B A B I I

L A T A R B E L A K A N G T E O R I

2.1. Partikel Bermuatan Dalam Medan Listrik

Sebuah partikel bermuatan +e yang terletak pada suatu medan listrik E akan mengalami gaya Coulomb sebesar F = eE. Jika partikel bergerak searah sumbu z dan medan listrik memiliki arah yang sama dengan sumbu x, maka partikel ini akan mendapat percepatan ke arah sumbu x pula. Akibatnya akan timbul komponen kecepatan yang searah sumbu x dan partikel akan dibelokkan dengan sudut tertentu yang besarnya tergantung pada harga E atau F dari medan listrik yang mengenai partikel bermuatan tersebut. Sesuai dengan hukum Newton maka

$$F_x = eE_x \tag{2.1}$$

$$m\ddot{x} = eE_x \tag{2.2}$$

dimana F_x adalah komponen gaya F yang searah sumbu x pada partikel bermuatan, E_x adalah komponen medan listrik yang searah sumbu x pada partikel bermuatan dan m adalah massa partikel bermuatan tersebut.

Bentuk elektroda akan mempengaruhi perilaku partikel bermuatan, karena bentuk elektroda ini akan menghasilkan daerah ekuipotensial yang bermacam-macam. Jika elektrodanya hanya dua, satu positif dan satu negatif yang terletak sejajar maka partikel nantinya akan mempunyai gerakan parabola karena partikel tersebut mempunyai percepatan yang selalu positif ke arah sumbu x. Ini tidak menguntungkan untuk suatu tujuan mengumpulkan berkas partikel, jadi kita akan meninjau suatu bentuk potensial yang lain.

2.2. Pengumpulan Berkas Partikel Oleh Medan Listrik

Untuk mengumpulkan berkas partikel bermuatan yang memiliki posisi awal (yaitu saat mulai terpengaruh medan listrik) berharga x_0 (positif maupun negatif), maka diperlukan suatu medan yang mampu membuat partikel bergerak sinusoidal selama berada pada pengaruh medan listrik tersebut. Sumbu gerak partikel adalah sumbu z, yang juga menjadi sumbu optik.

Dari persamaan Newton akan terlihat bahwa medan listrik yang diperlukan akan memiliki persamaan

$$\vec{E}_x = -G\vec{x} \qquad (2.3)$$

dimana G adalah gradien medan listrik, (konstanta).

Sesuai hukum Maxwell maka persamaan medan listrik untuk sumbu y harus memenuhi persamaan $\vec{\nabla}.\vec{D} = \rho$, dan karena muatan total elektroda harus nol maka akan didapat $\vec{\nabla}.\vec{D} = 0$ yang berarti $\vec{\nabla}.\vec{E} = 0$. Jadi medan listrik pada sumbu y berbentuk

$$\vec{E}_y = G\vec{y} \qquad (2.4)$$

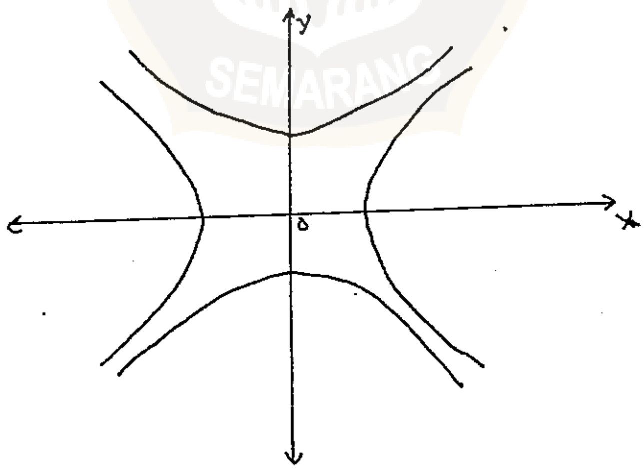
Medan listrik total adalah $\vec{E} = \vec{E}_x + \vec{E}_y$

$$\vec{E} = G(\vec{y}-\vec{x}) \qquad (2.5)$$

Selanjutnya dengan mengintegralkan persamaan (2.5) akan diperoleh bentuk fungsi potensialnya.

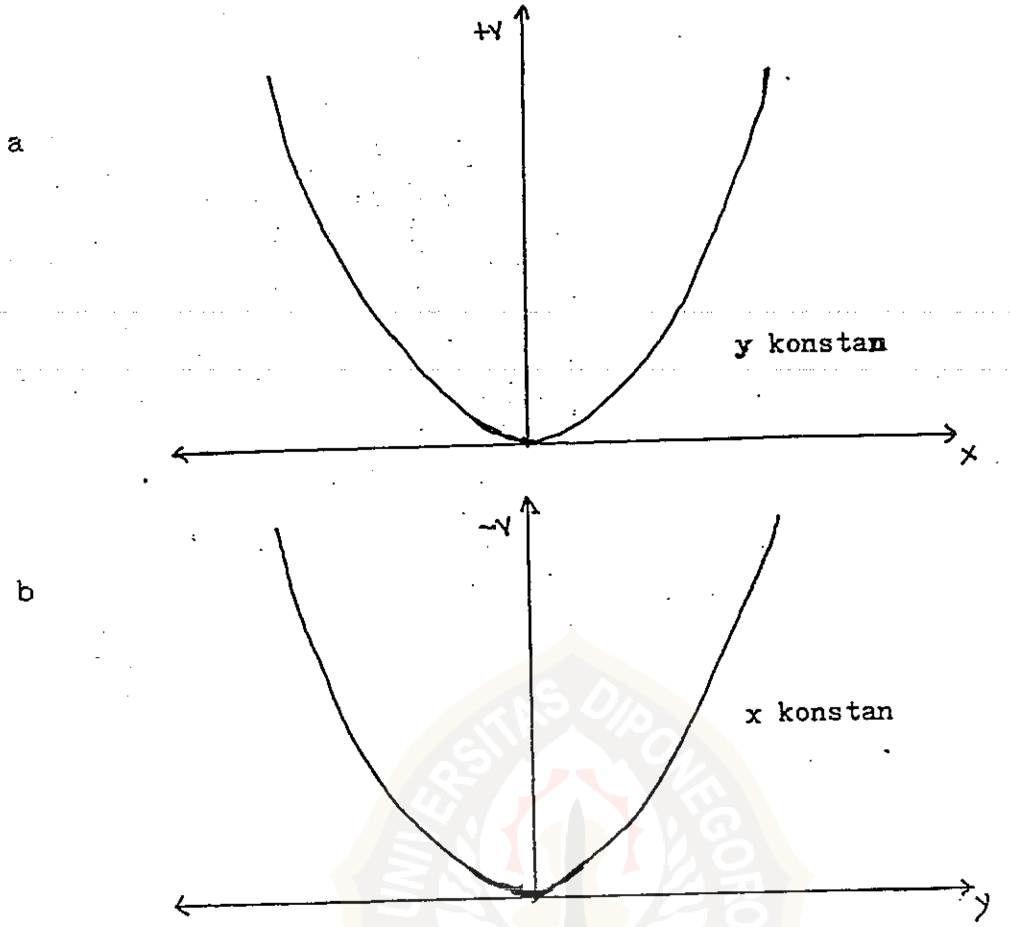
$$\begin{aligned} V &= -\int \vec{E}.d\vec{l} \\ &= -\int (E_x\,dx + E_y\,dy) \\ &= 1/2\;\; G(x^2-y^2) \qquad (2.6) \end{aligned}$$

Daerah ekuipotensial fungsi ini berupa hiperbola empat sisi seperti tampak pada gambar 2.1.



Gambar 2.1. Fungsi potensial dari persamaan (2.6).

Hubungan antara harga V dengan harga x dan y terlukis pada gambar 2.2.



Gambar 2.2. Hubungan V dengan x (a) dan V dengan y (b).

Fungsi potensial di atas adalah fungsi potensial sebuah lensa kuadrupol.

2.3. Persamaan Gerak Partikel Pada Lensa Kuadrupol Duplet

Persamaan gerak lensa kuadrupol dimulai dari hukum Newton yang telah dituliskan di atas. Peninjauannya dipisah untuk bidang xz dan yz.

2.3.1. Persamaan gerak pada bidang xz

Gerakan partikel pada bidang xz dilihat secara klasik

$$F_x = eE_x$$
$$m\ddot{x} = -eGx$$

Syarat awal dari gerakan ini adalah posisi awal = x_o, dan kecepatan awal = $\dot{x}_o = 0$. Penyelesaian persamaan di atas adalah

$$x = x_o \cos(eGt^2/m)^{1/2}$$

untuk z = vt , maka

$$x = x_o \cos(eGz^2/mv^2)^{1/2} \qquad (2.7)$$

√

Pada $z = z_1$, posisi dan kecepatan partikel adalah

$$x = x_o \cos kz_1 + \dot{x}_o/kv \cos kz_1 \qquad (2.8)$$
$$\dot{x}/v = -kx_o \sin kz_1 + \dot{x}_o/v \cos kz_1 \qquad (2.9)$$

dimana $k = (eG/mv^2)^{1/2}$.

Persamaan (2.8) dan (2.9) dapat ditulis dalam bentuk matriks transformasi.

$$\begin{bmatrix} x \\ \dot{x}/v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos kz_1 & (1/k) \sin kz_1 \\ -k\sin kz_1 & \cos kz_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_o \\ \dot{x}_o/v \end{bmatrix} \qquad (2.10)$$

Persamaan dan matriks transformasi ini berlaku untuk lensa kuadrupol yang pertama. Setelah berkas masuk ke lensa kuadrupol kedua dimana medan listrik yang berpengaruh $E_x = Gx$ yang berarti tanda gradien medan listriknya berlawanan, maka penyelesaian persamaan geraknya dalam bentuk matriks transformasi adalah

$$\begin{pmatrix} \cosh kz_1 & (1/k)\sinh kz_1 \\ k\sinh kz_1 & \cosh kz_1 \end{pmatrix} \qquad (2.11)$$

Maka posisi dan kecepatan partikel setelah melewati kedua lensa adalah

$$\begin{pmatrix} x \\ \dot{x}/v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh kz_1 & (1/k)\sinh kz_1 \\ k\sinh kz_1 & \cosh kz_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos kz_1 & (1/k)\sin kz_1 \\ -k\sin kz_1 & \cos kz_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_o \\ \dot{x}o/v \end{pmatrix} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \; (2.12)$$

$$= \begin{pmatrix} x_o(\cosh kz_1 \cos kz_1 - \sinh kz_1 \sin kz_1) + \\ \dot{x}_o/kv(\cosh kz_1 \sin kz^1 + \sinh kz_1 \cos kz_1) \\ \\ kx_o(\sinh kz_1 \cos kz_1 - \cosh kz_1 \sin kz1) + \\ \dot{x}_o/v(\cosh kz_1 \cos kz_1 + \sinh kz_1 \cos kz_1) \end{pmatrix} \qquad (2.13)$$

Tidak segera dapat kita lihat telah terjadi pemfokusan pada bidang xz. Kita harus menyederhanakan persamaan di atas dengan anggapan bahwa harga kz_1 cukup kecil, sehingga dapat dilakukan pendekatan yaitu fungsi periodik di atas di deretkan menurut deret Mac Laurin.

$$\cosh kz_1 = 1 + (kz_1)^2/2$$
$$\cos kz_1 = 1 - (kz_1)^2/2$$
$$\sinh kz_1 = kz_1(1 + (kz_1)^2/6)$$
$$\sin kz_1 = kz_1(1 - (kz_1)^2/6)$$

Dengan pendekatan seperti $(1 + b)^n = (1 + nb)$ untuk $b << 1$ serta harga $\dot{x}_o = 0$, maka didapat

$$x = x_o(1 - k^2 z_1^2) \tag{2.14}$$
$$\dot{x}/v = -2/3\ x_o k^4 z_1^3 \tag{2.15}$$

tampak bahwa gerakan partikel terfokuskan, sebab grafik posisi partikel dalam sumbu x semakin mendekati nol (berimpit sumbu berkas z) untuk harga z_1 semakin besar sampai harga tertentu dimana harga x menjadi nol, yaitu saat z_1 sama dengan 1/k. Setelah z_1 melewati harga tersebut maka partikel akan tersebar lagi.

2.3.2. Persamaan gerak pada bidang yz

Persamaan gerak pada bidang yz hampir sama dengan bidang xz, namun urutan matriks transformasi dibalik karena susunan medan listriknya berkebalikan dengan susunan medan listrik pada bidang xz.

Melalui pendekatan yang sama dengan pendekatan untuk persamaan pada bidang xz didapatkan

$$y = y_o(1 + k^2 z_1^2) \tag{2.17}$$

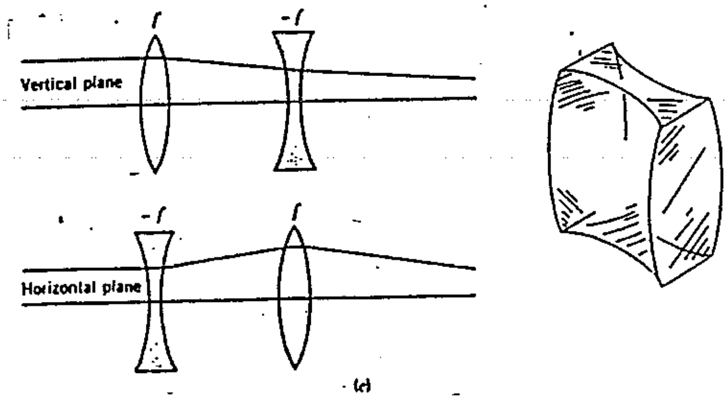
$$\dot{y}/v = -2/3\ y_o k^4 z_1^3 \tag{2.18}$$

Jika hasil ini dibandingkan dengan hasil untuk xz, maka akan tampak bahwa untuk posisi awal yang sama, kecepatan partikel pada kedua sumbu sama untuk suatu harga z_1.

Efek pemfokusan tetap sama walaupun ada daerah bebas medan listrik di antara kedua lensa kuadrupol tersebut.

2.4. Karakteristik Optik Lensa Kuadrupol

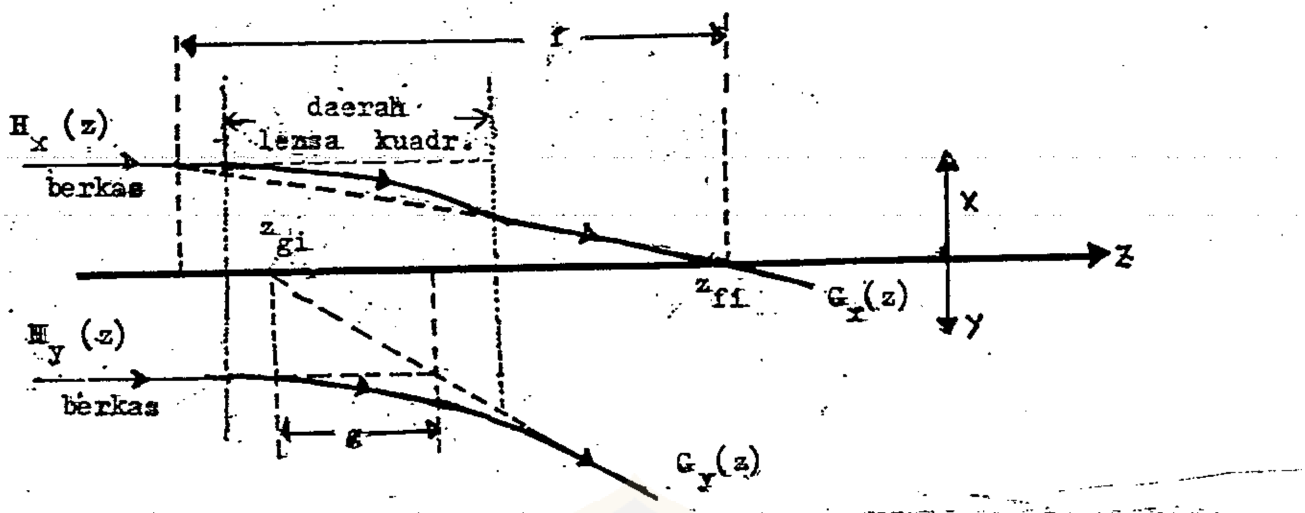
Lensa kuadrupol memiliki sifat seperti lensa optik, yaitu mampu menyebarkan dan mengumpulkan berkas partikel bermuatan yang melewatinya. Seperti tampak pada persamaan gerak partikel di atas, sebuah lensa kuadrupol singlet akan memfokuskan berkas partikel pada satu bidang dan menyebarkan berkas pada bidang yang lain, tergantung pada jenis partikel bermuatan yang melalui lensa tersebut. Seperti sebuah lensa optik maka lensa kuadrupol juga memiliki titik fokus, bidang konjugasi, sumbu optik dan aberasi.



Gambar 2.3. Sebuah susunan lensa optik merupakan analogi lensa kuadrupol duplet[2]

2.4.1. Titik fokus, bidang prinsip, bidang konjugasi dan sumbu optik

Sebuah sinar datang yang masuk ke suatu lensa kuadrupol memiliki fungsi H(z) sebagai persamaan geraknya. Jika $H_x(z)$ adalah persamaan geraknya pada bidang xz, dan $H_y(z)$ adalah persamaan geraknya pada bidang yz dari sebuah benda yang diandaikan astigmatis. Posisi benda diandaikan terletak pada z_{ox} untuk bidang xz dan z_{oy} untuk bidang yz. Jika asimtut $(z \to \infty)$ $H_x(z)$ memotong sumbu optis pada z_{ix} dan asimtut $H_y(z)$ memotong sumbu optis pada titik z_{iy} maka pasangan (z_{ox}, z_{ix}) dan (z_{oy}, z_{iy}) memenuhi persamaan lensa Newton.



Gambar 2.4. Konstruksi elemen asimtut pada bidang prinsip sebuah lensa kuadrupol.

Penotasian gambar

	bidang xz	bidang yz
Fokus obyek	$z = z_{fo}$	$z = z_{go}$
Fokus bayangan	$z = z_{fi}$	$z = z_{gi}$
Titik prinsip obyek	$z = z_{po}$	$z = z_{qo}$
Titik prinsip bayangan	$z = z_{pi}$	$z = z_{qi}$
Panjang fokus ($z_{po} - z_{fo}$ $= z_{fi} - z_{pi}$ atau $z_{qo} - z_{go}$ $= z_{gi} - z_{qi}$)	f	g

Dapat ditemukan bahwa

$$(z_{ox} - z_{fo})(z_{ix} - z_{fi}) = -f^2 \tag{2.19}$$

$$(z_{oy} - z_{go})(z_{iy} - z_{gi}) = -g^2 \tag{2.20}$$

Persamaan (2.19) dan (2.20) dikenal sebagai persamaan lensa Newton.[3]

Perbesaran antara z_{ox} dan z_{ix} adalah M_x dan bahwa perbesaran antara z_{oy} dan z_{iy} adalah M_y maka

$$M_x = f/(z_{ox} - z_{fo}) = -(z_{ix} - z_{fi})/f \qquad (2.21)$$

$$M_y = g/(z_{oy} - z_{go}) = -(z_{iy} - z_{gi})/g \qquad (2.22)$$

perjanjian tentang tanda yang digunakan di sini adalah tanda panjang fokus untuk bayangan berlawanan dengan tanda panjang fokus benda, didefinisikan sebagai z(bidang prinsip) - z(bidang fokus).

Kini kita menamakan titik-titik $z_{ox} = z_1$, $z_{ix} = z_2$, $z_{oy} = z_3$ dan $z_{iy} = z_4$. Kemudian dicari hubungan antara x_2 dengan x_1 dan y_4 dengan y_3. Jika hubungan ini ditunjukkan oleh persamaan

$$x_2 = T_x x_1 \quad \text{dan} \quad y_3 = T_y y_4 \qquad (2.23)$$

dimana

$$T_x = \begin{pmatrix} -(z_2-z_{fi})/f & f\{(z_2-z_{fi})(z_1-z_{fo})/f^2 + 1\} \\ -1/f & (z_1-z_{fo})/f \end{pmatrix} \qquad (2.24)$$

$$T_y = \begin{pmatrix} -(z_4-z_{gi})/g & g\{(z_4-z_{gi})(z_3-z_{go})/g^2 + 1\} \\ -1/g & (z_3-z_{go})/g \end{pmatrix} \qquad (2.25)$$

a. *Matrik Dusek.*[4] Matrik ini sangat diperlukan untuk mempelajari dan menganalisa lensa kuadrupol tipis yang disusun multiplet (duplet, triplet, kuadruplet dan seterusnya). Pemecahannya biasanya menggunakan komputer. Untuk lensa kuadrupol tipis $z_1=z_2=z_3=z_4=0$ dan

$$T_x = \begin{pmatrix} z_{fi}/f & z_{fo}z_{fi}/f + f \\ -1/f & -z_{fo}/f \end{pmatrix} \quad (2.26)$$

$$T_y = \begin{pmatrix} z_{gi}/g & z_{go}z_{gi}/g + g \\ -1/g & -z_{go}/g \end{pmatrix} \quad (2.27)$$

i. Bidang konjugasi

Jika z_2 berkonjugasi terhadap z_1 dan z_4 berkonjugasi dengan z_3, maka

$$T_x = \begin{pmatrix} M_x & 0 \\ -1/f & 1/M_x \end{pmatrix} \qquad T_y = \begin{pmatrix} M_y & 0 \\ -1/g & 1/M_y \end{pmatrix} \quad (2.28)$$

ii. Bidang prinsip

Bidang-bidang prinsip membentuk suatu kasus khusus dari bidang konjugasi. Jika $z_1 = z_{po}$, $z_2 = z_{pi}$, $z_3 = z_{qo}$ dan $z_4 = z_{qi}$, maka

$$T_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/f & 1 \end{pmatrix} \qquad T_y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/g & 1 \end{pmatrix} \tag{2.29}$$

sehingga matrik transfer antara pasangan-pasangan bidang-bidang sebarang $z = z_\alpha$ dan $z = z_\beta$ yang dipisahkan oleh (n-1) lensa kuadrupol mengikuti bentuk berikut untuk bidang xz maupun yz

$$T(z_\alpha, z_\beta) = D_n T_{n-1} D_{n-1} T_{n-2} \ldots\ldots\ldots T_2 D_2 T_1 D_1 \tag{2.30}$$

dimana

$$D_i = \begin{pmatrix} 1 & D^{(i)} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{2.31}$$

dan

$$D^{(i)} = z_{po}{}^{(i)} - z_{pi}{}^{(i-1)} \qquad 2 \le i \le n-1$$

$$D^{(1)} = z_{po}{}^{(1)} - z \qquad D^{(n)} = z - z_{pi}{}^{(n-1)} \tag{2.32}$$

b. *Matriks Regenstreif.*[4] Kini kita masukkan harga-harga untuk $z_1 = z_{fo}$, $z_2 = z_{fi}$, $z_3 = z_{go}$ dan $z_4 = z_{gi}$ maka

$$T_x = \begin{pmatrix} 0 & f \\ -1/f & 0 \end{pmatrix} \qquad T_y = \begin{pmatrix} 0 & g \\ -1/g & 0 \end{pmatrix} \tag{2.33}$$

Kita tulis kembali matriks Dusek dari lensa kuadrupol ke i dari susunan n lensa kuadrupol

$$T_i = \begin{pmatrix} a_i & b_i \\ c_i & d_i \end{pmatrix} \qquad (2.34)$$

dan jarak antara lensa kuadrupol ke i dan ke i+1 adalah

$$L_{i,i+1} = \begin{pmatrix} 1 & l_{i,i+1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (2.35)$$

Menurut Regenstreif(1967), disusun terlebih dahulu parameter

$$X_{i,i+1} = a_i/c_i + l_{i,i+1} + d_{i+1}/c_2 \qquad (2.36)$$

Untuk duplet, matriks Dusek antara bidang pertengahan kedua lensa kuadrupol

$$T^{(2)} = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & l_{12} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}$$

dengan

$$X = l_{12} + a_1/c_1 + d_2/c_2 \qquad X = l_{12} + b_1/d_1 + d_2/c_2 \qquad (2.36)$$

didapat

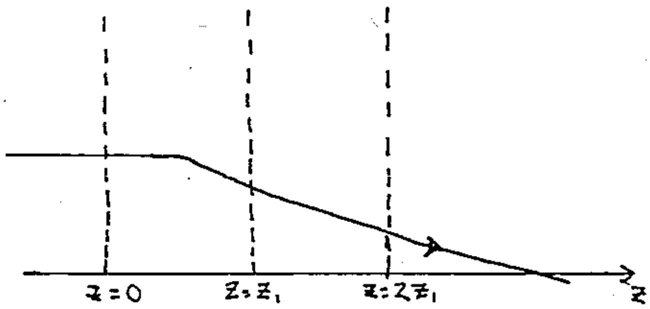
$$T^{(2)} = \begin{pmatrix} c_1a_2(X - 1/a_2c_2) \\ \\ c_1c_2X \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1a_2(X - 1/a_2c_2) \\ \\ d_1c_2X \end{pmatrix} \quad (2.37)$$

2.4.2. Aberasi

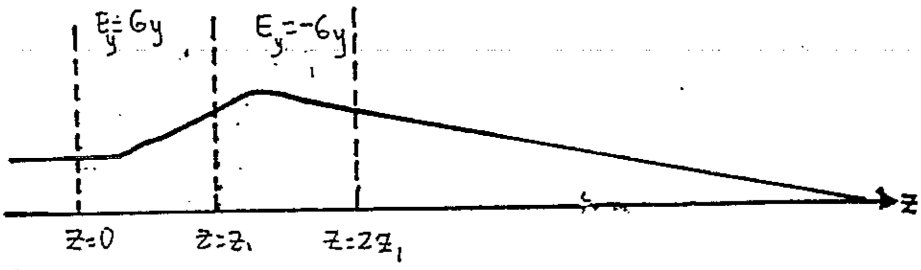
Ada beberapa macam aberasi yang dapat terjadi pada suatu susunan lensa kuadrupol. Secara garis besar ada tiga macam : aberarasi geometris, aberasi kromatis dan aberasi parasitis.

Pada aberasi geometris, terdapat beberapa gejala :

- aberasi sferis. Secara matematis besarnya aberasi ini tidak tergantung pada posisi berkas terhadap bidang obyek.
- distorsi. Bergantung pada posisi berkas terhadap bidang obyek.
- koma. Bergantung secara linier terhadap dengan posisi terhadap bidang obyek.
- astigmatisma. Secara matematis begantung pada kuadrat posisi terhadap bidang obyek.

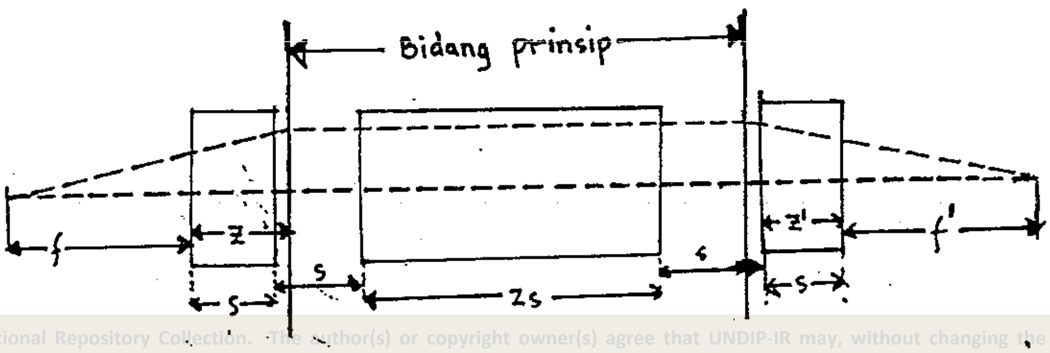


Gambar 2.5a. Gerakan partikel yang melewati lensa kuadrupol duplet pada bidang xz.

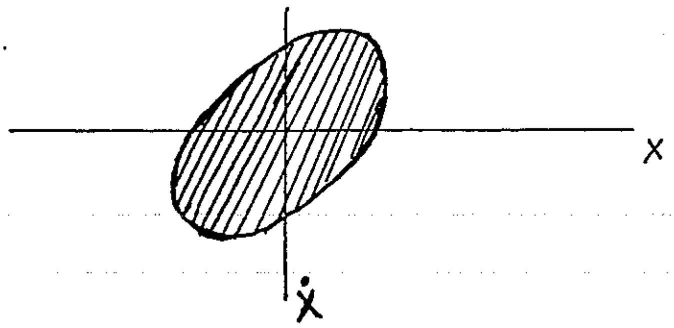


Gambar 2.5b. Pada bidang yz.

Tampak pada gambar di atas bahwa letak titik fokus bidang xz berbeda dengan letak titik fokus pada bidang yz. Maka fokus sesungguhnya dari lensa kuadrupol duplet tersebut tidak pernah berupa suatu titik, namun berupa elips. Astigmatisma ini sesungguhnya dapat diperkecil dengan menambah susunan lensa kuadrupol dengan n lensa, sehingga terjadi susunan triplet, kuadruplet dan seterusnya. Salah satu susunan lensa kuadrupol yang paling sederhana untuk mengurangi astigmatisma ini adalah lensa kuadrupol triplet sebagai berikut:



Gambar 2.6. Sebuah lensa kuadrupol triplet.



Gambar 2.7. Penyebaran pada ruang fase x-ẋ.

Jika berkas melewati lensa atau terkena medan tertentu, bentuk daerah yang melingkupi partikel-partikel akan berubah. Tetapi akan dapat ditemukan bahwa pada suatu sistem yang linier luas daerah akan tetap. Daerah yang tetap ini adalah karakteristik berkas tersebut dan disebut sebagai pemancaran berkas tersebut. Sepanjang energi partikel tidak berubah, pemancarannya juga tetap.

Kekonstanan pemancaran sebuah berkas adalah sebuah konsekuensi dari teorema Liouville, yang mengatakan bahwa luas daerah pada ruang fase yang ditempati suatu kelompok partikel yang mempunyai sifat-sifat pk dan qk yang dapat diturunkan dari suatu Hamiltonian H oleh persamaan

$$dp_k/dt = - \partial H/\partial q_k \qquad \text{dan}$$
$$dq_k/dt = + \partial H/\partial p_k \qquad (2.39)$$

akan konstan sepanjang pergerakan. Hal ini berpedoman pada mekanika statistik.

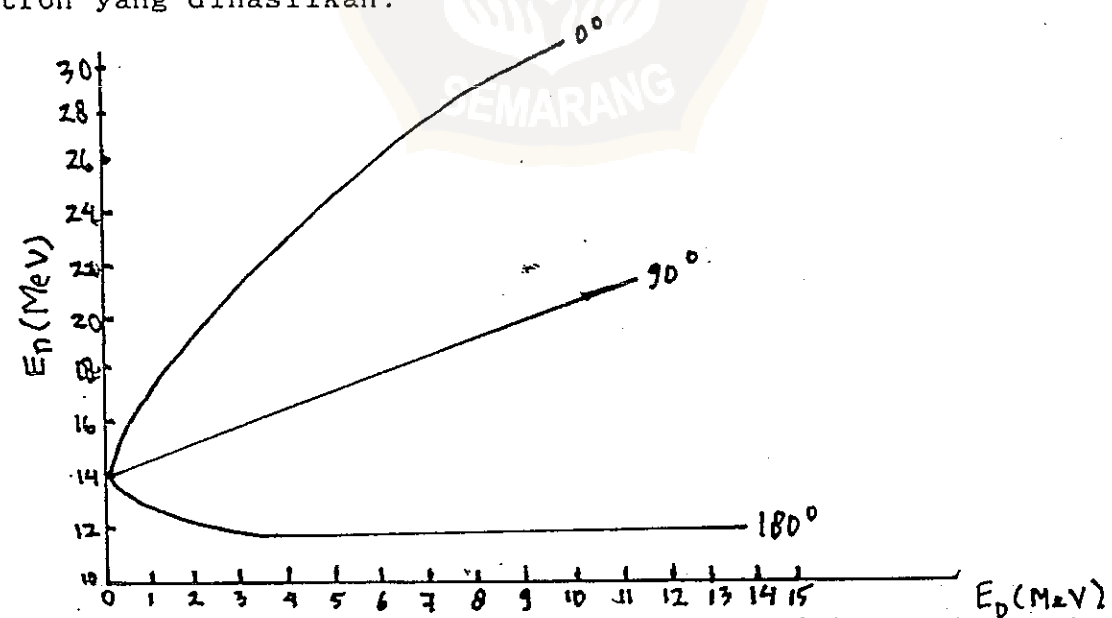
2.6. Lensa Kuadrupol Pada Generator Neutron PPNY

Generator neutron adalah suatu alat pembangkit neutron lewat reaksi inti atom. Reaksi yang biasanya terjadi adalah reaksi antara deuteron yang menumbuk deuteron atau tritium sebagai sasarannya. Hasil reksi ini adalah neutron dengan tenaga tertentu.

Pada generator neutron PPNY, reaksi yang digunakan adalah

$$H^2 + H^3 \longrightarrow n + He^4 \qquad (Q = + 14 \text{ Mev})$$

Reaksi di atas menghasilkan neutron cepat. Reaksi tersebut termasuk reaksi eksoterm karena harga Q yang positif. Jadi secara teoritis tidak ada keadaan ambang terjadinya reaksi, walau sebenarnya tetap ada gaya Coulumb. Dari gambar di bawah terlihat hubungan energi deuteron dengan energi neutron yang dihasilkan.[5]



Gambar 2.8. Hubungan energi deuteron datang dan energi neutron hasil.

Yang menjadi perhatian utama dalam karya ilmiah ini adalah gerakan partikel deuteron sebelum menumbuk triton dengan melewati lensa pemfokus dan tabung akselerator serta lensa kuadrupol setelah gas deuterium diionisasi oleh gelombang rf dan ion positif (deuteron) disapu ke depan. Jadi lensa kuadrupol adalah bagian terakhir dari sistem transportasi generator neutron tersebut, sehingga penting peranannya dalam mengarahkan berkas ke sasaran triton agar fluks neutron yang dihasilkan maksimal. Karena fluks neutron yang dihasilkan bergantung pada jumlah deuteron yang tepat mengenai sasaran, dimana hal ini dapat dilihat lewat besarnya arus sasaran. Fluks neutron yang besar ini berguna pada aktivasi suatu sampel, produksi isotop dan lain-lain. Fluks neutron yang mampu dihasilkan berkisar antara 0 sampai 10^{11} neutron/cm^{2}detik.

Profil partikel dapat diamati dengan rotating probe yang diteruskan ke layar CRO.