangle + \langle A \rangle^2) \rangle \\ &= \langle A^2 \rangle - 2\langle A \rangle^2 + \langle A \rangle^2 \\ &= \langle A^2 \rangle - \langle A \rangle^2 \end{aligned} \quad (\text{II.4})$$

maka (II.2) menjadi

$$\Delta A = \sqrt{\langle A^2 \rangle - \langle A \rangle^2} \quad (\text{II.5})$$

### LAMPIRAN III

#### SIFAT JARING-JARING OPERATOR MOMENTUM

Mengingat representasi operator momentum dalam operator  $a$  dan  $a^+$ , yaitu

$$P_x = \frac{1}{\sqrt{2}} (a^+ - a)$$

sifat jaring-jaring unsur matrik (4.33) dapat diperoleh.

Untuk tujuan ini, operator  $(a^+ - a)^4$  difaktorkan

$$\begin{aligned} (a^+ - a)^4 &= a^+a^+a^+a^+ - a^+a^+a^+a - a^+a^+aa^+ - a^+aa^+a^+ - \\ &\quad aa^+a^+a^+ + a^+a^+aa + a^+aa^+a^+ + a^+aaa^+ + aa^+aa^+ \\ &\quad + aaa^+a^+ + aa^+a^+a - a^+aaa - aa^+aa - aaa^+a - \\ &\quad aaaa^+ + aaaa. \end{aligned}$$

Tampak bahwa walaupun jaring-jaring operator ini sama dengan operator  $X$ , gambar (4.3), dari persamaan (III.2) jelas bahwa suku-suku dengan jumlah faktor  $a$  ganjil, yang dalam jaring-jaring ini bersesuaian dengan jumlah langkah turun ganjil, akan bertanda negatif.

Penentuan positif atau negatifnya operator ini pada suatu fungsi dengan hanya memperhatikan hasil (III.2) saja belum cukup. Bila  $P$  berpangkat  $q$ ,  $1$  juga harus demikian. Hasilnya, hasil (III.2) masih harus dikalikan  $\pm 1$  atau  $\pm 1$  yang tergantung nilai  $q$ . Adapun aturan pemilihannya adalah sebagai berikut

1. Bila  $q$  genap

a. untuk  $q/2$  genap, dipilih pengali  $+1$ .

b. untuk  $q/2$  ganjil, dipilih pengali  $-1$ .

2. Bila  $q$  ganjil

a. untuk  $(q-1)/2$  genap, dipilih pengali  $+1$ .

b. untuk  $(q-1)/2$  ganjil, dipilih pengali  $-1$ .

