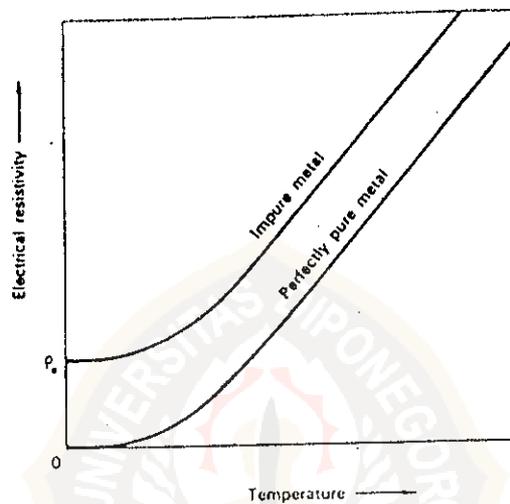


## BAB II

### TINJAUAN TEORI

#### 2.1. Hambatan Listrik Nol

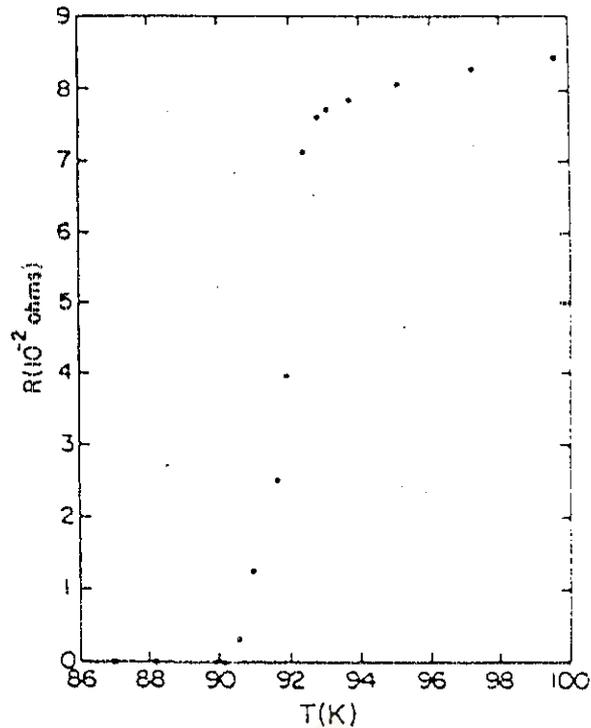
Hambatan listrik suatu bahan baik logam maupun paduan logam akan berkurang bila bahan tersebut didinginkan.



Gb. 2.1. Perubahan hambatan listrik logam terhadap temperatur.

Pada temperatur rendah, vibrasi termal dari atom-atom menurun dan frekuensi hamburan elektron konduksi karena tumbukan berkurang.

Penurunan hambatan listrik didapatkan mendekati linier sampai dengan temperatur 0 K (gamb. 2.1). Untuk logam dengan kemurnian sempurna, hambatan listrik akan mencapai nol jika temperatur menjadi nol mutlak.



ab. 2.2.<sup>(B)</sup> Grafik hambatan listrik terhadap perubahan temperatur dari senyawa  $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_{7-x}$

Tetapi hambatan listrik nol pada material sempurna hipotetis ini adalah bukan peristiwa superkonduktivitas. Material yang nyata tidak dapat sempurna dan mengandung pengotor, sehingga akan selalu menghasilkan " *resistivitas residu  $\rho_0$*  ".

Tetapi logam tertentu menampilkan perilaku yang khusus; jika mereka didinginkan hambatan listrik akan berkurang dengan cara normal, tetapi pada temperatur tertentu diatas nol mutlak tiba-tiba kehilangan hambatan listriknya (Gb. 2.2). Material ini dikatakan memasuki keadaan superkonduktif. Gejala superkonduktivitas pertama kali ditemukan oleh H Kamerlingh Onnes<sup>(6)</sup> pada tahun 1911 pada air raksa murni yang kehilangan hambatan listrik pada temperatur 4,3 K.

## 2.2. Konsekuensi Hambatan Listrik Nol<sup>(4)</sup>

Elektron-elektron pembawa arus dalam bahan superkonduktor tidak mengalami hambatan selama gerakannya, elektron-elektron ini disebut sebagai superelektron. Jika bahan superkonduktor dikenai medan listrik  $\vec{E}$ , percepatan superelektron dalam keadaan tunak adalah :

$$m \vec{v}_s = e \vec{E} \quad (2.1)$$

$\vec{v}_s$  = kecepatan superelektron

$m$  = massa superelektron

$e$  = muatan superelektron

Jika ada sejumlah  $n_s$  superelektron persatuan volume bergerak dengan kecepatan  $\vec{v}_s$ , maka rapat arus superelektron adalah

$$\vec{J}_s = n_s e \vec{v}_s \quad (2.2)$$

Dari persamaan (2.1) dan (2.2) didapatkan bahwa medan listrik menghasilkan kenaikan arus secara kontinu dengan laju penambahan diberikan oleh :

$$\dot{\vec{J}}_s = \frac{n_s e^2}{m} \vec{E} \quad (2.3)$$

Untuk mencapai persamaan yang menggambarkan medan magnet dari superkonduktor, digunakan persamaan Maxwell yang menghubungkan medan magnet dengan medan listrik dan arus :

$$\dot{\vec{B}} = -\nabla \times \vec{E} \quad (2.4)$$

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \dot{\vec{D}} \quad (2.5)$$

Arus yang mengalir mempengaruhi  $\vec{B}$ , tetapi tidak berpengaruh terhadap  $\vec{H}$  sehingga dalam superkonduktor pers. 2.5 digantikan dengan

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 (\vec{J}_s + \dot{\vec{D}}) \quad (2.6)$$

dimana  $J_s$  adalah rapat arus didalam logam. Dalam bahan superkonduktor, pergeseran arus  $\dot{\vec{D}}$  pada persamaan (2.6) diabaikan, sehingga persamaan tersebut menjadi

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}_s \quad (2.7)$$

Substitusi persamaan (2.3) ke dalam persamaan (2.4) memberikan

$$\dot{\vec{B}} = -\frac{m}{n_s e^2} \nabla \times \dot{\vec{J}}_s \quad (2.8)$$

dengan mengeliminasi  $\vec{J}_e$  dengan persamaan (2.7) didapatkan

$$\dot{\vec{B}} = - \frac{m}{\mu_0 n_e \epsilon_0^2} \nabla \times \nabla \times \dot{\vec{B}} \quad (2.9)$$

jika  $\alpha = \frac{m}{\mu_0 n_e \epsilon_0^2}$  maka

$$\dot{\vec{B}} = -\alpha \nabla \times \nabla \times \dot{\vec{B}}$$

dengan menggunakan hubungan<sup>(7)</sup>

$$\nabla \times \nabla \times \dot{\vec{B}} = \nabla (\nabla \cdot \dot{\vec{B}}) - \nabla^2 \dot{\vec{B}} \quad (2.10)$$

dan dari persamaan Maxwell  $\nabla \cdot \vec{B} = 0$  maka persamaan (2.9) akan menjadi

$$\dot{\vec{B}} = \alpha \nabla^2 \dot{\vec{B}}$$

atau 
$$\nabla^2 \dot{\vec{B}} = \frac{1}{\alpha} \dot{\vec{B}} \quad (2.11)$$

Kita misalkan dalam keadaan satu dimensi dengan medan magnet terapan seragam sebesar  $\vec{B}_0$  sejajar dengan tepi batang superkonduktor dan arah normal pada garis batas adalah  $x$ , sehingga persamaan (2.11) menjadi persamaan skalar :

$$\frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha} \vec{B} \quad (2.12)$$

penyelesaian dari persamaan ini adalah

$$\vec{B}(x) = B_0 \text{Exp} \left( \frac{-x}{\sqrt{\alpha}} \right) \quad (2.13)$$

dimana  $B(x)$  adalah rapat fluks pada jarak  $x$  didalam bahan dan  $B_0$  adalah harga  $\vec{B}$  diluar bahan. Hal ini mengandung arti bahwa  $\vec{B}$  akan lenyap secara eksponensial jika masuk kedalam bahan. Dengan kata lain, perubahan rapat fluks tidak menembus jauh melewati permukaan, sehingga pada jarak yang cukup didalam bahan rapat fluks berharga tetap tidak berubah terhadap waktu.

### 2.3. Teori London<sup>(4)</sup>

Persamaan (2.13) menggambarkan sifat-sifat magnetis dari konduktor sempurna akan tetapi tidak cukup untuk menggambarkan perilaku superkonduktor. Meissner efek memperlihatkan bahwa didalam superkonduktor rapat fluks tidak hanya konstan tapi harga konstan ini selalu nol, sehingga tidak hanya  $\vec{B}$  tapi  $\vec{H}$  sendiri lenyap dengan cepat pada bahan superkonduktor. F. dan H. London mengusulkan bahwa perilaku magnetis logam superkonduktif digambarkan dengan persamaan (2.11) diterapkan juga untuk  $\vec{B}$  sendiri :

$$\nabla^2 \vec{H} = \frac{1}{\alpha} \vec{H} \quad (2.14)$$

sehingga rapat fluks magnetis akan lenyap seperti  $\dot{\vec{H}}$  pada persamaan (2.13) yaitu

$$H(x) = H_0 \exp\left(\frac{-x}{\sqrt{\alpha}}\right)$$

Untuk memperoleh persamaan (2.14) maka pada persamaan (2.8) diganti  $\dot{\vec{H}}$  dengan  $\vec{H}$  sehingga

$$\vec{H} = \frac{-m}{n_s e^2} \nabla \times \vec{J}_s \quad (2.15)$$

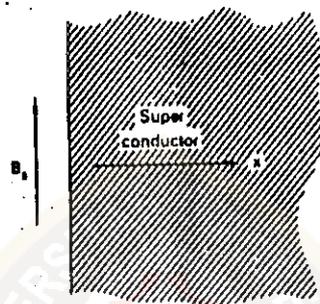
Persamaan ini dengan persamaan (2.3) yaitu

$$\vec{J}_s = \frac{n_s e^2}{m} \vec{E} \quad (2.3)$$

yang menggambarkan elektrodinamika dari arus super disebut dengan *persamaan London*. Persamaan (2.3) menggambarkan sifat tak resistif dari superkonduktor yaitu tidak terdapat medan listrik didalamnya kecuali terdapat perubahan arus dan persamaan (2.15) menggambarkan diamagnetisme dari superkonduktor.

Persamaan ini tidak diturunkan dari sifat dasar dan tidak menerangkan kejadian dasar dari superkonduktivitas. Persamaan London adalah pembatasan dari persamaan

elektromagnetis dan diperkenalkan sehingga perilaku yang disimpulkan dari hukum ini sesuai dengan eksperimen. London menyatakan bahwa persamaan (2.11) dapat diganti dengan persamaan (2.14). Persamaan ini digunakan untuk menentukan distribusi rapat fluks didalam superkonduktor jika dikenakan rapat fluks  $B_0$  sejajar dengan permukaan superkonduktor (Gb.2.3)



ab. 2.3 Medan magnet dikenakan sejajar pada batas superkonduktor.

Pada kasus ini digunakan bentuk satu dimensi dari (2.14)

$$\frac{\partial^2 B(x)}{\partial x^2} = -\frac{1}{\lambda^2} B(x)$$

dimana  $B(x)$  adalah rapat fluks pada jarak  $x$  didalam bahan.

Penyelesaian dari persamaan ini adalah :

$$B(x) = B_a \exp\left(-\frac{x}{\sqrt{\alpha}}\right) \quad (2.16)$$

dimana  $B_a$  adalah rapat fluks pada permukaan superkonduktor. Persamaan (2.16) menunjukkan bahwa rapat fluks lenyap secara eksponensial didalam superkonduktor, berkurang dengan faktor  $1/e$  pada jarak  $x = \sqrt{\alpha}$ . Jarak ini disebut dengan panjang penembusan London. Karena  $\alpha = m/\mu_0 n_e e^2$  sehingga panjang penembusan London diberikan oleh

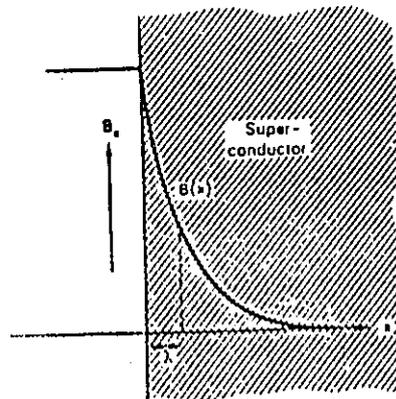
$$\lambda_L = \sqrt{m/\mu_0 n_e e^2} \quad (2.17)$$

Jika digantikan harga  $m$  dan  $e$  dengan massa dan muatan elektron dan diambil harga  $n_e$  sekitar  $4 \cdot 10^{28}/m^3$  ( yaitu konsentrasi elektron pada logam dianggap satu elektron konduksi per atom ), menghasilkan panjang penembusan London sekitar  $10^{-6}$  cm.

Persamaan (2.16) dapat ditulis dalam bentuk

$$B(x) = B_a \exp\left(-\frac{x}{\lambda_L}\right) \quad (2.18)$$

Kenyataan bahwa logam dalam keadaan superkonduktif tidak mengijinkan fluks magnet didalamnya, menghasilkan efek yang penting pada arus yang mengalir yaitu : arus tidak dapat mengalir didalam logam superkonduktif, tapi hanya mengalir pada permukaan. Untuk medan magnet seragam yang dikenakan pada superkonduktor dengan arah  $z$ , (gambar 2.4)



ab. 2.4 Variasi rapat fluks pada batas superkonduktor.

persamaan (2.7) menjadi  $-\frac{\partial B}{\partial x} = \mu_0 J_y$ . Dari persamaan

(2.18)  $\frac{\partial B}{\partial x}$  sama dengan  $-\frac{Ba}{\lambda_L} \exp\left(-\frac{x}{\lambda_L}\right)$ , sehingga

didapat

$$J_y = \frac{Ba}{\mu_0 \lambda_L} \exp\left(-\frac{x}{\lambda_L}\right)$$

yang dapat ditulis sebagai

$$J_y = J_a \exp\left(-\frac{x}{\lambda_L}\right)$$

dapat dilihat bahwa arus yang mengalir akan dekat dengan permukaan dan dalam daerah panjang penembusan.

Persamaan London (2.15) dan (2.3) dapat ditulis sebagai

$$\nabla \times \vec{J}_s = -\frac{1}{\mu_0 \lambda_L^2} \vec{B}$$

$$\vec{J}_s = \frac{1}{\mu_0 \lambda_L^2} \vec{E}$$

Persamaan London ini tidak menggantikan persamaan Maxwell tetapi hanya sebagai tambahan dengan syarat yang dipenuhi arus super.

Total rapat arus  $\vec{J}$  adalah jumlah dari arus normal dan arus super

$$\vec{J} = \vec{J}_n + \vec{J}_s$$

arus normal hanya mematuhi persamaan Maxwell dan hukum Ohm

$$\vec{J}_n = \sigma' \vec{E}$$

dimana  $\sigma'$  adalah konduktivitas. Sehingga persamaan khusus yang digunakan pada logam superkonduktif adalah

$$\vec{J} = \vec{J}_n + \vec{J}_s \quad (2.20)$$

$$\vec{J}_n = \sigma' \vec{E} \quad (2.21)$$

$$\nabla \times \vec{J}_s = -\frac{1}{\mu_0 \lambda_L^2} \vec{B} \quad (2.22)$$

$$\vec{J}_s = \frac{1}{\mu_0 \lambda_L^2} \vec{E} \quad (2.23)$$

Dari persamaan-persamaan ini dapat ditentukan distribusi medan dan arus pada bahan superkonduktif dibawah berbagai kondisi. Pada keadaan tunak, dimana medan dan arus tidak berubah terhadap waktu hanya terdapat arus super sehingga

$\vec{J}_n = 0$  dan hanya diperlukan persamaan (2.22) dan (2.23).

Yang akan menghasilkan

$$\nabla^2 \vec{B} = -\frac{1}{\lambda_L^2} \vec{B} \quad (2.24)$$

Perlu ditekankan bahwa bentuk persamaan (2.14) yang menggambarkan distribusi medan didalam superkonduktor hanyalah merupakan dugaan berdasar pada pengetahuan sifat-sifat superkonduktor, dan tidak diharapkan bahwa persamaan London yang dihasilkan adalah mutlak benar. Pada kenyataannya persamaan ini hanya merupakan pendekatan, meskipun untuk berbagai keperluan cukup akurat. Sebagai contoh persamaan London meramalkan panjang penembusan yang kecil, yang teramati secara eksperimen, tapi harganya lebih besar dari ramalan London dengan faktor dua kali.

#### 2.4. Temperatur Transisi Superkonduktif

Temperatur dimana superkonduktor kehilangan hambatan listrik disebut temperatur kritis dari superkonduktor atau temperatur transisi  $T_c$ . Temperatur transisi dari superkonduktor dapat ditentukan dengan alat ukur  $T_c$  yang bekerja berdasarkan efek Meissner.<sup>(9)</sup> Setiap bahan mempunyai  $T_c$  yang berbeda. Pada tabel 2.1 ditunjukkan temperatur kritis untuk unsur-unsur logam. Tidak semua logam menampilkan sifat superkonduktivitas, seperti tembaga, natrium dan besi tidak menunjukkan sifat superkonduktif pada temperatur rendah.

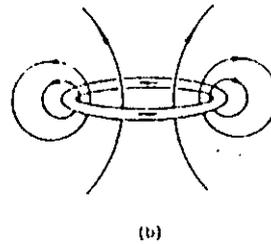
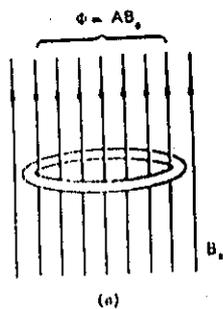
Tabel 2.1. Elemen-elemen superkonduktor<sup>(1)</sup>

Elemen	T <sub>c</sub> ( K )	H <sub>c</sub> (Amp m <sup>-1</sup> )
Aluminium	1,2	0,79 × 10 <sup>4</sup>
Americium fcc	1,1	
hcp	0,79	
Kadmium	0,52	0,22 × 10 <sup>4</sup>
Galium	1,1	0,41 × 10 <sup>4</sup>
Timah	7,2	6,40 × 10 <sup>4</sup>
Lutesium	0,1	2,80 × 10 <sup>4</sup>
Merkuri α	4,2	3,30 × 10 <sup>4</sup>
β	4,2	2,70 × 10 <sup>4</sup>
Molibdenum	0,9	
Niobium	9,3	
Osmium	0,7	0,50 × 10 <sup>4</sup>
Protaktinium	0,4	
Rhenium	1,7	1,60 × 10 <sup>4</sup>

## 2.5. Rangkaian tak-Resistif<sup>(1)</sup>

Rangkaian tertutup, berbentuk cincin dari logam superkonduktif memiliki sifat yang sangat penting yang dihasilkan dari hambatan nolnya. *Total fluks magnetik yang menembus rangkaian tertutup tak-Resistif tidak berubah selama rangkaian tetap tak-Resistif.*

Sebuah cincin logam didinginkan dibawah temperatur kritisnya dengan diterapkan medan magnet dengan fluks yang seragam B<sub>a</sub> (Gamb.2.5a). Jumlah fluks yang akan menembus cincin adalah  $\Phi = A B_a$  dimana A adalah luasan yang dibatasi oleh cincin.



### ab. 2.5. Rangkaian tak-Resistif

Jika medan terapan diubah maka berdasarkan hukum Lenz, akan timbul arus induksi yang mengelilingi cincin dengan arah yang menghasilkan fluks didalam cincin yang menghapus perubahan medan terapan. Jika medan diubah akan timbul emf ,  $-AdB_0/dt$ , dan arus induksi diberikan oleh

$$- A \frac{dB_0}{dt} = R i + L \frac{di}{dt} \quad (2.25)$$

dimana R dan L adalah total hambatan dan induktansi dari rangkaian. Pada rangkaian superkonduktif  $R = 0$  sehingga

$$- A \frac{dB_0}{dt} = L \frac{di}{dt} \quad (2.26)$$

sehingga

$$L i + A B_0 = \text{konstan} \quad (2.27)$$

yang sama dengan total fluks magnetik yang menembus rangkaian. Total fluks ini adalah konstan selama rangkaian

lelah tak-Resistif, sehingga arus induksi mengalir selamanya.

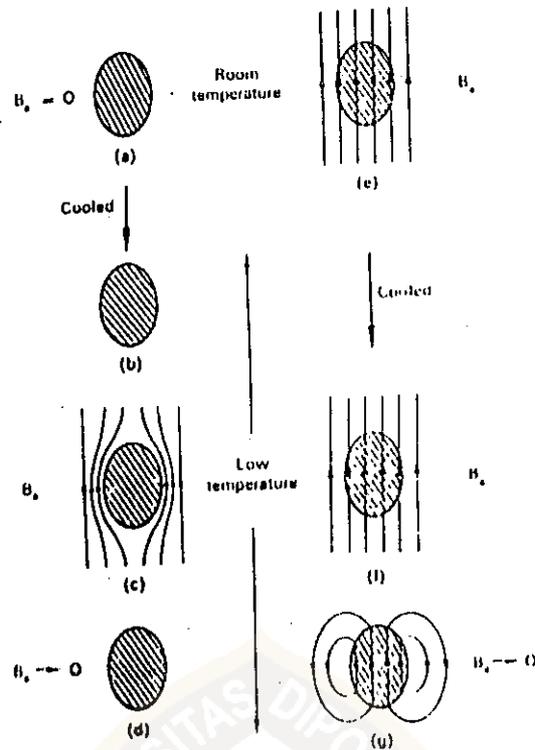
#### 2.6. Sifat-sifat Magnetis dari Konduktor Sempurna<sup>(1)</sup>

telah didapatkan bahwa rapat fluks didalam setiap titik dalam rangkaian tak-Resistif tidak berubah terhadap waktu yaitu

$$\vec{B} = 0 \quad (2.28)$$

Akibatnya distribusi fluks didalamnya akan tetap sama dengan ketika logam mulai menjadi tak-Resistif.

Dimisalkan bahwa logam kehilangan hambatan listrik tanpa medan magnet terapan. Jika sekarang diterapkan medan magnet luar maka akan timbul arus induksi pada permukaan logam yang disebut arus screening yang menghasilkan rapat fluks magnet didalam logam yang secara tepat dan berlawanan arah dengan rapat fluks medan magnet luar sehingga rapat fluks magnet didalam bahan tetap nol. Bahan yang tidak mengijinkan rapat fluks didalamnya ketika dikenakan medan magnet luar dikatakan menampakkan *diamagnetisme sempurna*. Jika medan magnet luar dinolkan bahan tetap tak termagnetisasi seperti dalm gambar 2.6 a - d. Jika medan magnet dikenakan pada saat bahan mulai didinginkan (qb.2.6e) sampai kehilangan hambatan listriknya (qb. 2.6f), maka kehilangan hambatan listrik ini tidak berpengaruh pada magnetisasi dan distribusi fluks tidak berubah.

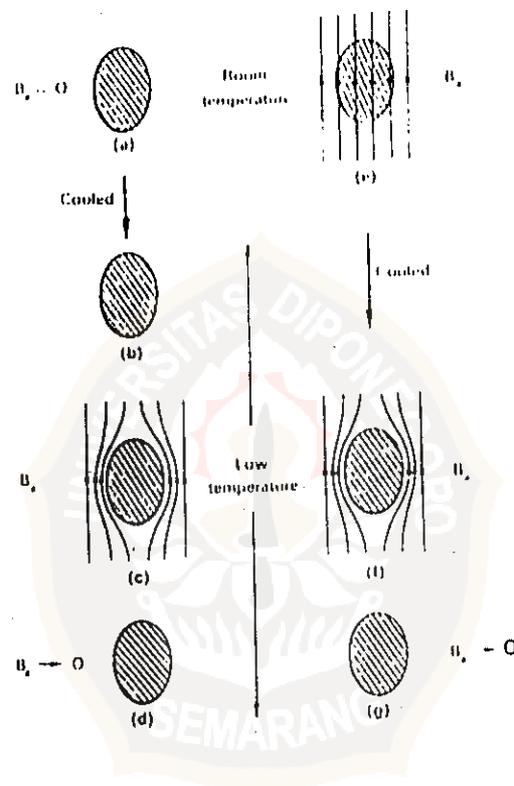


Ab. 2. 6. Perilaku magnetis dari konduktor sempurna, (a)-(b) Bahan kehilangan hambatan listrik tanpa dikenai medan magnet luar. (c) Medan magnet dikenakan pada bahan tak-Resistif. (d) Medan magnet dihilangkan. (e)-(f) Bahan menjadi tak-Resistif dengan dikenai medan magnet luar. (g) Medan magnet luar dihilangkan.

Jika medan magnet dihilangkan maka akan timbul arus induksi yang menjaga rapat fluks didalam bahan. Pada gambar 2.6 (c) dan (f) bahan mendapat perlakuan magnetik dan temperatur yang identik tetapi menghasilkan keadaan yang sama sekali berbeda (d) dan (g). Sehingga disimpulkan bahwa keadaan magnetisasi dari konduktor sempurna tidak ditentukan secara tunggal oleh kondisi luar tetapi tergantung pada urutan kondisi tersebut dikenakan.

## 2.7. Efek Meissner<sup>(4)</sup>

Logam hipotetis dengan hambatan listrik nol seperti dalam gambar 2.6. diatas kita sebut dengan "konduktor sempurna" yang berbeda dengan superkonduktor yang mempunyai sifat khusus.



Gb 2.7. Perilaku magnetis dari superkonduktor (a)-(b) Bahan menjadi tak-Resistif tanpa dikenai medan magnet. (c) Medan magnet dikenakan pada bahan superkonduktif. (d) Medan magnet dihilangkan. (e)-(f) Bahan menjadi superkonduktif dengan dikenai medan magnet. (g) Medan magnet dihilangkan.

Pada tahun 1933 Meissner dan Ochsenfeld menemukan bahwa superkonduktor mempunyai sifat lain dari konduktor sempurna yaitu : logam dalam keadaan superkonduktif tidak pernah mengijinkan rapat fluks magnetik berada didalamnya walaupun dikenai medan magnet luar. Sehingga didalam logam superkonduktif selalu dipenuhi :

$$\vec{H} = 0 \quad (2.29)$$

Gejala ini disebut dengan efek Meissner (Gb 2.7).

Hal ini terjadi karena ketika superkonduktor didinginkan dengan dikenai medan magnet, pada temperatur transisinya, akan timbul arus persisten yang mengelilingi permukaannya sehingga menghapus rapat fluks didalam bahan. Arus persisten juga akan timbul jika medan magnet dikenakan setelah bahan dalam keadaan superkonduktif.

## 2.8. Permeabilitas dan Suseptibilitas Superkonduktor<sup>(1)</sup>

Superkonduktor dikenai dengan rapat fluks luar sebesar  $B_0$  sejajar terhadap panjangnya, maka rapat fluks didalamnya adalah  $\mu_r B_0$ , dimana  $\mu_r$  adalah permeabilitas relatif bahan. Logam, selain yang ferromagnetik<sup>(?)</sup>, mempunyai permeabilitas relatif mendekati satu,  $\mu_r = 1$ . Sehingga rapat fluks didalamnya sama dengan  $B_0$ . Tetapi rapat fluks total didalam bahan superkonduktor adalah nol. Diamagnetik sempurna ini timbul karena sirkulasi arus screening pada permukaan,

sedemikian menghasilkan fluks didalam bahan yang besarnya sama tetapi berlawanan arah dengan penggunaan medan magnet. Diamagnetik sempurna dapat digambarkan dengan cara lain, karena sesungguhnya tidak dapat diamati arus screening yang timbul. Diamagnetik yang timbul merupakan perilaku magnetik khusus dari bahan superkonduktif dan secara sederhana bahan superkonduktor dikatakan mempunyai permeabilitas relatif  $\mu_r = 0$ , sehingga rapat fluks didalam bahan  $B = \mu_r B_0$  adalah nol. Kuat medan magnet diberikan oleh

$$H_0 = \frac{B_0}{\mu_0} \quad (2.30)$$

dan rapat fluks didalam bahan dinyatakan dalam kuat medan

$$B = \mu_0 (H_0 + I) \quad (2.31)$$

dimana  $I$  adalah magnetisasi bahan. Karena dalam bahan superkonduktor  $B = 0$  maka magnetisasi bahan superkonduktor :

$$I = -H_0 \quad (2.32)$$

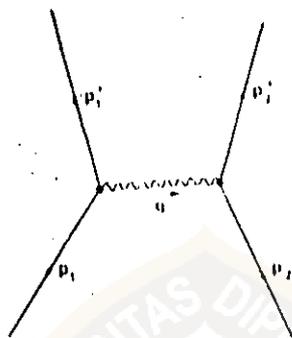
dan suseptibilitas magnetis yaitu perbandingan magnetisasi bahan terhadap kuat medannya adalah

$$\chi = -1 \quad (2.33)$$

## 2.9. Teori Bardeen-Cooper-Schrieffer<sup>(4)</sup>

### 2.9.1. Interaksi Elektron-fonon

Teori mikroskopik elektron-phonon diusulkan oleh Fröhlich pada tahun 1950, yang menyatakan bahwa interaksi elektron-phonon dapat mengkopel dua elektron seolah-olah mempunyai interaksi secara langsung.



Gb 2.8. Penggambaran secara skematis dari interaksi elektron-elektron yang dihubungkan oleh fonon.

Interaksi tersebut dapat digambarkan secara skematis dalam gambar 2.8. Pada proses emisi fonon momentum adalah kekal sehingga :

$$\vec{p}_1 = \vec{p}_1' + \vec{q} \quad (2.34)$$

dimana  $\vec{q}$  = momentum fonon, besarnya  $|\vec{q}| = \frac{h \nu_q}{s}$  dengan  $\nu_q$  = frekuensi fonon dan  $s$  = kecepatan suara.

Pada proses absorpsi fonon berlaku

$$\vec{p}_2 + \vec{q} = \vec{p}_2' \quad (2.35)$$

sehingga 
$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}_1' + \vec{p}_2' \quad (2.36)$$

Meskipun energi adalah kekal selama proses antara keadaan awal dan keadaan akhir tetapi antara emisi fonon dengan keadaan intermediet energi tidak kekal karena prinsip ketaktentuan menyatakan  $\Delta E \cdot \Delta t \approx \hbar$ . Demikian pula diantara keadaan intermediet dengan proses absorpsi fonon. Proses semacam ini dimana energi adalah tidak kekal disebut dengan proses virtual.

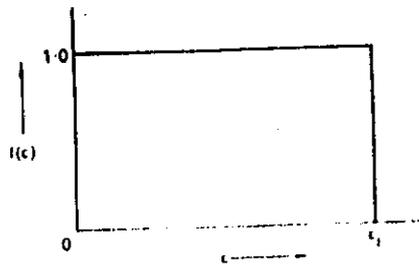
### 2.9.2. Pasangan Cooper

Keholehjian sebuah eigen state ditempati oleh sebuah elektron diberikan oleh distribusi Fermi-Dirac

$$f(\epsilon) = \frac{1}{e^{(\epsilon - E_F)/kT} + 1}$$

dimana  $E_F$  adalah energi Fermi. Pada temperatur nol mutlak, fungsi distribusi Fermi-Dirac mengambil bentuk fungsi undak seperti pada gambar 2.9, dan titik-titik yang menggambarkan momentum dari elektron pada ruang momentum tiga dimensi menempati bola dengan jari-jari  $p_f$ , disebut sebagai "lautan Fermi" dimana

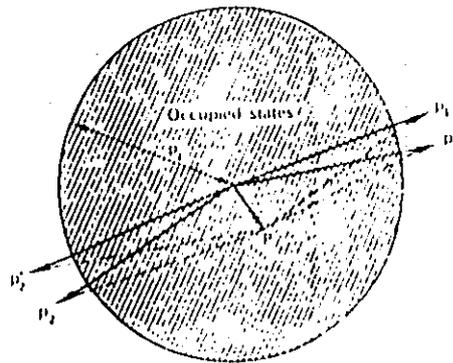
$$p_f = \sqrt{2m E_f}$$



ab. 2.9. Kebolehjadian bahwa keadaan kuantum dengan energi kinetik  $\epsilon$  ditempati oleh sebuah elektron untuk logam normal pada temperatur nol mutlak.

Jika 2 elektron ditambahkan ke logam pada temperatur nol mutlak maka mereka dipaksa oleh prinsip Pauli untuk menempati keadaan momentum  $p > p_f$  seperti diperlihatkan pada gambar 2.10, dimana  $p_f$  = momentum fermi. Cooper mengusulkan bahwa pada kondisi tersebut terdapat gaya tarik sehingga terdapat suatu ikatan dengan total energi  $< 2E_f$ . Ditinjau kasus untuk dua elektron tak berinteraksi dengan momentum  $\vec{p}_1$  dan  $\vec{p}_2$ . Fungsi gelombang dua-elektronnya adalah  $\phi(x_1, y_1, z_1, \vec{p}_1, x_2, y_2, z_2, \vec{p}_2)$  yang menentukan kebolehjadian sebuah elektron dengan momentum  $\vec{p}_1$  di  $(x_1, y_1, z_1)$  sedang sebuah elektron dengan momentum  $\vec{p}_2$  di  $(x_2, y_2, z_2)$  adalah produk dari dua fungsi gelombang elektron-tunggal  $\psi(x_1, y_1, z_1, \vec{p}_1)$  dan  $\psi(x_2, y_2, z_2, \vec{p}_2)$  atau singkatnya

$$\phi(\vec{p}_1, \vec{p}_2) = \psi(\vec{p}_1)\psi(\vec{p}_2)$$



Gb. 2.10. Masalah Cooper : dua elektron berinteraksi diatas " lautan " Fermi yang terisi penuh. Diagram ini menggambarkan ruang momentum dari elektron. Momentum elektron konduksi pada logam normal terdistribusi secara seragam dalam bola dengan jari-jari  $p_f$ . Momentum dua elektron tambahan adalah  $\vec{p}_1$  dan  $\vec{p}_2$  yang digambarkan sebagai titik diluar bola. Selama proses hamburan resultan momentum  $P$  adalah tetap sedang momentum individual berubah dari  $\vec{p}_1, \vec{p}_2$  ke  $\vec{p}'_1, \vec{p}'_2$ .

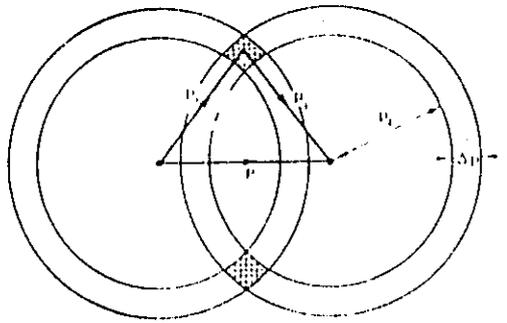
Jika terjadi interaksi antara keduanya dengan terjadinya hamburan sehingga momentum individualnya berubah, yang mengakibatkan fungsi gelombang dua-elektron merupakan campuran dari fungsi gelombang yang berisi momentum dalam daerah yang lebar, berbentuk

$$\begin{aligned} \Phi(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2) &= \sum_{i,j} a_{ij} \phi(\vec{p}_i, \vec{p}_j) \\ &= \sum_{i,j} a_{ij}^2 \psi(\vec{p}_i) \psi(\vec{p}_j) \quad (2.37) \end{aligned}$$

Fungsi gelombang  $\Phi$  dapat ditafsirkan bahwa kedua elektron

salinng menghambur berulang-kali dengan momentum individualnya berubah secara konstan. Sedang  $|a_{ij}|^2$  memberikan kebolehjadian menemukan elektron pada suatu saat dengan momentum individual  $\vec{p}_i$  dan  $\vec{p}_j$ . Selama proses hamburan total momentum dari kedua elektron adalah kekal sehingga  $\vec{p}_i + \vec{p}_j = \text{konstan} = \vec{P}$ . Jika interaksi ini bersifat atraktif maka akan menghasilkan energi potensial yang negatif.

Proses hamburan memiliki kebolehjadian besar jika defisit energi antara keadaan awal dan intermediet adalah kecil yaitu jika  $E_1 - E_1' \approx h \nu_q$ . Sedang eigenstate pada logam pada suhu nol mutlak dengan energi kinetik sampai dengan  $E_f$  terisi penuh, sehingga  $E_1$  dan  $E_1'$  harus berada diatas  $E_f$ . Harga  $E_1$  dan  $E_1'$  terendah yang memenuhi  $E_1 - E_1' = h \nu_q$  terletak diantara  $E_f$  dan  $E_f + |h \nu_q|$ , dimana  $\nu_q$  = frekuensi fonon rata-rata. Mengingat  $E = p^2/2m$ , maka  $\vec{p}_1$  dan  $\vec{p}_1'$  harus terletak dalam daerah  $\Delta p = m h \nu_q / p_f$  diatas  $\vec{p}_f$  sedangkan  $\vec{p}_i$  dan  $\vec{p}_j$  harus memenuhi  $\vec{p}_i + \vec{p}_j = \vec{P}$ , maka harga  $p$  yang diijinkan dapat dikonstruksi seperti gambar 2.11. Dari gambar ini dapat disimpulkan bahwa fungsi gelombang  $\Phi$  akan menghasilkan energi potensial terendah dengan membentuknya dari fungsi gelombang  $\psi(\vec{p}_\uparrow)$   $\psi(-\vec{p}_\downarrow)$  dimana  $\psi(\vec{p}_\uparrow)$  menggambarkan elektron dengan momentum  $\vec{p}$  dengan spin up dan  $\psi(-\vec{p}_\downarrow)$  adalah elektron dengan momentum  $-\vec{p}$  dengan spin down.



ab. 2.11. Dua kulit bola dengan jari-jari  $p_f$  dan tebal  $\Delta p = \hbar v_L / p_f$  dengan pusat dipisahkan oleh vektor  $P$ . Semua pasangan momentum memenuhi  $p_i + p_j = P$  dapat dilihat seperti dalam gambar. Jumlah pasangan yang terjadi sebanding dengan volume pada ruang-p pada cincin yang diarsir. Volume ini maksimum jika  $P = 0$ .

Sehingga persamaan 2.37 akan menjadi

$$\Phi(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2) = \sum a_i \phi(\vec{p}_{i\uparrow}, -\vec{p}_{i\downarrow}) \quad (2.38)$$

dimana  $\phi(\vec{p}_{i\uparrow}, -\vec{p}_{i\downarrow}) = \psi(\vec{p}_{i\uparrow})\psi(-\vec{p}_{i\downarrow})$

dan  $a_{ii}$  ditulis sebagai  $a_i$

Fungsi gelombang semacam itu disebut dengan pasangan Cooper. Total energi dari dua elektron didapatkan dengan menambahkan energi potensialnya pada total energi kinetisnya yaitu

$$W = 2 \sum_i |a_i|^2 (p_i^2 / 2m)$$

Karena  $p > p_f$  dan  $\sum |a_i|^2 = 1$  jika  $\Phi$  dinormalisir maka energi kinetiknya melampaui  $2p_f^2/2m = 2E_f$ . Hasil analisa terpenting dari Cooper adalah : pada pembentukan pasangan dengan besar momentum sama dan berkebalikan, penurunan energi potensial oleh karena interaksi itu, melebihi besar energi kinetis yang lebih dari  $2E_f$ . Sehingga jika dua buah elektron berada dalam keadaan seperti yang digambarkan oleh fungsi gelombang  $\Phi$  maka total energi dari sistem akan lebih kecil daripada mereka berada sedikit diatas  $p_f$  tetapi tanpa interaksi diantaranya.

### 2.9.3. Keadaan Dasar Superkonduktif

Dalam tahun 1957 Bardeen, Cooper dan Shcrieffer menunjukkan bahwa pasangan Cooper dapat diperluas untuk beberapa elektron yang saling berinteraksi. Anggapan dasar dari teori BCS yaitu bahwa hanya interaksi antara dua elektron pada materi dalam keadaan superkonduktif yang dapat membentuk pasangan Cooper. Pada logam dengan suhu nol mutlak, elektron-elektron yang berada pada momentum sedikit dibawah  $p_f$  dapat digabungkan membentuk pasangan Cooper sehingga menghasilkan keadaan dengan energi yang lebih rendah. Proses diatas dapat dilakukan pada elektron lainnya untuk membentuk pasangan Cooper. Hal ini mungkin terjadi karena lebih dari satu pasang elektron yang dapat digambarkan dengan fungsi gelombang  $\Phi$  yang diberikan oleh persamaan 2.38. Sehingga semua elektron superkonduktif dapat

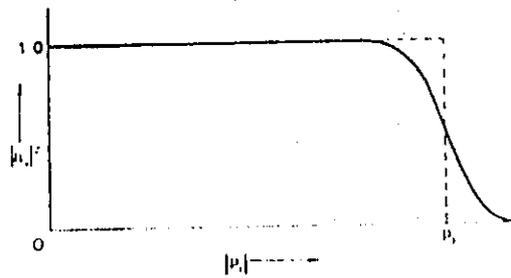
digambarkan dengan fungsi gelombang elektron banyak  $\Psi_G$ :

$$\Psi_G(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_{n_s}) = \Phi(\vec{r}_1, \vec{r}_2) \Phi(\vec{r}_3, \vec{r}_4) \dots \Phi(\vec{r}_{n_s-1}, \vec{r}_n) \quad (2.59)$$

dimana  $n_s/2$  = jumlah pasangan elektron

$\vec{r}_n$  = koordinat posisi dari elektron ke-n

$\Phi$  dalam ruas kanan adalah sama untuk semua pasangan. Fungsi gelombang  $\Psi_G$  memberikan kebolehjadian menemukan elektron pada  $\vec{r}_1$  sementara yang lain pada  $\vec{r}_2$  dan seterusnya, tak peduli pada momentumnya. Kenyataan bahwa tidak terdapat batas dari jumlah pasangan Cooper maka dapat dipandang pasangan Cooper sebagai partikel komposit yang tidak memenuhi prinsip Pauli atau pasangan Cooper dipandang sebagai partikel yang memenuhi statistika Bose-Einstein. Karena tidak terdapat batas pasangan Cooper maka dimungkinkan semua elektron berada pada  $p > p_f$ . Tapi hal ini tidak dapat terjadi karena jika pasangan elektron terhambur dari keadaan  $(\vec{p}_{i\uparrow}, -\vec{p}_{i\downarrow})$  ke keadaan  $(\vec{p}_{j\uparrow}, -\vec{p}_{j\downarrow})$ , maka keadaan  $(\vec{p}_{i\uparrow}, -\vec{p}_{i\downarrow})$  pertama terisi sedang keadaan  $(\vec{p}_{j\uparrow}, -\vec{p}_{j\downarrow})$  kosong. Semakin banyak pasangan Cooper dengan  $p > p_f$  terbentuk, maka kesempatan mendapatkan keadaan  $(\vec{p}_{j\uparrow}, -\vec{p}_{j\downarrow})$  kosong semakin kecil. Sehingga jumlah proses hamburan berkurang, yang berakibat menurunnya penurunan energi potensial sehingga tercapai kondisi dimana penurunan energi potensial tidak cukup untuk mengganti kenaikan energi kinetis dan tidak mungkin lagi menurunkan energi total sistem dengan membentuk pasangan Cooper.



ab 2.12. ————— Kebolehjadian  $h_i$  bahwa keadaan dua-elektron ( $p_{i\uparrow}, -p_{i\downarrow}$ ) terisi pada fungsi gelombang keadaan dasar BCS.  
 ----- Kebolehjadian keadaan elektron-tunggal dengan momentum  $|p_i|$  terisi pada logam normal pada suhu nol mutlak. Pada keadaan dasar superkonduktif terdapat kekosongan pada  $p_i < p_f$ .

Sehingga dapat disimpulkan, terdapat penyusunan optimum yang memberikan energi potensial terendah. Kondisi ini dapat digambarkan dengan memperkenalkan kebolehjadian  $h_i$  dari keadaan pasangan ( $p_{i\uparrow}, -p_{i\downarrow}$ ) terisi dalam fungsi gelombang  $\Psi_0$ . Teori BCS memberikan harga  $h_i$  sebagai :

$$h_i = \frac{1}{2} \left[ 1 - \frac{E_i - E_f}{[(E_i - E_f)^2 + \Delta^2]^{1/2}} \right] \quad (2.40)$$

dimana  $E_i = \frac{p_i^2}{2m}$

kuantitas  $\Delta$  memiliki dimensi energi dan diberikan oleh

$$\Delta = 2 \hbar v_f \exp [-(N(E_f)V)^{-1}] \quad (2.41)$$

dimana  $v_l$  = frekuensi fonon rata-rata

$V$  = elemen matrik dari interaksi hamburan

$N(F_f)$  = rapat keadaan elektron logam normal pada energi fermi

Kebolehjadian  $h_l$  yang diberikan oleh teori BCS diperlihatkan dalam gambar 2.12 sebagai fungsi  $p_l$ , jika fungsi gelombang  $\Psi_0$  menggambarkan keadaan energi total terendah, yang biasa disebut sebagai keadaan dasar. Keadaan dasar (keadaan energi terendah) terjadi jika semua elektron dengan momentum dalam daerah  $\Delta p = \frac{mhv_l}{p_f}$  disekitar  $p_f$  terkopel dalam pasangan Cooper dengan momentum dan spin yang berkebalikan. Keadaan ini bersesuaian dengan keadaan terkondensasi karena elektron-elektron bersama membentuk keadaan energi lebih rendah, seperti yang terjadi pada atom-atom gas ketika terkondensasi kebentuk cair.

#### 2.9.4. Energi Gap

Keadaan dasar superkonduktor adalah keadaan dengan energi terendah atau keadaan superkonduktor pada nol mutlak. Sehingga terdapat keadaan tereksitasi yang didapat dengan cara menaikkan temperatur atau dengan menyinari dengan panjang gelombang yang tepat. Jika energi ditambahkan pada pasangan Cooper, misal dengan menyinari bahan superkonduktor maka penambahan energi ini akan dipakai untuk menaikkan momentum pada fungsi gelombang  $\Phi$  yang diberikan oleh persamaan (2.38). Tetapi fungsi gelombang  $\Phi$  berisi semua harga momentum dalam daerah  $\Delta p = \frac{mhv_l}{p_f}$ , meskipun momentum

total tetap nol sehingga tidak dapat menambah energi pasangan dengan hanya menambah momentum dari elektron dan pada saat yang sama menjaga syarat momentum dari pasangan yaitu momentumnya sama dan berkebalikan. Yang mungkin terjadi adalah pasangan akan terpecah sehingga elektron-elektron tidak lagi mempunyai momentum sama dan berkebalikan. Sehingga mereka tak lagi saling terhambur seperti ketika membentuk pasangan Cooper dan negatif dari energi potensial dari hasil interaksinya terabaikan. Pasangan yang terpecah berkelakuan seperti elektron bebas dan disebut dengan " partikel-semu ". Momentum individual dari elektron-elektron sebelum pasangan terpecah tidak dapat ditentukan karena fungsi gelombang  $\Phi$  tak dispesifikasikan. Tetapi momentum elektron-elektron setelah pasangan terpecah dapat mempunyai arti fisis. Sehingga terdapat energi tertentu untuk memecah pasangan yang menghasilkan dua elektron atau partikel-semu, dengan momentum  $p_i$  dan  $p_j$ . Sesuai dengan teori BCS jumlah energi yang dimaksud adalah

$$E = E_i + E_j = \left\{ (\epsilon_i - \epsilon_f)^2 + \Delta^2 \right\}^{1/2} + \left\{ (\epsilon_j - \epsilon_f)^2 + \Delta^2 \right\}^{1/2} \quad (2.42)$$

dimana  $\epsilon_i = \frac{p_i^2}{2m}$ . Sehingga energi minimum yang diperlukan untuk memecah pasangan adalah  $2\Delta$  yang terjadi jika  $p_i = p_j = p_f$  atau  $\epsilon_i = \epsilon_j = \epsilon_f$ . Maka timbul energi gap sebesar  $2\Delta$  pada spektrum eksitasi dari superkonduktor dan frekuensi radiasi  $\nu$  diserap jika  $h\nu > 2\Delta$ .

Energi gap sebesar itu disebabkan oleh dua hal, pertama pada pemecahan pasangan sehingga elektron-elektron tidak lagi memiliki momentum sama dan berkebalikan menghasilkan kehilangan energi ikat mereka, kedua jika keadaan  $\vec{p}_\uparrow$  ditempati oleh sebuah elektron sedangkan keadaan  $\vec{p}_\downarrow$  kosong, maka keadaan pasangan  $(\vec{p}_\uparrow, \vec{p}_\downarrow)$  tidak lagi menjadi pasangan Cooper, sehingga jumlah proses hamburan akan berkurang yang bersesuaian dengan penurunan energi ikatnya. Dan energi total keseluruhan sistem elektron akan bertambah.

#### 2.9.5. Keadaan Membawa-Arus

Dalam pasal ini dipandang bahwa momentum total dari pasangan Cooper tidak nol tetapi mempunyai resultan sebesar  $P$  sama untuk semua pasangan. Sehingga keadaan dari momentum yang membentuk fungsi gelombang pasangan adalah :

$$\left[ \left( \vec{p}_i + \frac{\vec{P}}{2} \right)_\uparrow \cdot \left( -\vec{p}_i + \frac{\vec{P}}{2} \right)_\downarrow \right]$$

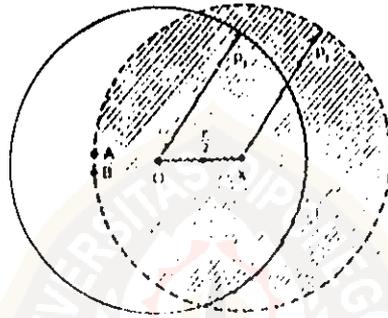
Keseluruhan distribusi momentum dalam ruang  $p$  bergeser sejauh  $P/2$  seperti diperlihatkan dalam gambar 2.13. Pasangan elektron ini masih mungkin mengambil bagian dalam sejumlah besar proses hamburan dengan momentum total kekal. Hal ini dapat digambarkan dengan proses hamburan dari keadaan

$$\left[ \left( \vec{p}_i + \frac{\vec{P}}{2} \right)_\uparrow \cdot \left( -\vec{p}_i + \frac{\vec{P}}{2} \right)_\downarrow \right]$$

ke keadaan

$$\left[ \left( \vec{p}_j + \frac{\vec{P}}{2} \right)_{\uparrow} + \left( -\vec{p}_j + \frac{\vec{P}}{2} \right)_{\downarrow} \right]$$

Energi total dari elektron tetap kecuali energi kinetis bertambah sebesar  $n_s p^2 / 8m$  dimana  $n_s$  jumlah elektron superkonduktif.



Gb. 2.19. Distribusi momentum dalam superkonduktor berarus. Vektor momentum terdistribusi seragam dalam bola dengan jari-jari  $p_f$  (diarsir) dengan pusat  $x$  bergeser sejauh  $\vec{P}/2$  dari titik asal  $O$ .  $\vec{P}$  adalah momentum total dari pasangan Cooper. Pada keadaan tanpa arus, pusat dari bola adalah pada  $O$ . Jika terdapat rapat arus maka terdapat kemungkinan pasangan Cooper pecah menjadi dua partikel semu dengan momentum digambarkan sebagai titik  $A$  dan  $B$ .

Fungsi gelombang pasangan Cooper menjadi :

$$\Phi_P = \Phi e^{i\vec{P} \cdot (\vec{r}_1 + \vec{r}_2) / 2\hbar} \quad (2.43)$$

dimana  $\Phi$  adalah fungsi gelombang pasangan pada persamaan (2.38) dan bentuk eksponen menggambarkan pergerakan pusat massa dari pasangan dengan total momentum  $\vec{P}$ .

Jika  $\vec{r} = (\vec{r}_1 + \vec{r}_2)/2$  maka :

$$\Phi_p = \Phi e^{i \cdot \vec{P} \cdot \vec{r} / \hbar} \quad (2.44)$$

Dalam gambaran ini, arus dibawa oleh pasangan elektron dengan momentum total  $\vec{P}$ . Jika arus mengalir dalam konduktor biasa seperti logam biasa atau semikonduktor, hambatan listrik tak dapat dihindari, karena pembawa arus (elektron atau lubang) dapat terhambur dengan momentum berubah sehingga percepatan bebas dalam arah medan listriknya terhambat. Pada proses penghantaran oleh superkonduktor, elektron membentuk pasangan Cooper dan secara konstan saling terhambur, tetapi selama momentum totalnya tetap konstan maka tidak terdapat perubahan dalam arus yang mengalir. Proses hamburan yang mengurangi aliran arus hanya terjadi jika momentum total dari pasangan Cooper berubah dan hal ini hanya terjadi jika pasangan Cooper terpecah. Untuk rapat arus yang rendah, energi tidak dapat ditambahkan pada pasangan Cooper sehingga proses hamburan yang merubah momentum total pasangan Cooper terhalangi dan tidak muncul hambatan listrik.

Momentum dari pasangan Cooper dihubungkan dengan rapat arus  $\vec{j}$  oleh  $\vec{j} = en_p \vec{P} / 2m$ , dimana  $n_p$  adalah jumlah total

elektron superkonduktif dan  $e$  adalah muatan elektron. Jika  $j$  bertambah maka distribusi momentum, terlihat dalam gambar 2.13, semakin bergeser, sampai akhirnya pasangan Cooper terpecah menjadi dua partikel-semu yang momentumnya digambarkan oleh titik A dan B pada permukaan bola yang bergeser dengan lokasi terdekat dengan titik asal. Hal ini bisa dilihat jika diambil sebagai energi nol dari energi superkonduktor adalah dengan pasangan lengkap (tidak terdapat partikel semu) dan tidak terdapat arus ( $\vec{P} = 0$ ). Relatif terhadap nol ini, energi dari superkonduktor berarus, tapi tanpa partikel semu adalah

$$W_1 = n_s p^2 / 8m$$

yang merupakan tambahan energi kinetis dari  $n_s$  elektron masing-masing dengan momentum  $P/2$ . Jika superkonduktor membawa arus, tapi terdapat satu pasangan terpecah, energi eksitasi minimum yang digunakan adalah  $2\Delta$ , dan terjadi jika partikel semu bermomentum  $p_f$ . Dianggap momentum partikel semu berarah kekiri (Gb. 2.13) dan keseluruhan distribusi sekarang bergeser sebesar  $P/2$  kekanan sehingga momentum partikel semu digambarkan oleh A dan B. Energi superkonduktor relatif terhadap nol diatas adalah

$$W_2 = 2\Delta + (n_s - 2) \frac{P^2}{8m} + 2 \left[ \frac{(p_f - P/2)^2}{2m} - \frac{p_f^2}{2m} \right]$$

suku pertama adalah energi yang diperlukan untuk memecah pasangan. suku kedua adalah tambahan energi kinetis dari  $(n_s - 2)$  pasang elektron, suku ketiga adalah perubahan pada energi kinetis dari partikel-semu. Pasangan Cooper terpecah jika  $W_1 > W_2$  yaitu jika

$$\frac{p_f P}{m} > 2\Delta \quad \text{atau} \quad P > \frac{2m\Delta}{p_f} \quad (2.45)$$

Selama  $P$  sebanding dengan rapat arus maka terdapat juga rapat arus kritis. Diatas rapat arus kritis ini hambatan listrik akan timbul. Dengan menggabungkan bentuk  $j$  dengan syarat dari persamaan (2.45) diperoleh

$$J_c = \frac{e n_s \Delta}{p_f} \quad (2.46)$$

Untuk timah, rapat arus kritis pada nol mutlak adalah  $2.10^7$  A/cm<sup>2</sup>. Pada temperatur tak-nol, beberapa pasangan akan terpecah menjadi partikel-semu meskipun untuk arus dibawah arus kritis. Partikel-semu berkelakuan seperti elektron normal; mereka dapat terhambur dan jika mereka membawa arus maka akan timbul hambatan listrik. Tetapi pasangan elektron yang tersisa akan tetap tak terhamburkan kecuali energi sejumlah  $2\Delta$  ditambahkan. Pasangan elektron ini disebut dengan " superelektron ".