

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Pengendalian persediaan dapat diartikan sebagai semua aktifitas dan langkah-langkah yang digunakan untuk menentukan jumlah yang tepat untuk memenuhi persediaan suatu *item*. Masalah persediaan merupakan masalah penting bagi suatu perusahaan karena biasanya sebagian dari total aset perusahaan di investasikan untuk masalah ini. Baik buruknya manajemen suatu perusahaan dapat berpengaruh terhadap keberhasilan usaha yang dijalankan. Untuk itu, harus ditentukan jumlah persediaan yang tepat sehingga usaha dapat berjalan efektif.

Dalam perkembangan dunia bisnis sekarang ini, banyak terjadi perubahan pola pikir dalam menentukan kebijakan-kebijakan terkait sistem manajemen persediaan suatu perusahaan. Perubahan ini biasanya diharapkan mampu menjadi alternatif yang menguntungkan bagi pihak perusahaan. Bagi perusahaan yang memesan bahan baku untuk memenuhi kebutuhan produksi, perusahaan sebagai pihak pembeli diperbolehkan melakukan penundaan pembayaran pembelian selama periode waktu tertentu sebelum melunasinya kepada *supplier* atau produsen artinya, perusahaan tidak harus langsung melunasi pembayaran ketika pesanan datang. Jika pembayaran pembelian dilakukan masih dalam periode penundaan, maka pembeli tidak harus membayar bunga. Tetapi jika pembayaran sudah melewati periode penundaan yang ada, maka *supplier* atau produsen akan mengenakan sejumlah biaya (bunga) kepada pembeli.

Kebijakan ini sangat menguntungkan pembeli sebagai pihak yang boleh menunda pembayaran karena pembayaran dapat ditunda sampai akhir periode penundaan. Selama periode penundaan tersebut, pembeli dapat mengumpulkan pendapatan dari penjualan. Jadi, secara ekonomis pembeli dapat memilih untuk menunda pembayaran sampai hari terakhir periode penundaan.

Kekurangan *stock (shortage)* sangat berpengaruh pada model persediaan yang mempertimbangkan penundaan pembayaran pembelian. *Shortage* dapat mempengaruhi jumlah pesanan, sedangkan jumlah pesanan berpengaruh terhadap periode pemesanan. Apabila dilakukan penundaan pembayaran, maka perlu diketahui bagaimana pengaruh lama periode penundaan pembayaran pembelian terhadap banyaknya pesanan. Ternyata, semakin banyak pemesanan dilakukan maka periode penundaan pembayaran semakin panjang dengan konsekuensi pembeli tidak dapat melakukan pemesanan kembali kepada *supplier* apabila pembayaran sebelumnya belum dilunasi. Oleh karena itu, perlu dilakukan pengendalian persediaan untuk meminimalkan biaya persediaan.

1.2 Perumusan Masalah

Masalah yang akan dibahas dalam penulisan tugas akhir ini adalah membentuk suatu model matematika yang menggambarkan biaya total persediaan dengan kondisi *shortage* dan penundaan pembayaran pembelian, kemudian menganalisa model tersebut untuk mendapatkan total biaya persediaan minimal.

1.3 Pembatasan Masalah

Penulisan tugas akhir ini dititik beratkan pada model pengendalian pembelian (*purchasing model*) dengan kondisi *shortage* dan penundaan pembayaran diperbolehkan untuk satu jenis barang yang sama (homogen) dengan laju permintaan (*demand rate*) konstan serta penundaan pembayaran terjadi sekali dalam setiap *cycle* pemesanan. Dalam pembahasan ini, dianggap perusahaan akan melunasi pembayaran selama masih dalam waktu penundaan.

1.4 Tujuan Penulisan

Tujuan dari penulisan tugas akhir ini adalah :

- Mengetahui model persediaan dengan kondisi *shortage* dan penundaan pembayaran pembelian.
- Mengetahui periode habisnya persediaan, periode pemesanan, serta periode penundaan pembayaran yang tepat sehingga total biaya persediaan yang dikeluarkan minimal.

1.5 Sistematika Pembahasan

Sistematika pembahasan dalam tugas akhir ini terbagi menjadi 4 bab, yang diawali dari bab pendahuluan dan diakhiri dengan bab penutup.

Bab I pendahuluan. Bab ini berisi tentang latar belakang, permasalahan yang akan diangkat, tujuan yang ingin dicapai, ruang lingkup pembahasan, dan sistematika pembahasan.

Bab II tinjauan pustaka. Pada bab ini akan diulas materi-materi penunjang dan kajian literature mengenai materi dasar yang terkait dengan pembentukan model persediaan.

Bab III memuat pembahasan tentang pembentukan model persediaan berdasarkan komponen biaya dengan kondisi *shortage* dan penundaan pembayaran pembelian, analisa dari model yang dibentuk, algoritma untuk mencari total biaya minimal, serta contoh permasalahan yang menggambarkan kondisi penundaan pembayaran pembelian.

Bab IV merupakan bagian penutup. Bab ini akan berisi kesimpulan dan saran yang dapat digunakan sebagai bahan pertimbangan dari penulis yang juga merupakan hasil yang telah didapatkan dalam pengerjaan tugas akhir ini.

BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Pengertian dan *Management Inventory*

Persediaan merupakan fungsi manajerial yang penting bagi perusahaan, karena berhubungan dengan investasi yang dikeluarkan. Persediaan (*inventory*) adalah suatu istilah umum yang menunjukkan segala sesuatu atau sumber daya organisasi yang disimpan untuk memenuhi permintaan. (Handoko, 1984). Permintaan sumber daya yang dimaksud meliputi persediaan bahan mentah, barang setengah jadi, maupun barang jadi. Persediaan juga dapat diartikan sebagai sejumlah bahan baku yang akan digunakan dalam suatu proses produksi dengan tujuan untuk menghasilkan produk yang dapat memenuhi kebutuhan konsumen (Martin, 1998). Secara umum pengendalian persediaan dapat diartikan sebagai semua aktifitas dan langkah-langkah yang digunakan untuk menentukan jumlah yang tepat untuk memenuhi persediaan suatu item.

Sedangkan pengertian manajemen persediaan (*inventory*) adalah serangkaian kebijaksanaan dan kontrol yang dibuat oleh perusahaan untuk memonitor tingkat persediaan yang dimilikinya. Menurut Martin (1998), manajemen *inventory* adalah suatu kontrol atas segenap aktiva yang merupakan produk perusahaan, yang diperjualbelikan dalam oprasi sehari-hari.

Baik buruknya manajemen *inventory* suatu perusahaan dapat berpengaruh terhadap keberhasilan usaha yang dijalankan. Untuk itu, harus ditentukan jumlah persediaan yang tepat sehingga usaha dapat berjalan efektif. Persediaan bahan

akan timbul apabila kita menerima material, komponen, bahan setengah jadi, atau bahan jadi didalam suatu sistem usaha.

2.2 Manfaat *Inventory*

Manfaat *inventory* (persediaan) bagi perusahaan adalah untuk mengantisipasi apabila terjadi kondisi permintaan lebih besar daripada biasanya. Selain itu persediaan biasanya digunakan apabila item yang akan diproduksi merupakan barang yang sulit ditemukan. *Inventory* juga dimaksudkan agar keterlambatan atau suatu penutupan lokasi tidak berakibat lebih jauh pada produksi dan penjualan produk. Keterlambatan suatu proses pemesanan dapat mengakibatkan bertambahnya biaya produksi dan resiko kehilangan konsumen.

2.3 Jenis-Jenis *Inventory*

Sebagai bagian yang penting dari suatu perusahaan, *inventory* (persediaan) dibagi menjadi tiga jenis yaitu :

2.3.1 *Inventory* bahan baku (*materials inventory*)

Inventory yang termasuk dalam jenis ini adalah *inventory* yang berupa bahan mentah (*raw material stock*), baik bahan yang diproduksi sendiri atau yang dipesan dari *supplier*. Bahan baku ini akan diproses oleh perusahaan dalam suatu proses produksi untuk menghasilkan barang jadi.

Tingkat persediaan bahan baku dipengaruhi oleh perkiraan produksi di masa depan, sifat musiman produksi, tingkat keandalan sumber pengadaan, dan tingkat efisiensi pertahapan operasi pembelian dan produksi (Wenston dkk, 1986). Persediaan bahan baku / mentah diadakan agar perusahaan tidak

se penuhnya bergantung pada pengadaannya dalam hal kuantitas dan waktu pengiriman.

2.3.2 *Inventory* dalam proses produksi (*work-in-process*)

Merupakan persediaan barang-barang yang merupakan keluaran dari suatu bagian produksi dan masih memerlukan proses lebih lanjut untuk menjadi barang jadi. *Inventory* ini dilakukan agar departemen-departemen dan proses-proses individual perusahaan terjaga 'kebebasannya'.

2.3.3 *Inventory* barang jadi (*finished goods inventory*)

Inventory jenis ini merupakan barang-barang yang telah selesai diproses atau diolah dalam pabrik dan siap untuk dijual atau dikirm kepada konsumen. Persediaan barang jadi diperlukan untuk memenuhi permintaan produk yang tidak pasti dari para konsumen. Koordinasi antara tingkat produksi dan penjualan mempengaruhi banyaknya persediaan barang jadi.

2.4 *Pengendalian Inventory*

Pengendalian persediaan erat kaitannya dengan investasi yang dikeluarkan oleh perusahaan. Hal ini berkaitan dengan total biaya operasi yang dikeluarkan oleh perusahaan. Agar manajemen inventory yang digunakan efektif, maka persoalan yang harus diselesaikan adalah menentukan jumlah pemesanan dan kapan pemesanan itu harus dilakukan. Untuk itu, harus diperhatikan adanya persediaan dasar sebagai penyeimbang keluar masuknya barang, persediaan pengaman (*safety stock*), serta tambahan persediaan (*anticipation stock*).

Dalam pengendalian persediaan, *Economic Order Quantity* (*EOQ*) merupakan konsep yang penting. Dalam hal ini akan ditentukan jumlah optimal

barang yang harus dipesan dalam periode tertentu berdasarkan biaya pemesanan dan penyimpanan. Selain itu, harus ditentukan pula batas pemesanan yang terdiri dari dua faktor yaitu lamanya mendapatkan persediaan atau waktu pengiriman yang diperlukan dan besarnya cadangan pengaman yang diinginkan.

2.5 Biaya Persediaan

Biaya persediaan merupakan biaya operasional yang dibutuhkan untuk pengadaan dan pengoperasian persediaan sesuai dengan manajemen persediaan yang digunakan, biaya ini biasanya dihitung selama masa perencanaan.

Pada umumnya dalam setiap model persediaan, yang termasuk dalam biaya persediaan adalah biaya pembelian, biaya pemesanan, biaya penyimpanan, dan biaya kekurangan persediaan. Menurut *Joko S (2004)*, yang termasuk biaya-biaya dalam sistem persediaan adalah

2.5.1 Biaya pengadaan (*procurement cost*)

Merupakan biaya yang dikeluarkan untuk memesan dan mengadakan barang sehingga siap untuk dipergunakan atau diproses lebih lanjut. Total biaya pengadaan ini meliputi biaya pembelian dan pengadaan itu sendiri.

- **Biaya pembelian**

Biaya pembelian merupakan biaya yang dikeluarkan untuk membeli barang. Biaya ini bersifat variabel karena bergantung dengan jumlah barang yang dipesan, sehingga disebut sebagai *unit variabel cost* atau *purchasing cost*. ketika harga barang yang dibeli bergantung dengan jumlah pembelian maka kondisi yang berlaku adalah quantity discount dimana semakin banyak barang yang dibeli harga pembeliannya

semakin kecil. Seringkali komponen biaya ini tidak dimasukkan ke dalam biaya persediaan karena diasumsikan konstan untuk suatu periode tertentu dan tidak berpengaruh terhadap jumlah optimal barang yang harus dipesan.

Untuk barang yang dibeli, biaya pembelian ini meliputi biaya pengangkutan / transportasi, sedangkan untuk barang yang diproduksi sendiri biaya pembelian ini termasuk upah karyawan, dan biaya bahan baku.

- **Biaya pengadaan barang**

Berdasarkan asal barang, biaya ini dibedakan menjadi dua macam yaitu, biaya pemesanan (*ordering cost*) dan biaya pembuatan (*setup cost*)

- a. Biaya Pemesanan (*ordering cost*)**

Merupakan biaya yang dikeluarkan untuk mendatangkan barang dari luar, meliputi biaya untuk menentukan pemasok, pembuatan pesanan, pengiriman pesanan, biaya pengangkutan, biaya penerimaan dan sebagainya. Biaya ini diasumsikan konstan setiap kali pemesanan.

- b. Biaya Pembuatan (*setup cost*)**

Merupakan pengeluaran yang timbul dalam mempersiapkan produksi suatu barang, meliputi biaya menyusun peralatan produksi, menyetel mesin, dan penyusunan barang digudang.

2.5.2 Biaya penyimpanan (*holding cost*)

Biaya penyimpanan adalah biaya yang timbul akibat adanya penyimpanan persediaan. Biaya-biaya yang termasuk dalam kelompok ini adalah :

a. Biaya memiliki persediaan awal (Modal)

Biaya ini timbul karena ada penumpukan barang digudang yang berarti penumpukan modal kerja.

b. Biaya Kerusakan dan Penyusutan

Penyusutan (jumlah dan ukuran) atau kerusakan dapat terjadi pada barang yang disimpan sehingga akan menambah biaya persediaan.

c. Biaya Gudang

Barang yang disimpan membutuhkan tempat sehingga timbul biaya gudang. Apabila gudang dan peralatan disewa maka biaya gudang adalah biaya sewa. Sedangkan bila perusahaan mempunyai gudang sendiri maka biaya gudang merupakan biaya perawatan barang dan biaya penyusutan.

d. Biaya Administrasi dan Pемindahan

Biaya ini dikeluarkan untuk administrasi pada saat pemesanan, penerimaan, penyimpanan, maupun pemindahan barang. Termasuk juga upah buruh dan biaya pengendalian peralatan.

e. Biaya Asuransi

Barang yang disimpan sering kali diasuransikan untuk menghindari hal-hal yang tidak diinginkan seperti kebakaran maupun pencurian.

f. Biaya Kadaluarsa

Perubahan teknologi dan model dapat mempengaruhi penurunan nilai barang yang disimpan misalkan saja barang elektronik.

2.5.3 Biaya kekurangan *stock* (*stock out cost*)

Biaya ini timbul ketika permintaan dari konsumen tidak dapat dipenuhi, dengan kata lain persediaan habis saat pesanan tersebut diterima. Biaya ini meliputi :

- *Lost sales cost*

Terjadi apabila pesanan konsumen yang diterima perusahaan tidak dapat dipenuhi karena jumlah persediaan tidak cukup, dan konsumen tidak bersedia menunggu sehingga pesanan dibatalkan. Biasanya biaya ini diukur dari jumlah kehilangan keuntungan dimasa mendatang (*goodwill erosion*).

- *Back order cost*

Terjadi apabila pesanan konsumen yang diterima perusahaan tidak dapat dipenuhi akibat persediaan habis, dan konsumen bersedia menunggu sampai pesanan dipenuhi sehingga perusahaan tidak kehilangan keuntungan. *Back order* ini menyebabkan tambahan biaya transportasi dan pemesanan. Biaya *back order* lebih mudah untuk diprediksi.

Dalam mengevaluasi manajemen persediaan, komponen biaya-biaya tersebut harus diperhatikan. Hanya biaya yang relevan saja yang perlu diperhatikan. Biaya yang tidak timbul karena kebijaksanaan persediaan dapat diabaikan, dan dalam prakteknya tergantung pada keputusan manajemen perusahaan tersebut.

2.6 Istilah-Istilah dalam Sistem *Inventory*

Dalam sistem *inventory* terdapat istilah yang sering digunakan adalah :

- *Lead time*

Lead time adalah waktu tunggu antara pemesanan hingga barang pesanan datang. *Lead time* dapat bersifat konstan maupun probabilistik dimana selang waktunya dipengaruhi oleh berbagai faktor sehingga dapat berubah-ubah setiap kali pemesanan.

- *Safety stock*

Safety stock adalah sejumlah bahan baku yang akan dialokasikan penggunaannya untuk mencegah terjadinya kekurangan bahan baku pada proses produksi ketika jumlah permintaan tidak pasti, atau karena keterlambatan supplier dalam pengiriman bahan baku. *Safety stock* digunakan apabila terjadi kekurangan material dalam proses produksi.

- *Re-order point*

Merupakan jumlah bahan baku minimum yang menunjukkan pentingnya dilakukan pemesanan kembali pada pihak *supplier*. Apabila bahan baku sudah mencapai *re-order point* ini, berarti persediaan bahan baku di tempat penyimpanan sudah menipis.

- *Replineshment*

Replineshment adalah pemesanan kembali. Kuantitas pemesanan berbeda-beda tergantung sistem yang digunakan oleh perusahaan. Kuantitas pesanan dapat berubah dengan interval pemesanan yang tepat maupun sebaliknya.

2.7 Model-Model *Inventory*

Model *inventory* dikelompokkan menjadi dua, yaitu model deterministik dan probabilistik. Pada model deterministik laju permintaan (*demand rate*) diasumsikan konstan, sedangkan pada model probabilistik laju permintaan berubah-ubah mengikuti fungsi distribusi probabilitas.

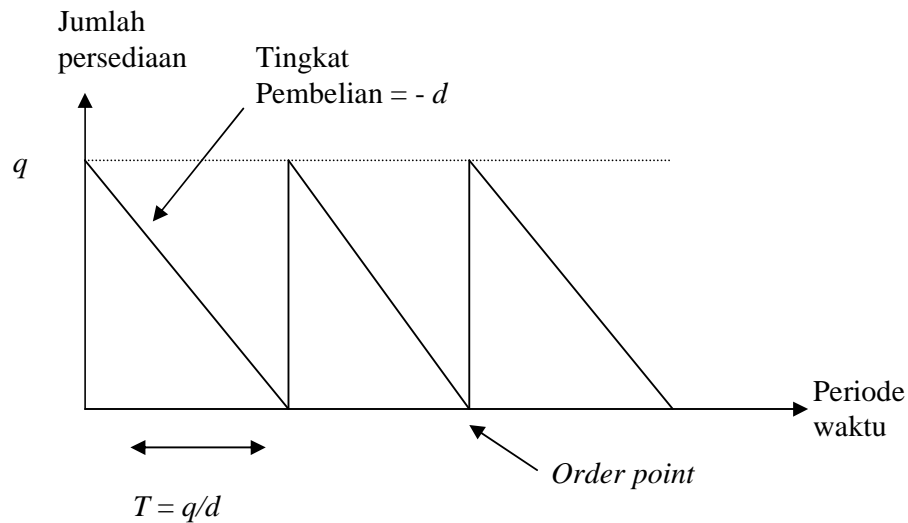
2.7.1 Model Pembelian dari model deterministik

Model *inventory* yang paling sederhana adalah model pembelian (*purchasing*). Asumsi yang digunakan pada model ini adalah barang yang disimpan adalah homogen, permintaan per periode konstan, biaya pemesanan konstan, *holding cost* ditentukan berdasarkan rata-rata persediaan, dan harga per unit konstan.

Model pembelian dibagi menjadi dua sesuai dengan kondisi yang berlaku yaitu:

2.7.1.1 Model Pembelian *No Shortage Allowed* (*EOQ* Dasar)

Tujuan dari model ini adalah menentukan jumlah pesanan optimal yang dapat meminimalkan total biaya persediaan. Pada model persediaan ini kondisi *shortage* tidak diperbolehkan, artinya persediaan dalam gudang harus selalu dapat memenuhi permintaan konsumen. Model ini digambarkan pada Gambar 2.1.



Gambar 2.1. Model Pembelian *No Shortage*

Pada model persediaan ini, total biaya persediaan merupakan jumlahan dari total biaya pemesanan, biaya pengadaan, dan biaya penyimpanan (Aminudin, 2005). Secara matematis *total cost* dapat dituliskan sebagai berikut

$$\begin{aligned}
 \text{Total cost (TC)} &= \text{ordering cost} + \text{procurement cost} + \text{holding cost} \\
 &= k + cq + \frac{q}{2} c_h T
 \end{aligned}
 \tag{2.1}$$

Berdasarkan Gambar 2.1, *cycle* pemesanan $T = \frac{q}{d}$. Sehingga total biaya per satuan waktu dapat dituliskan sebagai fungsi dari q . Secara matematis dituliskan sebagai berikut

$$\begin{aligned}
 \text{Total cost per satuan waktu } C(q) &= \frac{TC}{T} \\
 &= k \frac{d}{q} + c d + \frac{q}{2} c_h
 \end{aligned}
 \tag{2.2}$$

Jumlah pesanan optimum yang dapat meminimalkan total biaya persediaan secara umum dinotasikan q^* . Secara matematis q^* dapat dihitung dengan menurunkan persamaan (2.2) terhadap q dengan syarat turunan tersebut sama dengan nol.

$$\frac{dC(q)}{dq} = \frac{d\left(\frac{kd}{q} + dc + \frac{qc_h}{2}\right)}{dq}$$

$$0 = -\frac{kd}{q^2} + \frac{c_h}{2}$$

$$\frac{kd}{q^2} = \frac{c_h}{2}$$

$$q^* = \sqrt{\frac{2kd}{c_h}}$$

Dengan kata lain, q^* dapat dicapai ketika biaya pemesanan (*ordering cost*) sama dengan biaya perawatan (*holding cost*). Sehingga total biaya minimal adalah

$$C(q^*) = k \frac{d}{q^*} + c d + \frac{q^*}{2} c_h \quad (2.3)$$

Karena $T = \frac{q}{d}$, maka *cycle* pemesanan optimal yang dinotasikan T^* dapat

dihitung dengan cara

$$\begin{aligned} T^* &= \frac{q^*}{d} \\ &= \sqrt{\frac{2k}{c_h d}} \end{aligned}$$

Sedangkan kriteria untuk menghitung *Re-order point* (ROP) pada model ini adalah

1. Jika $L \leq T$ maka $ROP = L d$

2. jika $L > T$ maka $ROP = Ld - \left\lceil \frac{L}{T} \right\rceil q^*$, dengan $\left\lceil \frac{L}{T} \right\rceil$ bagian integer dari $\frac{L}{T}$

Keterangan :

TC : total cost / biaya total per satu cycle

k : *ordering cost* per pemesanan

c : harga barang per unit

d : jumlah barang yang dibutuhkan dalam satu periode

q : jumlah pemesanan

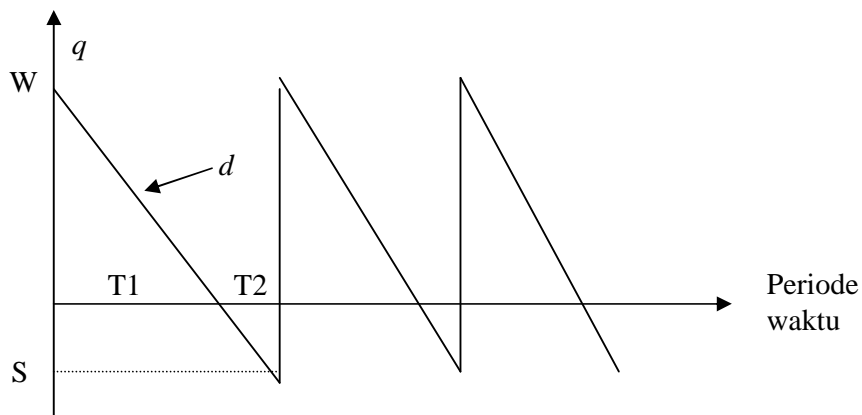
c_h : *holding cost* per unit

T : waktu pemesanan

L : *lead time*

2.7.1.2 Model Pembelian *Shortage Allowed*

Pada model pembelian ini asumsi dasar yang dipakai sama dengan model pembelian *EOQ* dasar, hanya saja pada model ini kondisi *shortage* diperbolehkan. Artinya kekurangan *stock* diperbolehkan selama konsumen bersedia menunggu pesanan datang. Model pembelian ini digambarkan pada Gambar 2.2.



Gambar 2.2. Model Pembelian *Shortage Allowed*

Berdasarkan gambar 2.2 diperoleh hubungan berikut

$$q = W + S$$

$$T1 = W / d = (q-S) / d$$

$$T2 = S / d$$

Pada model persediaan ini, total biaya persediaan merupakan jumlahan dari total biaya pemesanan, biaya pengadaan, biaya penyimpanan, dan biaya kekurangan stock (Aminudin, 2005). Secara matematis *total cost* dapat dituliskan sebagai berikut

$$\begin{aligned} \text{Total Cost (TC)} &= \text{ordering cost} + \text{procurement cost} + \text{holding cost} + \text{shortage} \\ &\text{cost} \\ &= k + c q + \frac{W}{2} c_h T1 + \frac{S}{2} c_s T2 \end{aligned} \quad (2.4)$$

Berdasarkan gambar 2.2, cycle pemesanan ketika barang masih ada $T1 = \frac{W}{d}$ dan cycle pemesanan ketika barang habis $T2 = \frac{S}{d}$. Sehingga total biaya per satuan waktu dapat dituliskan sebagai fungsi dari q dan S . Secara matematis dituliskan sebagai berikut

$$\begin{aligned} \text{Total cost per satuan waktu } C(q,S) &= \frac{TC}{T} \\ &= \frac{kd}{q} + cd + (q-S)^2 \frac{c_h}{2q} + \frac{S^2}{2q} C_s \end{aligned} \quad (2.5)$$

Jumlah pesanan optimum yang dapat meminimalkan total biaya persediaan secara umum dinotasi q^* dan jumlah maksimum *backorder* dinotasikan S^* . Secara matematis q^* dan S^* dapat dihitung dengan menurunkan persamaan (2.5)

terhadap q dan S dengan syarat turunan tersebut sama dengan nol, sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}
 \text{(i)} \quad \frac{\partial C(q, S)}{\partial S} &= \frac{\partial(kd/q + cd + (q-S)^2 \frac{c_h}{2q} + \frac{S^2}{2q} c_s)}{\partial S} \\
 0 &= \frac{-c_h(2q-2S)2q}{4q^2} + \frac{2c_s S 2q}{4q^2} \\
 0 &= \frac{-c_h(q-S)}{q} + \frac{Sc_s}{q} \\
 \frac{c_h(q-S)}{q} &= \frac{Sc_s}{q} \\
 S &= \frac{c_h q}{(c_h + c_s)} \tag{2.6}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{(ii)} \quad \frac{\partial C(q, S)}{\partial q} &= \frac{\partial(kd/q + cd + (q-S)^2 \frac{c_h}{2q} + \frac{S^2}{2q} c_s)}{\partial q} \\
 0 &= \frac{-kd}{q^2} + \frac{2qc_h(q-S) - c_h(q-S)^2}{2q^2} - \frac{S^2 c_s}{2q^2} \\
 0 &= \frac{-kd}{q^2} + \frac{c_h(q-S)\{2q-q+S\}}{2q^2} - \frac{S^2 c_s}{2q^2} \\
 0 &= \frac{-kd}{q^2} + \frac{c_h(q-S)\{q+S\}}{2q^2} - \frac{S^2 c_s}{2q^2} \\
 0 &= \frac{-kd}{q^2} + \frac{c_h(q^2 - S^2)}{2q^2} - \frac{S^2 c_s}{2q^2}
 \end{aligned}$$

$$-2kd + c_h(q^2 - S^2) - S^2 c_s = 0$$

$$c_h q^2 - S^2(c_h + c_s) = 2kd$$

$$c_h q^2 = 2kd + S^2(c_h + c_s) \tag{2.7}$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (2.6) ke persamaan (2.7) diperoleh

$$q^2 = \frac{2kd(c_h + c_s)}{c_h c_s}$$

$$q^* = \sqrt{\frac{2kd}{c_h}} \sqrt{\frac{c_h + c_s}{c_s}}$$

Dan dengan mensubstitusikan q^* ke dalam persamaan (2.6) diperoleh

$$S^* = \sqrt{\frac{2kd}{c_h}} \sqrt{\frac{c_s}{c_h + c_s}}$$

Sehingga total biaya minimal adalah

$$C(q^*, S^*) = \frac{kd}{q^*} + cd + (q^* - S^*)^2 \frac{c_h}{2q^*} + \frac{S^{*2}}{2q^*} c_s$$

Sedangkan kriteria untuk menghitung *Re-order point* (ROP) pada model ini adalah

1. Jika $L < T_2$ maka $ROP = (T_2 - L) d$
2. jika $L > T_2$ maka $ROP = L d - S$
3. jika $L > T$ maka $ROP = Ld - \left\lceil \frac{L}{T} \right\rceil q^* - S$ dengan $\left\lceil \frac{L}{T} \right\rceil$ bagian integer dari $\frac{L}{T}$.

Keterangan :

TC : total cost / biaya total per satu *cycle*

k : *ordering cost* per pemesanan

c : harga barang per unit

d : jumlah barang yang dibutuhkan dalam satu periode

q : jumlah pemesanan

c_h : *holding cost* per unit

T_1 : waktu pemesanan barang ketika persediaan masih ada

T2 : waktu pemesanan barang ketika persediaan habis

S : jumlah pesanan ketika barang habis

W : jumlah pesanan ketika barang masih ada

c_s : biaya hilangnya *stock* per unit per satuan waktu

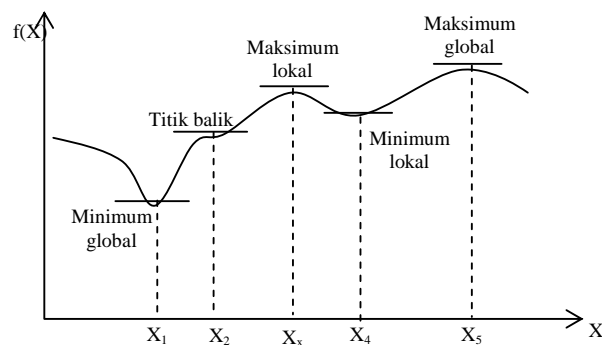
L : *lead time*

2.8 Metode Optimasi Klasik

Metode ini digunakan untuk mendapatkan nilai maksimum atau minimum dari fungsi peubah tunggal, fungsi beberapa peubah, dan fungsi beberapa peubah berkendala dengan asumsi fungsi-fungsi tersebut kontinu pada turunan pertama, kedua, maupun parsialnya.

Misalkan terdapat fungsi peubah tunggal $f(x)$ seperti pada Gambar 2.3 syarat perlu agar $f(x)$ bernilai optimal (maksimum atau minimum) di $x = x_0$ adalah

$$\frac{df(x)}{dx} = 0 \text{ pada } x = x_0$$



Gambar 2.3. fungsi yang memiliki beberapa nilai maksimum dan minimum

Berdasarkan Gambar 2.3, terdapat lima penyelesaian yang memenuhi persyaratan tersebut, selanjutnya kelima titik tersebut disebut titik kritis (*critical points*). Selanjutnya harus dicek syarat cukup agar didapatkan penyelesaian optimal yaitu dengan memeriksa turunan keduanya. Apabila :

1. $\frac{d^2 f(x)}{dx^2} > 0$ pada $x = x_0$, maka x_0 adalah minimum lokal.

Artinya $f(x_0) \leq f(x)$ untuk seluruh x yang cukup dekat dengan x_0

2. $\frac{d^2 f(x)}{dx^2} < 0$ pada $x = x_0$, maka x_0 adalah maksimum lokal

Artinya $f(x_0) \geq f(x)$ untuk seluruh x yang cukup dekat dengan x_0

3. $\frac{d^2 f(x)}{dx^2} = 0$ pada $x = x_0$, maka x_0 adalah *inflection point* (titik balik)

Artinya tidak ada penyelesaian dari $f(x)$

4. Suatu titik x_0 dikatakan *minimum global* jika $f(x_0) \leq f(x)$ untuk seluruh x dalam daerah fisibel. Untuk mendapatkan *minimum global* perlu membandingkan semua *minimum lokal*, dan mengidentifikasi salah satu nilai terkecil dari $f(X)$. Jika nilai tersebut merupakan nilai terkecil $f(X)$ dimana X berada pada interval daerah fisibel tertentu, maka titik tersebut adalah *minimum global*.

5. suatu titik x_0 dikatakan *maksimum global* jika $f(x_0) \geq f(x)$ untuk seluruh x dalam daerah fisibel. Untuk mendapatkan *maksimum global* perlu membandingkan semua maksimum lokal, dan mengidentifikasi salah satu nilai terbesar dari $f(x)$. jika nilai tersebut merupakan nilai terbesar $f(x)$ maka titik tersebut adalah titik *maksimum global*.

2.9 Kekonvekan

Didalam bukunya, Lieberman (1994) memberikan definisi tentang himpunan konvek (himpunan cembung) seperti berikut :

Definisi 2.9.1

Himpunan cembung adalah kumpulan titik-titik sehingga, untuk setiap pasangan dalam kumpulan (*collection*), seluruh segmen garis yang menghubungkan kedua titik juga berada dalam segmen garis.

Sedangkan menurut Mital (1983), definisi tentang himpunan konvek, fungsi konvek, dan fungsi konkaf adalah sebagai berikut :

Definisi 2.9.2

Himpunan S disebut himpunan konvek, jika $\forall x, y \in S$ berlaku $\alpha x + (1 - \alpha)y \in S, \forall 0 \leq \alpha \leq 1$. Dengan kata lain, himpunan S disebut himpunan konvek jika $\forall x, y \in S$ maka segmen garis yang menghubungkan x dan y juga ada di S .

Definisi 2.9.3

Suatu fungsi f dikatakan konvek pada himpunan di S jika $f(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y), 0 \leq \alpha \leq 1; \forall x, y \in S$. Dengan kata lain, fungsi f disebut fungsi konvek jika segmen garis yang menghubungkan titik $(x, f(x))$ dan $(y, f(y))$ terletak pada atau diatas f .

Secara analog, fungsi f disebut konkav pada S jika $f(\alpha x + (1 - \alpha)y) \geq \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y), 0 \leq \alpha \leq 1; \forall x, y \in S$.

Kekonvekan suatu fungsi dapat digunakan untuk mendefinisikan masalah pemrograman konvek. Yaitu mengoptimalkan $f(x)$, $x \in S$ dimana S himpunan konvek dan $f(x)$ merupakan fungsi konvek.

Teorema 2.9

Jika x_0 adalah solusi lokal dari masalah pemrograman konvek maka x_0 adalah solusi global.

Bukti : diketahui x_0 adalah solusi lokal dari masalah pemrograman konvek.

Andaikan x_0 bukan solusi global, artinya $\exists y$ sedemikian sehingga $f(y) < f(x_0)$

karena f fungsi konvek, maka untuk $0 < \alpha < 1$ berlaku :

$$\begin{aligned} f(\alpha x_0 + (1 - \alpha)y) &\leq \alpha f(x_0) + (1 - \alpha)f(y) \\ &< \alpha f(x_0) + (1 - \alpha)f(x_0) \\ &< f(x_0) \end{aligned}$$

Hal ini memperlihatkan bahwa ada titik lain yang dekat dengan x_0 yang mempunyai nilai lebih kecil dari $f(x_0)$. titik tersebut berada dalam S sebab S konvek, sehingga hal ini kontradiksi dengan x_0 lokal minimal. Jadi x_0 adalah global minimal.

2.10. Hubungan antara kekonvekan dan turunan

Jika f adalah fungsi dimensi satu dan differensiabel dua kali maka

- f disebut konvek pada S jika hanya jika $\frac{d^2 f(x)}{dx^2} \geq 0; \forall x \in S$
- f disebut *strictly* konvek pada S jika $\frac{d^2 f(x)}{dx^2} > 0; \forall x \in S$

BAB III

PEMBAHASAN

3.1 Pembentukan Model

3.1.1 Identifikasi Masalah

Seiring dengan perkembangan dunia bisnis, banyak perubahan pola pikir yang terjadi pada sistem manajerial yang diterapkan dalam pengendalian persediaan (*inventory control*). Perubahan ini akan berpengaruh dalam transaksi bisnis yang dijalankan terutama terhadap proses pengambilan keputusan terkait masalah persediaan. Salah satu perubahan yang ada adalah model persediaan dengan penundaan pembayaran pembelian. Biasanya perusahaan melunasi pembayaran segera setelah pesanan datang, namun sekarang ini perusahaan diperbolehkan melakukan penundaan pembayaran pembelian dalam periode waktu tertentu sesuai kesepakatan dengan pihak *supplier*. Model yang digunakan dalam pembahasan ini adalah model persediaan bergantung jumlah pesanan dengan kondisi *shortage* dan penundaan pembayaran pembelian seperti yang telah dijelaskan pada bab pendahuluan.

3.1.2 Asumsi-asumsi, parameter-parameter, dan variabel keputusan

3.1.2.1 Asumsi Model

Dalam pembentukan model persediaan ini, asumsi yang digunakan adalah

1. Model ini hanya berlaku untuk satu jenis barang yang sama (homogen)
2. Barang segera datang setelah pemesanan dilakukan (*Lead time*= 0)
3. Permintaan bersifat deterministik, dinotasikan $R(t)$ dengan

$$R(t) = \alpha \quad ; \quad 0 < t < T$$

4. *Shortage* (kehabisan *stock*) dan *backlogged* diperbolehkan
5. Periode pemesanan infinite
6. Periode penundaan pembayaran pembelian sebesar M dengan

$$M = \begin{cases} M_1 & \text{Jika } 0 < q < q_0 \\ M_2 & \text{Jika } q > q_0 \end{cases}$$

Dimana q adalah jumlah pesanan, q_0 syarat awal dari q dan

$$M_2 > M_1.$$

7. Ketika pemesanan dilakukan, pembayaran pada masa penundaan sebelumnya sudah dilunasi ($M < T$).

3.1.2.2 Parameter Model

Bilangan dari populasi yang menjadi acuan dan akan ditaksir dari bilangan statistik disebut Parameter. Dalam model ini, parameter yang digunakan adalah komponen biaya persediaan meliputi :

1. Biaya pemesanan per unit, dinotasikan \mathbf{K}
2. Biaya pembelian per unit, dinotasikan \mathbf{P}
3. Biaya pengadaan barang (*holding cost*), dinotasikan \mathbf{h}
4. *Shortage cost* per unit, dinotasikan \mathbf{s}
5. Bunga (*interest*) yang diperoleh perusahaan, dinotasikan \mathbf{I}_e
6. Bunga (*interest*) yang dikenakan pada persediaan, dinotasikan \mathbf{I}_r
dengan $\mathbf{I}_r \geq \mathbf{I}_e$
7. Periode penundaan pembayaran pembelian, dinotasikan \mathbf{M} dengan
 $0 \leq M < T$
8. Jumlah permintaan barang, dinotasikan α

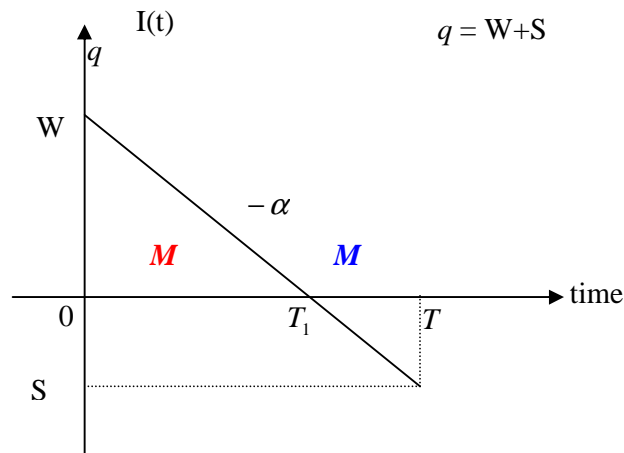
3.1.2.3 Variabel Keputusan

Variabel keputusan dapat didefinisikan sebagai suatu simbol yang akan dicari nilainya. Variabel keputusan yang digunakan dalam model persediaan ini adalah :

1. Waktu pada saat persediaan habis, dinotasikan T_1 dengan $0 \leq T_1 < T$
2. Periode pemesanan barang, dinotasikan T

3.1.3 Pembentukan model berdasarkan Parameter

Pada bab II telah dijelaskan model persediaan dengan kondisi *shortage*, selanjutnya akan dibentuk model persediaan yang mempertimbangkan kondisi *shortage* dengan adanya penundaan pembayaran pembelian. Model persediaan ini dapat digambarkan pada gambar 3.1 berikut :



Gambar 3.1 Model Persediaan dengan kondisi *Shortage* dan Penundaan Pembayaran Pembelian

Dari Gambar 3.1, terlihat bahwa pada interval $(0, T)$ jumlah pesanan sebesar q , tingkat persediaan $I(t)$ akan berubah seiring bertambahnya waktu. Karena permintaan diasumsikan diketahui secara pasti dan bersifat konstan maka setiap bertambahnya t , jumlah persediaan dalam gudang $I(t)$ akan berkurang sebesar α . Hal ini menjelaskan bahwa laju perubahan persediaan terhadap waktu adalah konstan, dan mengapa garis yang melambangkan permintaan berupa garis linear. Secara matematis, Perubahan tingkat persediaan $I(t)$ terhadap waktu adalah

$$\frac{dI(t)}{dt} = -\alpha \quad ; \quad 0 < t < T$$

Dengan kondisi batas $I(T_1) = 0$, sehingga

$$I(t) = \int -\alpha dt$$

$$= -\alpha t + C$$

$$I(t) = -\alpha t + C \quad I(T_1) = 0.$$

$$I(T_1) = -\alpha T_1 + C$$

$$0 = -\alpha T_1 + C$$

$$\alpha T_1 = C$$

Dengan kata lain, $I(t) = -\alpha t + \alpha T_1$

$$= \alpha(T_1 - t) \quad 0 < t < T \quad (3.1)$$

Karena waktu pemesanan diasumsikan infinite, maka pada interval $(0, T)$ ada dua kondisi penundaan pembayaran pembelian M yang mungkin terjadi. Pertama, apabila penundaan pembayaran pembelian dilakukan ketika persediaan

mulai berkurang yaitu pada $(M \leq T_1)$. Kedua, penundaan pembayaran pembelian dilakukan ketika persediaan dalam gudang habis yaitu pada $(M > T_1)$. Kondisi-kondisi tersebut berpengaruh terhadap besarnya bunga yang didapatkan perusahaan dari *sale revenue* (**IE**) dan bunga yang harus dibayarkan kepada *supplier* (**IP**) akibat adanya penundaan pembayaran pembelian. Model persediaan yang menggambarkan rata-rata total biaya per satuan waktu untuk kasus *shortage* dan penundaan pembayaran pembelian M adalah

$$C^i_M(T_1, T) = \frac{K + HC + SC + IP_i - IE_i}{T} \quad ; i = 1, 2 \quad (3.2)$$

Keterangan :

$C^i_M(T_1, T)$ = total biaya persediaan dengan waktu penundaan M pada

kondisi ke-i

IP_i = bunga yang dibayarkan kepada *supplier* pada kondisi ke-i

IE_i = bunga yang didapatkan perusahaan dari *sale revenue* pada kondisi ke-i.

Dari Gambar 3.1, pada interval $(0, T_1)$ persediaan dalam gudang masih tersedia akan tetapi nilainya semakin berkurang seiring bertambahnya waktu. Pada interval ini perusahaan mengeluarkan biaya untuk perawatan dan penyimpanan barang di gudang, sehingga komponen biaya yang muncul adalah *holding cost*. Pada interval $(0, T_1)$, dibentuk partisi-partisi persegi panjang dengan alas $[t_{i-1}, t_i]$ dan tinggi $I(t_{i-1})$. Luas dari persegi panjang tersebut adalah $I(t_{i-1}) \Delta t$.

Gabungan S_n dari semua persegi panjang tersebut membentuk poligon dalam, jika

$A(S_n)$ menyatakan luas daerah dibawah kurva pada interval $(0, T_1)$ maka

$$\begin{aligned} A(S_n) &= I(t_0)\Delta t + I(t_1)\Delta t + I(t_2)\Delta t + \dots + I(t_{n-1})\Delta t \\ &= \sum_{i=0}^n I(t_i)\Delta t_i \end{aligned}$$

$A(S_n)$ merupakan jumlah persediaan yang ada pada selang $(0, T_1)$, sehingga nilai

Expected Holding Cost adalah

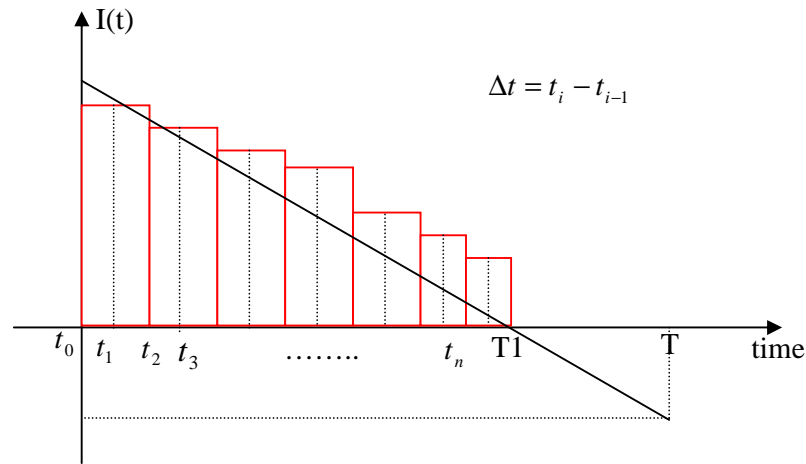
$$\begin{aligned} HC &= \text{biaya pengadaan / unit x jumlah persediaan pada } (0, T_1) \\ &= h \cdot A(S_n) \\ &= h \lim_{n \rightarrow \infty} A(S_n) \\ &= h \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n I(t_i)\Delta t_i \\ &= h \int_0^{T_1} I(t)dt \end{aligned}$$

Karena $I(t)$ mewakili jumlah persediaan dan dengan memperhatikan persamaan

(3.1), maka

$$\begin{aligned} HC &= h \int_0^{T_1} \alpha(T_1 - t)dt \\ &= h \alpha \left(T_1 t - \frac{1}{2} t^2 \right) \Big|_0^{T_1} \\ &= \frac{h}{2} \alpha T_1^2 \end{aligned}$$

Pembentukan komponen *holding cost* dapat digambarkan pada Gambar 3.2



Gambar 3.2 Penentuan *Holding cost*

Dari Gambar 3.1, pada interval (T_1, T) , persediaan dalam gudang sudah habis dan perusahaan mengalami keadaan *shortage* yaitu keadaan dimana persediaan dalam gudang tidak mampu memenuhi permintaan (kekurangan stock). Akibatnya perusahaan harus mengeluarkan biaya untuk memesan barang kepada *supplier* untuk memenuhi permintaan, sehingga komponen biaya yang muncul adalah *shortage cost*. Pada interval (T_1, T) , dibentuk partisi berupa persegi panjang dengan alas $[t_{i-1}, t_i]$ dan tinggi $I(t_{i-1})$. Luas dari persegi panjang tersebut adalah $I(t_{i-1}) \Delta t$. Pada kondisi ini nilai $I(t_{i-1})$ negatif. Gabungan R_n dari semua persegi panjang tersebut membentuk poligon dalam, jika $A(R_n)$ menyatakan luas daerah di atas kurva pada interval (T_1, T) maka

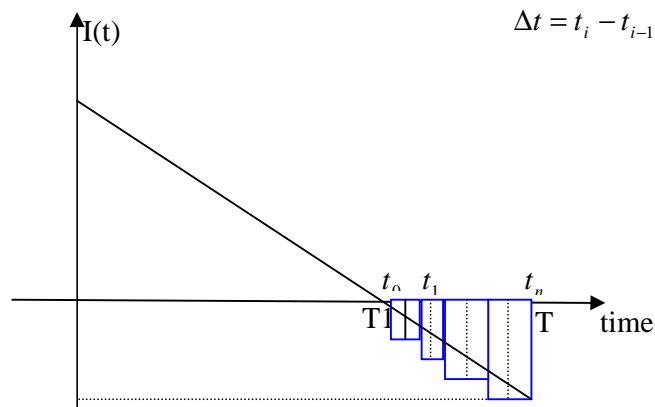
$$\begin{aligned}
 A(R_n) &= -I(t_0)\Delta t - I(t_1)\Delta t - I(t_2)\Delta t - \dots - I(t_{n-1})\Delta t \\
 &= -\sum_{i=0}^n I(t_i)\Delta t_i
 \end{aligned}$$

$A(R_n)$ merupakan jumlah persediaan yang dibutuhkan pada selang (T_1, T) .

Hal ini ditunjukkan dengan adanya tanda negatif, sehingga nilai *Expected Shortage Cost* adalah

$$\begin{aligned}
 SC &= \text{biaya shortage / unit} \times \text{jumlah persediaan pada } (T_1, T) \\
 &= s A(R_n) \\
 &= s \lim_{n \rightarrow \infty} A(R_n) \\
 &= s \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n I(t_i) \Delta t_i \\
 &= s \int_{T_1}^T \alpha(T_1 - t) dt \\
 &= s \alpha \left(T_1 t - \frac{1}{2} t^2 \right) \Big|_{T_1}^T \\
 &= \frac{s}{2} \alpha (T_1 - T)^2
 \end{aligned}$$

Pembentukan komponen *shortage cost* dapat digambarkan pada Gambar 3.3



Gambar 3.3 Penentuan Biaya *Shortage*

Ketika penundaan pembayaran pembelian dilakukan pada saat jumlah persediaan mulai berkurang (mendekati nol), periode dengan jumlah *stock* masih dapat memenuhi permintaan *customer* lebih besar daripada periode penundaan pembayaran pembelian ($M \leq T_1$).

Menurut gambar 3.1, pada $(0, T_1)$ perusahaan mendapatkan bunga yang diperoleh dari *sale revenue* sebesar \mathbf{I}_e . Bunga yang didapatkan perusahaan pada kondisi ini dapat dihitung dengan cara

$\mathbf{IE}_1 =$ harga beli / unit x bunga pendapatan/unit x banyaknya

persediaan pada $(0, T_1)$

$$= P \mathbf{I}_e \int_0^{T_1} \alpha(T_1 - t) dt$$

$$= P \mathbf{I}_e \alpha \left(T_1 t - \frac{t^2}{2} \right) \Big|_0^{T_1}$$

$$= P \mathbf{I}_e \alpha \frac{T_1^2}{2}$$

Selain itu, karena masih berada pada masa penundaan (M, T_1) maka untuk setiap *stock* barang yang tidak terjual dikenakan bunga sebesar \mathbf{I}_r . Jadi total bunga yang dikenakan pada persediaan adalah

$\mathbf{IP}_1 =$ harga beli/unit x bunga persediaan / unit x jumlah persediaan

pada (M, T_1)

$$= P \mathbf{I}_r \int_M^{T_1} \alpha(T_1 - t) dt$$

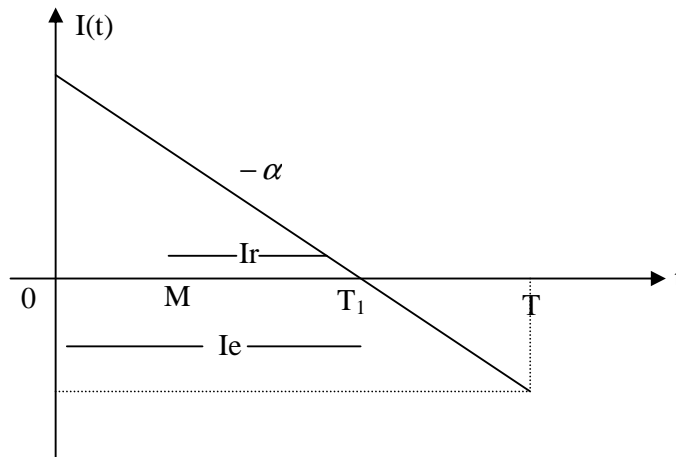
$$= P \mathbf{I}_r \alpha \left(T_1 t - \frac{t^2}{2} \right) \Big|_M^{T_1}$$

$$\begin{aligned}
&= P I_r \frac{\alpha}{2} (T_1^2 - 2MT_1 + M^2) \\
&= \frac{P I_r \alpha}{2} (T_1 - M)^2
\end{aligned}$$

Dengan memperhatikan persamaan (3.2), maka rata-rata total biaya persediaan per satuan waktu dengan kondisi *shortage* dan penundaan pembayaran pembelian dilakukan saat persediaan mulai berkurang dapat ditulis

$$\begin{aligned}
C^1_M(T_1, T) &= \frac{K + HC + SC + IP_1 - IE_1}{T} \\
&= \frac{1}{T} \left\{ K + \frac{h}{2} \alpha T_1^2 + \frac{s}{2} \alpha (T_1 - T)^2 + \frac{P I_r \alpha}{2} (T_1 - M)^2 - P I_e \alpha \frac{T_1^2}{2} \right\} \quad (3.3)
\end{aligned}$$

Model persediaan dengan kondisi ini diilustrasikan dalam gambar 3.4.



Gambar 3.4 Model persediaan dengan penundaan pembayaran ketika persediaan mulai berkurang (kondisi 1)

Sedangkan apabila penundaan pembayaran pembelian dilakukan pada saat persediaan habis, maka periode penundaan pembayaran pembelian akan lebih besar daripada periode dimana jumlah *stock* tersedia ($M > T_1$). Pada gambar 3.5,

selama $(0, M)$ perusahaan akan mendapatkan bunga dari *sale revenue* sebesar I_e . Pada $(0, T_1)$ perusahaan mendapatkan bunga dari hasil penjualan secara utuh, sedangkan pada (T_1, M) terjadi kondisi *shortage*. Karena $T_1 < M < T$ maka perusahaan mendapatkan bunga dari hasil penjualan barang dengan catatan *customer* bersedia menunggu pesanan datang. Dengan memperhatikan persamaan (3.1) maka besar bunga yang akan didapatkan perusahaan pada kondisi ini adalah IE_2 = harga beli / unit x bunga pendapatan/unit x banyaknya persediaan $(0, M)$

$$\begin{aligned}
 IE_2 &= P I_e \int_0^{T_1} I(t) dt + \int_0^{T_1} (M - T_1) \alpha dt \\
 &= P I_e \left\{ \int_0^{T_1} \alpha (T_1 - t) dt + (M - T_1) \int_0^{T_1} \alpha dt \right\} \\
 &= P I_e \alpha \left\{ (T_1 t - \frac{t^2}{2}) \Big|_0^{T_1} + (M - T_1) t \Big|_0^{T_1} \right\} \\
 &= P I_e \alpha \left\{ (T_1^2 - \frac{T_1^2}{2}) + (M - T_1) T_1 \right\} \\
 &= P I_e \alpha \left\{ T_1 M - \frac{T_1^2}{2} \right\}
 \end{aligned}$$

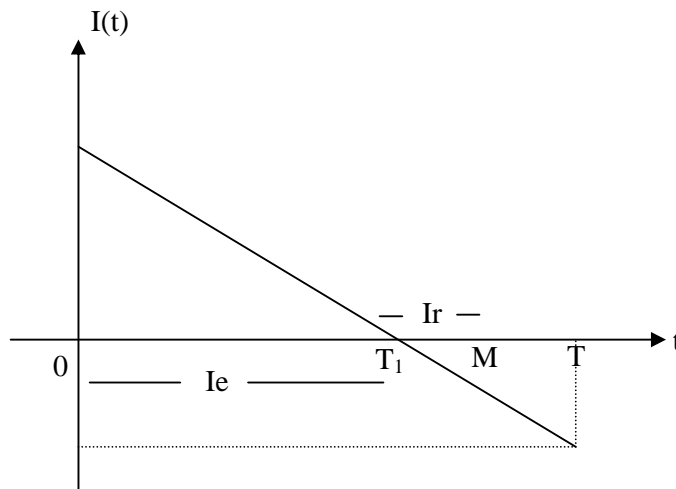
Dan karena masa penundaan M berada pada (T_1, T) maka perusahaan tidak membayar bunga yang dikenakan pada persediaan I_r , karena jumlah persediaan sudah habis. Akibatnya pada kondisi ini nilai $IP_2 = 0$.

Dengan melihat kembali persamaan (3.2), rata-rata total biaya persediaan per satuan waktu dengan kondisi *shortage* dan penundaan pembayaran pembelian dilakukan setelah persediaan habis dapat dituliskan

$$C^2_M(T_1, T) = \frac{K + HC + SC + IP_2 - IE_2}{T}$$

$$= \frac{1}{T} \left\{ K + \frac{h}{2} \alpha T_1^2 + \frac{s}{2} \alpha (T_1 - T)^2 - P I_e \alpha T_1 \left(M - \frac{T_1^2}{2} \right) \right\} \quad (3.4)$$

Model persediaan dengan kondisi tersebut diilustrasikan dalam gambar 3.5 berikut.



Gambar 3.5 Model persediaan dengan penundaan pembayaran ketika persediaan habis (kondisi 2)

3.2 Penentuan Waktu Pemesanan (T) dan Waktu Persediaan Habis (T_1).

Karena tujuan dari model pengendalian ini adalah meminimalkan total biaya persediaan, maka harus dicari terlebih dahulu periode pemesanan (T) dan periode habisnya persediaan (T_1) yang mengakibatkan total biaya persediaan minimal. Secara matematis, periode optimal habisnya persediaan dinotasikan T_1^* dan periode pemesanan optimal dinotasikan T^* dapat dihitung dengan

menurunkan persamaan (3.3) dan persamaan (3.4) terhadap T dan T_1 dengan syarat turunan tersebut sama dengan nol.

3.2.1 Penentuan T dan T_1 untuk kondisi 1 ($M \leq T_1$)

Untuk kasus pertama yaitu ketika penundaan pembayaran dilakukan pada saat persediaan mulai habis ($M \leq T_1$) berlaku

$$\frac{\partial C^1_M(T_1, T)}{\partial T_1} = 0 \quad \text{dan} \quad \frac{\partial C^1_M(T_1, T)}{\partial T} = 0$$

Karena

$$\frac{\partial C^1_M(T_1, T)}{\partial T_1} = \frac{\partial \left(\frac{K}{T} + \frac{1}{2T} h \alpha T_1^2 + \frac{\alpha s}{2T} (T_1 - T)^2 + \frac{PI_r \alpha}{2T} (T_1 - M)^2 - \frac{PI_e \alpha T_1^2}{2T} \right)}{\partial T_1}$$

Maka,

$$\frac{2h\alpha T_1 2T}{4T^2} + \frac{\alpha s T (-2T + 2T_1)}{2T^2} + \frac{PI_r \alpha T (2T_1 - 2M)}{2T^2} - \frac{2PI_e \alpha T_1 T}{2T^2} = 0$$

$$\frac{h\alpha T_1 + \alpha s (T_1 - T) + PI_r \alpha (T_1 - M) - PI_e \alpha T_1}{T} = 0$$

$$\alpha \{ hT_1 + s(T_1 - T) + PI_r (T_1 - M) - PI_e T_1 \} = 0$$

$$hT_1 + sT_1 - sT + PI_r T_1 - PI_r M - PI_e T_1 = 0$$

$$(h + s + PI_r - PI_e) T_1 = sT + PI_r M$$

$$T_1 = \frac{sT + PI_r M}{(h + s + P(I_r - I_e))} \quad (3.5)$$

Selanjutnya, karena

$$\frac{\partial C^1_M(T_1, T)}{\partial T} = \frac{\partial \left(\frac{K}{T} + \frac{1}{2T} h \alpha T_1^2 + \frac{\alpha s}{2T} (T_1 - T)^2 + \frac{PI_r \alpha}{2T} (T_1 - M)^2 - \frac{PI_e \alpha T_1^2}{2T} \right)}{\partial T}$$

Maka berlaku

$$\begin{aligned}
& \frac{-K}{T^2} - \frac{\alpha h T_1^2}{2T^2} - \frac{\alpha s (T_1 - T)^2}{2T^2} - \frac{\alpha P I_r (T_1 - M)^2}{2T^2} + \frac{\alpha P I_e T_1^2}{2T^2} + \frac{\alpha s (T - T_1)}{T} = 0 \\
& \frac{\alpha s (T - T_1)}{T} = \frac{K}{T^2} + \frac{\alpha h T_1^2}{2T^2} + \frac{\alpha s (T_1 - T)^2}{2T^2} + \frac{\alpha P I_r (T_1 - M)^2}{2T^2} - \frac{\alpha P I_e T_1^2}{2T^2} \\
& \alpha s T (T - T_1) = K + \frac{\alpha h T_1^2}{2} + \frac{\alpha s (T_1 - T)^2}{2} + \frac{\alpha P I_r (T_1 - M)^2}{2} - \frac{\alpha P I_e T_1^2}{2} \\
& 2sT(T - T_1) = \frac{2K}{\alpha} + hT_1^2 + s(T_1 - T)^2 + P I_r (T_1 - M)^2 - P I_e T_1^2 \\
& sT^2 = \frac{2K}{\alpha} + (h + s + P I_r - P I_e) T_1^2 - P I_r M (2T_1 - M) \\
& sT^2 = \frac{2K}{\alpha} + (h + s + P(I_r - I_e)) T_1^2 - P I_r M (2T_1 - M) \\
& T^2 = \frac{2K}{\alpha s} + \frac{(h + s + P(I_r - I_e)) T_1^2}{s} - \frac{P I_r M}{s} (2T_1 - M) \tag{3.6}
\end{aligned}$$

Dengan mensubstitusikan nilai T_1 yang didapatkan dari persamaan (3.5) ke persamaan (3.6) diperoleh

$$T^2 = \frac{2K}{\alpha s} + \frac{(sT + 2P I_r M)^2}{s(h + s + P(I_r - I_e))} + \frac{P I_r M^2}{s}$$

Setelah diselesaikan dengan bantuan software MAPLE 8 diperoleh :

$$T = \frac{\sqrt{\alpha s (h + P(I_r - I_e)) (P I_r \alpha M^2 (h + s - P I_e) + 2K (h + s + P(I_r - I_e)))}}{\alpha s (h + P(I_r - I_e))} \tag{3.7}$$

T merupakan periode pemesanan yang diharapkan dapat menyebabkan nilai total biaya persediaan minimal jika penundaan pembayaran dilakukan ketika persediaan mulai berkurang. Sedangkan periode habisnya persediaan yang diharapkan menyebabkan nilai total biaya persediaan minimal (T_1) untuk kondisi

ini dapat dihitung dengan cara mensubstitusikan persamaan(3.7) ke persamaan (3.5).

$$T_1 = \frac{sT + PI_r M}{(h + s + P(I_r - I_e))}$$

$$= \frac{PI_r \alpha M (h + P(I_r - I_e)) + \sqrt{\alpha s (h + P(I_r - I_e)) (2K (h + s + P(I_r - I_e)) + PI_r \alpha M^2 (h + s - PI_e))}}{\alpha (h + P(I_r - I_e)) (s + h + P(I_r - I_e))} \quad (3.8)$$

3.2.2 Penentuan T dan T_1 untuk Kondisi 2 ($M > T_1$)

Untuk kondisi kedua, dimana penundaan pembayaran dilakukan pada saat persediaan habis ($M > T_1$), berlaku

$$\frac{\partial C^2_M(T_1, T)}{\partial T_1} = 0 \quad \text{dan} \quad \frac{\partial C^2_M(T_1, T)}{\partial T} = 0$$

Analog dengan kondisi 1, karena

$$\frac{\partial C^2_M(T_1, T)}{\partial T_1} = \frac{\partial \left(\frac{K}{T} + \frac{h \alpha T_1^2}{2T} + \frac{\alpha s (T_1 - T)^2}{2T} - \frac{PI_e \alpha T_1 M}{T} + \frac{PI_e \alpha T_1^2}{2T} \right)}{\partial T_1}$$

Maka

$$\frac{2h \alpha T_1 2T}{4T^2} + \frac{2 \alpha s T (-2T + 2T_1)}{4T^2} - \frac{PI_e \alpha T M}{T^2} + \frac{2PI_e \alpha T_1 2T}{4T^2} = 0$$

$$\frac{h \alpha T_1}{T} + \frac{\alpha s (T_1 - T)}{T} - \frac{PI_e \alpha M}{T} + \frac{PI_e \alpha T_1}{T} = 0$$

$$h \alpha T_1 - \alpha s T + \alpha s T_1 - PI_e \alpha M + PI_e \alpha T_1 = 0$$

$$\alpha (h T_1 - T s + s T_1 - PI_e M + PI_e T_1) = 0$$

$$T_1 (h + s + PI_e) = s T + PI_e M$$

$$T_1 = \frac{s T + PI_e M}{(h + s + PI_e)} \quad (3.9)$$

Selanjutnya, karena

$$\frac{\partial C^2_M(T_1, T)}{\partial T} = \frac{\partial \left(\frac{K}{T} + \frac{h\alpha T_1^2}{2T} + \frac{\alpha s(T_1 - T)^2}{2T} - \frac{PI_e \alpha T_1 M}{T} + \frac{PI_e \alpha T_1^2}{2T} \right)}{\partial T}$$

Maka

$$\begin{aligned} \frac{-K}{T^2} - \frac{\alpha h T_1^2}{2T^2} + \alpha s - \frac{\alpha s T_1}{T} - \frac{\alpha s(T - T_1)^2}{2T^2} + \frac{\alpha PI_e T_1 M}{T^2} - \frac{\alpha PI_e T_1^2}{2T^2} &= 0 \\ \frac{-1}{T^2} \left\{ K + \frac{h\alpha T_1^2}{2} + \frac{\alpha s(T - T_1)^2}{2} - PI_e \alpha M T_1 + \frac{PI_e \alpha T_1^2}{2} \right\} + \frac{1}{T} \{ \alpha s T - \alpha s T_1 \} &= 0 \\ 2K + h\alpha T_1^2 + \alpha s(T - T_1)^2 - 2PI_e \alpha M T_1 + PI_e \alpha T_1^2 &= 2T\alpha s(T - T_1) \\ \frac{2K}{\alpha} + hT_1^2 + sT^2 + sT_1^2 - 2sTT_1 - 2PI_e M T_1 + PI_e T_1^2 &= 2sT^2 - 2sTT_1 \\ \frac{2K}{\alpha} + (h + s + PI_e)T_1^2 - 2PI_e M T_1 &= sT^2 \\ T^2 = \frac{2K}{\alpha s} + (h + s + PI_e) \frac{T_1^2}{s} - 2PI_e M \frac{T_1}{s} & \quad (3.10) \end{aligned}$$

Dengan mensubstitusikan nilai T_1 yang didapatkan dari persamaan (3.9) ke persamaan (3.10) diperoleh

$$T^2 = \frac{2K}{\alpha s} + \frac{(sT + PI_e M)^2}{(h + s + PI_e)s} - \frac{2PI_e M (sT + PI_e M)}{s(h + s + PI_e)}$$

Setelah diselesaikan dengan Software MAPLE 8, didapatkan nilai

$$T = \frac{\sqrt{-\alpha s(h + PI_e)(-2K(PI_e + h + s) + \alpha(PI_e M)^2)}}{\alpha s(h + PI_e)} \quad (3.11)$$

Persamaan (3.11) merupakan periode pemesanan yang diharapkan menyebabkan nilai total biaya persediaan minimal, jika penundaan pembayaran dilakukan ketika persediaan sudah habis.

Untuk menghitung periode habisnya persediaan sehingga menyebabkan nilai total biaya persediaan minimal (T_1) pada kondisi ini, akan disubstitusikan persamaan (3.11) ke persamaan (3.9), sehingga diperoleh

$$T_1 = \frac{sT + PI_e M}{(h + s + PI_e)}$$

$$= \frac{PI_e \alpha M (h + PI_e) + \sqrt{-\alpha s (h + PI_e) (-2K (h + s + PI_e) - \alpha (PI_e M)^2)}}{\alpha h (h + s + 2PI_e) + \alpha PI_e (s + PI_e)} \quad (3.12)$$

3.3 Bukti bahwa total biaya persediaan yang didapatkan adalah total biaya minimal.

Fungsi total biaya persediaan $C^1_M(T_1, T)$ dan $C^2_M(T_1, T)$ merupakan fungsi non linear, syarat perlu agar nilai T dan T_1 optimal telah dipenuhi pada bagian sebelumnya yaitu ketika

- (i) $\frac{\partial C^1_M(T_1, T)}{\partial T_1} = 0$ dan $\frac{\partial C^1_M(T_1, T)}{\partial T} = 0$ untuk kondisi pertama.
- (ii) $\frac{\partial C^2_M(T_1, T)}{\partial T_1} = 0$ dan $\frac{\partial C^2_M(T_1, T)}{\partial T} = 0$ untuk kondisi kedua.

Selanjutnya, syarat cukup agar T dan T_1 yang dihasilkan pada bagian 3.2 merupakan solusi optimal adalah dengan melihat harga turunan kedua dari $C^1_M(T_1, T)$ dan $C^2_M(T_1, T)$.

3.3.1 Bukti untuk kondisi 1 ($M \leq T_1$). :

$$\begin{aligned}
 \text{(i)} \quad & \frac{\partial^2 C^1_M(T_1, T)}{\partial T_1^2} \\
 &= \frac{\partial^2 \left(\frac{K}{T} + \frac{1}{2T} h \alpha T_1^2 + \frac{\alpha s}{2T} (T - T_1)^2 + \frac{P I_r \alpha}{2T} (T_1 - M)^2 - \frac{P I_e \alpha T_1^2}{2T} \right)}{\partial T_1^2} \\
 &= \frac{\partial}{\partial T_1} \left(\frac{2h \alpha T_1 2T}{4T^2} + \frac{\alpha s T (-2T + 2T_1)}{2T^2} + \frac{P I_r \alpha T (2T_1 - 2M)}{2T^2} - \frac{2P I_e \alpha T_1 T}{2T^2} \right) \\
 &= \frac{h \alpha}{T} + \frac{\alpha s}{T} + \frac{P I_r \alpha}{T} - \frac{P I_e \alpha}{T} \\
 &= \frac{\alpha}{T} (h + s + P(I_r - I_e))
 \end{aligned}$$

Karena nilai $I_r \geq I_e$, maka $I_r - I_e \geq 0$. Akibatnya $\frac{\partial^2 C^1_M(T_1, T)}{\partial T_1^2} > 0$

$$\begin{aligned}
 \text{(ii)} \quad & \frac{\partial^2 C^1_M(T_1, T)}{\partial T^2} \\
 &= \frac{\partial^2 \left(\frac{K}{T} + \frac{1}{2T} h \alpha T_1^2 + \frac{\alpha s}{2T} (T - T_1)^2 + \frac{P I_r \alpha}{2T} (T_1 - M)^2 - \frac{P I_e \alpha T_1^2}{2T} \right)}{\partial T^2} \\
 &= \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{-K}{T^2} - \frac{\alpha h T_1^2}{2T^2} - \frac{\alpha s (T - T_1)^2}{2T^2} - \frac{\alpha P I_r (T_1 - M)^2}{2T^2} + \frac{\alpha P I_e T_1^2}{2T^2} + \frac{\alpha s (T - T_1)}{T} \right) \\
 &= \frac{2K}{T^3} + \frac{h \alpha T_1^2}{T^3} + \frac{\alpha s T_1^2}{T^3} + \frac{P I_r \alpha T_1^2}{T^3} - \frac{2P I_r \alpha T_1 M}{T^3} + \frac{P I_r \alpha M^2}{T^3} - \frac{P I_e \alpha T_1^2}{T^3} \\
 &= \frac{1}{T^3} \{ 2K + \alpha T_1^2 (h + s + P(I_r - I_e)) + P I_r \alpha M (M - 2T_1) \}
 \end{aligned}$$

Karena nilai $I_r \geq I_e$, maka $I_r - I_e \geq 0$. Sehingga $\frac{\partial^2 C^1_M(T_1, T)}{\partial T^2} > 0$.

3.3.2 Bukti untuk kondisi 2 ($M > T_1$)

$$\begin{aligned}
 \text{(i)} \quad & \frac{\partial^2 C^2_M(T_1, T)}{\partial T_1^2} \\
 &= \frac{\partial^2}{\partial T_1^2} \left\{ \frac{K}{T} + \frac{h\alpha T_1^2}{2T} + \frac{\alpha s(T - T_1)^2}{2T} - \frac{PI_e \alpha T_1 M}{T} + \frac{PI_e \alpha T_1^2}{2T} \right\} \\
 &= \frac{\partial}{\partial T_1} \left(\frac{2h\alpha T_1 2T}{4T^2} + \frac{2\alpha s T(-2T + 2T_1)}{4T^2} - \frac{PI_e \alpha T M}{T^2} + \frac{2PI_e \alpha T_1 2T}{4T^2} \right) \\
 &= \frac{h\alpha}{T} + \frac{s\alpha}{T} + \frac{PI_e \alpha}{T} \\
 &= \frac{\alpha}{T} (h + s + PI_e) > 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{(ii)} \quad & \frac{\partial^2 C^2_M(T_1, T)}{\partial T^2} \\
 &= \frac{\partial^2}{\partial T^2} \left\{ \frac{K}{T} + \frac{h\alpha T_1^2}{2T} + \frac{\alpha s(T - T_1)^2}{2T} - \frac{PI_e \alpha T_1 M}{T} + \frac{PI_e \alpha T_1^2}{2T} \right\} \\
 &= \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{-K}{T^2} - \frac{\alpha h T_1^2}{2T^2} + \alpha s - \frac{\alpha s T_1}{T} - \frac{\alpha s(T - T_1)^2}{2T^2} + \frac{\alpha PI_e T_1 M}{T^2} - \frac{\alpha PI_e T_1^2}{2T^2} \right) \\
 &= \frac{2K}{T^3} + \frac{h\alpha T_1^2}{T^3} + \frac{\alpha s T_1^2}{T^3} - \frac{2PI_e \alpha T_1 M}{T^3} + \frac{PI_e \alpha T_1^2}{T^3} \\
 &= \frac{1}{T^3} (2K + \alpha T_1^2 (h + s + PI_e) - 2PI_e \alpha T_1 M) > 0
 \end{aligned}$$

Dari uraian tersebut, didapatkan bahwa nilai

$$\frac{\partial^2 C^1_M(T_1, T)}{\partial T_1^2} > 0, \quad \frac{\partial^2 C^1_M(T_1, T)}{\partial T^2} > 0, \quad \frac{\partial^2 C^2_M(T_1, T)}{\partial T_1^2} > 0, \quad \frac{\partial^2 C^2_M(T_1, T)}{\partial T^2} > 0.$$

Sehingga menurut teorema optimasi klasik, T dan T_1 merupakan titik minimum

lokal, dan karena nilai derivatif kedua dari Fungsi $C^1_M(T_1, T)$ dan $C^2_M(T_1, T)$ definit positif maka $C^1_M(T_1, T)$ dan $C^2_M(T_1, T)$ merupakan fungsi konvek. Karena konvek, maka menurut teorema setiap solusi lokal merupakan solusi global. Dengan kata lain, T dan T_1 merupakan solusi optimal yang menyebabkan nilai total biaya persediaan minimal untuk masing-masing kondisi yang berlaku.

3.4 Algoritma Menentukan T dan T_1 optimal

Pada bagian 3.2 telah dijelaskan bahwa untuk masing-masing kondisi nilai T_1 bergantung pada T . Persamaan (3.7) dan (3.11) menunjukkan besarnya nilai T . Akan tetapi terdapat kemungkinan bahwa nilai T infisibel, sehingga dikembangkan suatu algoritma untuk mencari nilai T dan T_1 dengan tetap memanfaatkan turunan parsial dari fungsi biaya terhadap T . Jika diketahui

$$K, P, s, h, \alpha, I_e, I_r, \text{ dan } M = \begin{cases} M_1 & 0 < q < q_0 \\ M_2 & q \geq q_0 \end{cases}, \text{ maka algoritma untuk menentukan } T$$

dan T_1 optimal pada model persediaan dengan kondisi *shortage* dan penundaan pembayaran pembelian adalah

1. Pilih $(T_1)_0 = M_2$
 - Untuk kondisi pertama ($M \leq T_1$).
 - a. Hitung nilai T dengan mensubstitusikan nilai $T_1 = (T_1)_0$ ke persamaan (3.6)

- b. Subtitusikan nilai T dari bagian a untuk mencari nilai $(T_1)_1$ ke persamaan (3.5)
- c. Bandingkan nilai $(T_1)_1$ dengan M_2 dengan ketentuan berikut :
- Jika $M < (T_1)_1$ maka $T_1 = (T_1)_1$ fisibel, lanjutkan ke langkah d.
- Jika tidak, ambil $T_1 = M_2$. Subtitusikan ke persamaan (3.5) untuk memperoleh T kemudian lanjutkan kelangkah d.
- d. Hitung dari persamaan (3.3)
- Untuk kondisi kedua ($M > T_1$)
 - a) Hitung nilai T dengan mensubtitusikan nilai $T_1 = (T_1)_0$ ke persamaan (3.10)
 - b) Subtitusikan nilai T dari bagian a) untuk mencari nilai $(T_1)_1$ ke persamaan (3.9)
 - c) Bandingkan nilai $(T_1)_1$ dengan M_2 dengan ketentuan berikut :
 - Jika $M > (T_1)_1$ maka $T_1 = (T_1)_1$ fisibel, lanjutkan ke langkah d)
 - Jika tidak , ambil $T_1 = M_2$. Subtitusikan ke persamaan (3.9) untuk memperoleh T . Lanjutkan ke langkah d).
 - d) Hitung $C^2_{M_2}(T_1, T)$ dari persamaan (3.4)
2. Bandingkan dengan $C^2_{M_2}(T_1, T)$, ambil nilai yang terkecil.
- Jika maka (T_1, T) optimal, jika tidak lanjutkan ke langkah 3.

3. Karena $\alpha T = q_0$, maka hitung $T^0 = \frac{q_0}{\alpha}$. Selanjutnya hitung T_1^0 dengan

ketentuan sebagai berikut :

(i). Untuk kondisi pertama, hitung T_1^0 dengan menggunakan persamaan

(3.5) dengan $T = T^0$. Kemudian hitung $C^1_{M_2}(T_1^0, T^0)$

(ii). Untuk kondisi kedua, hitung T_1^0 dengan menggunakan persamaan

(3.9) dengan $T = T^0$. Kemudian hitung $C^2_{M_2}(T_1^0, T^0)$

(iii). Bandingkan nilai $C^1_{M_2}(T_1^0, T^0)$ dengan $C^2_{M_2}(T_1^0, T^0)$, ambil nilai yang minimal.

4. Ulangi langkah 1 dengan $(T_1)_0 = M_1$ untuk memperoleh $C^1_{M_1}(T_1, T)$ dan

$C^2_{M_1}(T_1, T)$, bandingkan nilai $C^1_{M_1}(T_1, T)$ dengan $C^2_{M_1}(T_1, T)$ kemudian ambil nilai yang minimal.

5. bandingkan hasil dari langkah 3.(iii) dengan hasil dari langkah 4, jika

$C^i_{M_1}(T_1, T) < C^i_{M_2}(T_1^0, T^0)$ maka (T_1, T) optimal, jika tidak maka (T_1^0, T^0) optimal.

3.5 Contoh Permasalahan

Contoh permasalahan yang akan digunakan untuk tugas akhir ini merupakan pengembangan dari kasus PKL penulis, data yang digunakan merupakan data hasil PKL yang diperoleh dengan metode wawancara dan observasi. Sebagai akibat adanya penambahan kondisi *shortage* dan penundaan pembayaran pembelian, maka pada contoh permasalahan ini terdapat penambahan parameter berupa komponen biaya *shortage*, periode penundaan pembayaran

pembelian, suku bunga yang dikenakan pada persediaan, dan suku bunga dari hasil penjualan.

3.5.1 Hasil Pengambilan Data

3.5.1.1 Pengadaan Tembakau

Sebagai salah satu bahan baku rokok yang penting, tembakau memerlukan pengelolaan yang khusus. Tembakau yang dibeli oleh PR. SUKUN dapat digolongkan menjadi dua yaitu :

- Tembakau panen yaitu tembakau yang dibeli langsung dari petani di daerah penghasil.
- Tembakau jadi yaitu tembakau siap pakai yang dibeli dari pedagang, biasanya tembakau jenis ini dapat langsung digunakan untuk proses produksi.

Tembakau panen dapat digunakan untuk proses produksi setelah disimpan selama 3 tahun. Pembelian tembakau juga berbeda dengan pembelian bahan baku rokok lainnya, karena dipengaruhi oleh musim pada saat tembakau tersebut ditanam (mongso). Pembelian tembakau panen dapat dilakukan setiap tahun apabila musim (mongso) dianggap cukup baik.

Jenis tembakau panen yang biasa dibeli oleh pihak PR. SUKUN adalah :

- Tembakau Weleri
- Tembakau Temanggung
- Tembakau Muntilan
- Tembakau Madura
- Tembakau Bojonegoro

Selain tembakau panen, pihak PR. SUKUN juga membeli tembakau siap pakai sebagai campuran sehingga rokok yang dihasilkan kaya rasa dan stabil. Jenis tembakau ini biasanya dibeli dari China, Brazil, dan Turki dengan tahun yang lama.

Untuk menjamin kualitas tembakau yang dibeli, pihak perusahaan mengadakan survei. Survei dilakukan dengan cara mengunjungi daerah penghasil tembakau dan melakukan pengamatan terhadap keadaan geografis daerah tersebut.

Adapun ciri-ciri tembakau panen yang baik adalah sebagai berikut :

- Ditanam di daerah yang tanahnya tidak mengandung garam dan *chlor*.
- Pada proses perajangan, tembakau tidak dicampuri dengan gula karena penambahan gula dapat menambah berat tembakau ketika ditimbang, selain itu penambahan gula seolah-olah membuat kadar nikotin dalam tembakau pekat.
- Tembakau dipetik tepat waktu (mongso yang tepat). Biasanya sekitar bulan agustus-september.

Apabila tembakau tersebut memenuhi syarat-syarat diatas maka pihak perusahaan akan membelinya. Selain itu, bentuk survei yang dilakukan oleh pihak perusahaan adalah dengan membuka penawaran kepada pihak petani tembakau, perusahaan akan membuka penawaran pada jangka waktu tertentu. Selama waktu yang ditentukan tersebut pihak petani datang ke petugas perwakilan di masing-masing daerah dengan membawa tembakau hasil panen, kemudian proses

seleksi dilakukan langsung oleh pihak perwakilan. Jika tembakau memenuhi persyaratan maka dilakukan transaksi pembelian.

Sedangkan bentuk survei untuk tembakau siap pakai adalah pedagang memberikan sampel kepada perusahaan, kemudian diseleksi mana yang cocok, dilakukan tawar menawar apabila terjadi kesepakatan maka perusahaan akan membuat surat order pengiriman barang kepada pedagang.

Tembakau panen hasil survei yang memenuhi syarat akan dimasukkan ke gudang daerah dan disimpan selama 2-3 bulan, selanjutnya tembakau akan dikirim ke gudang pusat. Pengepakan dilakukan selama tembakau berada di gudang daerah, Biaya pengepakan tembakau ditanggung oleh perusahaan yaitu berupa pembelian tikar Rp. 9000,-/ koli dan ongkos pengepakan sebesar Rp. 1500,-/ koli.

Jumlah stok tembakau panen yang dipesan oleh pihak perusahaan beserta biaya-biaya yang terkait dapat dilihat pada Tabel 3.5.1.

Tabel 3.5.1 Jumlah stok tembakau dan biaya-biaya terkait

No	Jenis Tembakau	Stok tembakau / tahun (dalam kg)	Harga beli / kg (dalam Rp)	Biaya transportasi/ koli(dalam Rp)
1	MDR-04	544-21000	35000	16000
2	MDR-05	118-4900	20000	16000
3	MDR-06	2737-136.390	35000	16000
4	MDR-07	4544-197.010	22000	16000

Setelah proses pengepakan selesai, maka tembakau akan disimpan kedalam gudang milik perusahaan.

3.5.1.2 Penyimpanan Tembakau

Perusahaan rokok SUKUN mempunyai beberapa gudang untuk menyimpan tembakau dengan kapasitas yang berbeda. Dalam contoh permasalahan ini, yang akan dibahas adalah gudang F34 yang menyimpan tembakau jenis MDR (Madura). Tembakau yang disimpan dalam gudang tidak dikenakan biaya sewa karena gudang tersebut milik PR. SUKUN sendiri. Jika mongso panen tembakau baik, setiap tahun perusahaan akan membeli tembakau sebesar ± 10.000 koli dimana 1 koli berisi 60 kg tembakau dan dalam satu tahun dilakukan pemesanan empat kali.

Untuk menjaga kualitas tembakau yang disimpan dalam gudang, maka perusahaan rokok SUKUN melakukan perawatan berupa *ovel stapel* yaitu membalik tumpukan tembakau secara berkala, dengan ketentuan sebagai berikut :

- Untuk tiga bulan pertama ovel stapel dilakukan satu bulan sekali.
- Setelah tembakau berada di gudang selama tiga bulan, ovel stapel dilakukan per tiga bulan sekali.
- Setelah satu tahun di gudang, ovel stapel dilakukan setiap 6 bulan sekali.

Bentuk perawatan yang kedua adalah *Regrade*, yaitu penataan ulang tembakau sesuai dengan kualitas. Regrade dilakukan setelah tembakau berusia 2 tahun di gudang. Perawatan tembakau dilakukan sampai tembakau siap dipakai untuk proses produksi. Biaya yang dikeluarkan untuk merawat tembakau adalah Rp. 6450/ koli.

3.5.1.3 Penggunaan Tembakau Untuk Proses Produksi

Tembakau yang sudah siap diproduksi selanjutnya akan dikeluarkan dari gudang untuk memenuhi kebutuhan produksi rokok, baik rokok jenis kretek maupun filter. Untuk memenuhi kebutuhan produksi jumlah rata-rata tembakau jenis MDR yang digunakan adalah 25 ton/minggu. Proses produksi dilakukan setiap hari kerja yaitu 6 hari dalam satu minggu dimana 1 tahun terdapat 50 minggu.

Andaikan terjadi kondisi *shortage* perusahaan akan menderita kerugian sebesar Rp 12.000,-/ unit. Antara perusahaan dan *supplier* memiliki kesepakatan bahwa pembayaran pembelian dapat ditunda dengan ketentuan sebagai berikut

$$M = \begin{cases} 20\text{hari} & 0 < q < 10.000 \\ 30\text{hari} & q \geq 10.000 \end{cases}$$

Dengan besar bunga yang dikenakan pada persediaan sebesar 15 % sebagai jaminan untuk *supplier*. Besar bunga yang didapatkan perusahaan dari *sale revenue* sebesar 0.026 %.

3.5.2 Pengolahan Data dan Optimalisasi Pengadaan Tembakau

3.5.2.1 Pembentukan Model

Dalam pembentukan model total biaya pengadaan tembakau pada PR. SUKUN asumsi yang digunakan adalah sebagai berikut :

- Pertanian tembakau dalam keadaan normal, tanpa adanya gagal panen maupun serangan hama (mongso setiap tahun dianggap baik).
- Jumlah pesanan tembakau setiap tahunnya di asumsikan konstan.

- Pembahasan hanya fokus pada tembakau panen jenis MDR dalam satu gudang.
- Dalam satu tahun, diasumsikan ada 300 hari kerja.

Karena diasumsikan konstan, maka jumlah stok tembakau dan biaya-biaya yang terkait dapat dituliskan dalam Tabel 3.5.2.

Tabel 3.5.2 jumlah rata-rata stok tembakau beserta biaya-biaya terkait

No	Jenis tembakau	Stok tembakau / tahun (dalam kg)	Stok rata-rata / tahun (dalam kg)	Harga beli / kg (dalam Rp)	Biaya transportasi/ koli (dalam Rp)
1	MDR-04	544-21000	10.772	35000	16000
2	MDR-05	118-4900	2.509	20000	16000
3	MDR-06	2737-136.390	69.563,5	35000	16000
4	MDR-07	4544-197.010	100.777	22000	16000
Total Rata-rata			45.905,375	28000	16000

Perusahaan memilih untuk melakukan penundaan pembayaran pembelian. Akan ditentukan Parameter-parameter yang digunakan untuk membentuk model total biaya persediaan tembakau adalah sebagai berikut :

- Elemen biaya pemesanan (ordering cost) meliputi :

$$\begin{aligned}
 \text{Biaya transportasi, dinotasikan } K &= \text{Rp.16000,- / koli} \\
 &= \text{Rp.16000,-/ koli} \times 10.000 \text{ koli /th} \\
 &= \text{Rp.160.000.000 / tahun}
 \end{aligned}$$

- Elemen biaya pengadaan (procurement cost) meliputi :

Harga rata-rata pembelian tembakau, dinotasikan $c = \text{Rp. } 28000,- / \text{ kg}$
 $= \text{Rp. } 1.680.000,- / \text{ koli}$

Biaya pengepakan meliputi :

Pembelian tikar, dinotasikan $r = \text{Rp. } 9000,- / \text{ koli}$

Biaya pengepakan, dinotasikan $p = \text{Rp. } 1500,- / \text{ koli}$

Sehingga total biaya pengadaan adalah

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= \mathbf{c} + \mathbf{r} + \mathbf{p} \\ &= 1.680.000 + 9000 + 1500 \\ &= \text{Rp. } 1.690.500,- \end{aligned}$$

- Elemen biaya penyimpanan (*holding cost*), meliputi :

Biaya *ovel stapel* dan *regrade*, dinotasikan $h = \text{Rp. } 6450,- / \text{ koli}$

- Elemen biaya kekurangan *stock* (*shortage cost*)

Shortage cost dinotasikan $s = \text{Rp. } 12.000,- / \text{ koli}$

- Bunga yang dikenakan pada persediaan, dinotasikan $I_r = 0.15$
- Bunga yang diperoleh perusahaan dari penjualan, dinotasikan $I_e = 0.00026$
- Waktu penundaan pembayaran pembelian, dinotasikan M dimana

$$M = \begin{cases} 20\text{hari} & 0 < q < 10.000 \\ 30\text{hari} & q \geq 10.000 \end{cases}$$

- Jumlah permintaan tembakau

Jumlah rata-rata permintaan tembakau, dinotasikan α

$$\begin{aligned} \alpha &= 25 \text{ ton} / \text{ minggu} \\ &= (25000 \times 50) \text{ kg} / \text{ tahun} \end{aligned}$$

$$=1.250.000 \text{ kg /tahun}$$

$$=20833,3333 \text{ koli/ tahun}$$

Sedangkan variabel keputusan yang digunakan adalah :

- Waktu pada saat persediaan habis, dinotasikan T_1 dengan $0 \leq T_1 < T$
- Periode pemesanan barang, dinotasikan T

Sehingga fungsi total biaya persediaannya adalah

I. untuk ($M \leq T_1$)

$$C^1_M(T_1, T) = \frac{1}{T} \left\{ \mathbf{K} + \frac{h}{2} \alpha T_1^2 + \frac{s}{2} \alpha (T_1 - T)^2 + \frac{PI_r \alpha}{2} (T_1 - M)^2 - \mathbf{P I}_e \alpha \frac{T_1^2}{2} \right\}$$

$$= \frac{1}{T} \left\{ 16 \times 10^7 + \frac{6450}{2} \alpha T_1^2 + \frac{12000}{2} \alpha (T_1 - T)^2 + \frac{1690500 \times 0.15 \alpha}{2} (T_1 - M)^2 - 1690500 \times 0.00026 \alpha \frac{T_1^2}{2} \right\}$$

$$C^1_M(T_1, T) = \frac{1}{T} \left\{ 16 \times 10^7 + 3225 \alpha T_1^2 + 6000 \alpha (T_1 - T)^2 + 126787.5 \alpha (T_1 - M)^2 - 219,765 \alpha T_1^2 \right\}$$

II. untuk ($M > T_1$)

$$C^2_{M_2}(T_1, T) = \frac{1}{T} \left\{ \mathbf{K} + \frac{h}{2} \alpha T_1^2 + \frac{s}{2} \alpha (T_1 - T)^2 - \mathbf{P I}_e \alpha T_1 \left(M - \frac{T_1}{2} \right) \right\}$$

$$= \frac{1}{T} \left\{ 16 \times 10^7 + 3225 \alpha T_1^2 + 6000 \alpha (T_1 - T)^2 - 439.53 \alpha T_1 \left(M - \frac{T_1}{2} \right) \right\}$$

3.5.2.2 Menentukan T dan T_1 Optimal

Selanjutnya akan ditentukan waktu pemesanan (T) dan waktu habisnya persediaan (T_1) yang meminimalkan total biaya persediaan dengan menggunakan algoritma 3.4.

Proses menentukan T dan T_1 dijelaskan sebagai berikut :

1. pilih $(T_1)_0 = 30$ hari, karena dalam 1 tahun terdapat 300 hari kerja

$$\text{maka } (T_1)_0 = \frac{30}{300} = 0.1 \text{ tahun.}$$

- Untuk kondisi pertama ($M \leq T_1$)

- a Dengan mensubstitusikan nilai $T_1 = (T_1)_0$ ke persamaan (3.6) diperoleh

$$\begin{aligned} T^2 &= \frac{2K}{\alpha s} + \frac{(h + s + P(I_r - I_e))T_1^2}{s} - \frac{PI_r M}{s}(2T_1 - M) \\ &= 1,280 + 0.226 - 0.211 \\ &= 1,295 \text{ tahun} \end{aligned}$$

$$T = 1.137980668 \text{ tahun} = 341.39 \text{ hari} = 341 \text{ hari}$$

- b Dengan mensubstitusikan $T = 1.137980677$ tahun ke persamaan (3.5) diperoleh

$$\begin{aligned} (T_1)_1 &= \frac{sT + PI_r M}{(h + s + P(I_r - I_e))} \\ &= \frac{12000 \times 1.137980668 + 1690500 \times 0.15 \times 0.1}{(6450 + 12000 + 1690500(0.15 - 0.00026))} \\ &= \frac{13655.76802 + 25357.5}{271585.47} \end{aligned}$$

$$= 0.143650056 \text{ tahun} = 43.0950 \text{ hari} = 43 \text{ hari}$$

- c Karena $30 < 43$, maka $T_1 = (T_1)_1 = 43$ fisibel

d Dengan mensubstitusikan nilai $T = 341$ hari dan $T_1 = 43$ hari ke persamaan I, diperoleh

$$\begin{aligned}
 C^1_M(T_1, T) &= \frac{1}{T} \{ 16 \times 10^7 + 3225 \alpha T_1^2 + 6000 \alpha (T_1 - T)^2 + \\
 &\quad 126787.5 \alpha (T_1 - M)^2 - 219,765 \alpha T_1^2 \} \\
 &= \frac{1}{341} \{ 16 \times 10^7 + (3225 \times 20833.333 \times (43)^2 + (6000 \times 20833.333) \\
 &\quad (43 - 341)^2 + (126787.5 \times 20833.333) (43 - 30)^2 \\
 &\quad - 219,765 \times 20833.333 \times 43^2 \} \\
 &= \frac{1}{341} 1,166282162 \times 10^{13} \\
 &= 3,420182294 \times 10^{10} \\
 &= \text{Rp}34.201.822.940,-/ \text{ tahun}
 \end{aligned}$$

- Untuk kondisi kedua ($M > T_1$).

a) Dengan mensubstitusikan nilai $T_1 = (T_1)_0$ ke persamaan (3.10) diperoleh

$$\begin{aligned}
 T^2 &= \frac{2K}{\alpha s} + (h + s + PI_e) \frac{T_1^2}{s} - 2PI_e M \frac{T_1}{s} \\
 &= 1,280 + 0.0157 - 0.00073255 \\
 &= 1.29496745 \\
 T &= 1.137966366 \text{ tahun} = 341 \text{ hari}
 \end{aligned}$$

- b) Dengan mensubstitusikan nilai $T = 1.137966366$ ke persamaan (3.9) diperoleh

$$\begin{aligned}(T_1)_1 &= \frac{sT + PI_e M}{(h + s + PI_e)} \\ &= \frac{12.000 \times 1.137966366 + 1690500 \times 0.00026 \times 0.1}{6450 + 12000 + 1690500 \times 0.00026} \\ &= \frac{13655.59639 + 43.953}{18889.53} \\ &= 0.725245646 \text{ tahun} = 217 \text{ hari}\end{aligned}$$

- c) Karena $30 < 217$ maka $(T_1)_1$ infisibel, sehingga diambil $T = 30$ hari. Selanjutnya dengan mensubstitusikan nilai $T = 30$ ke persamaan (3.9) diperoleh

$$\begin{aligned}T_1 &= \frac{sT + PI_e M}{(h + s + PI_e)} \\ T_1 &= \frac{12000 \times 30 + 1690500 \times 0.00026 \times 30}{(6450 + 12000 + 1690500 \times 0.00026)} \\ T_1 &= \frac{360000 + 13185.9}{18889.53} \\ T_1 &= 19,756 \text{ hari} = 20 \text{ hari}.\end{aligned}$$

- d) Dengan mensubstitusikan nilai $T = 30$ hari dan $T_1 = 20$ hari ke persamaan II, diperoleh

$$\begin{aligned}C^2_{M2}(T_1, T) &= \frac{1}{T} \{ 16 \times 10^7 + 3225 \alpha T_1^2 + 6000 \alpha (T_1 - T)^2 - \\ &\quad 439.53 \alpha T_1 (M - \frac{T_1^2}{2}) \}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{30} \{ 16 \times 10^7 + 3225 \times 20833.333 \times (20)^2 + \\
&\quad 6000 \times 20833.333 (20 - 30)^2 - \\
&\quad 439.53 \times 20833.333 \times 20 (30 - \frac{20^2}{2}) \} \\
C^2_{M_2}(T_1, T) &= \frac{1}{30} \times 7.066837387 \times 10^{10} \\
&= \text{Rp } 2.355.612.462,-/ \text{ tahun}
\end{aligned}$$

2. Dari langkah 1, diperoleh = Rp 34.201.822.940,-/ tahun dan $C^2_{M_2}(T_1, T) = \text{Rp } 2.355.612.462,-/ \text{ tahun}$. Karena $C^2_{M_2}(T_1, T) < \text{Rp } 34.201.822.940,-/ \text{ tahun}$, maka diambil $T = 30$ hari dan $T_1 = 20$ hari dengan total biaya Rp 2.355.612.462,-/ tahun.

Selanjutnya 20833.333×30
 $= 624.999,99 \geq 10.000$

Karena ≥ 10.000 , maka $T = 30$ hari dan $T_1 = 20$ hari optimal. Iterasi berhenti.

Dari contoh permasalahan 3.5, dapat disimpulkan bahwa perusahaan dapat memesan tembakau sebesar 624.999,99 koli setiap 30 hari dengan waktu persediaan habis 20 hari dan total biaya Rp 2.355.612.462,-/ tahun pada kondisi penundaan pembayaran ketika persediaan habis ($M > T_1$).

BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Model persediaan dengan mempertimbangkan kondisi *shortage* dan penundaan pembayaran pembelian merupakan salah satu alternatif yang dapat dipilih oleh perusahaan dalam menentukan kebijakan terkait manajemen persediaannya. Secara ekonomis, model pembelian ini menguntungkan karena dalam kondisi *shortage* perusahaan dapat memilih waktu penundaan yang tepat. Dengan waktu penundaan pembayaran pembelian yang tepat perusahaan dapat mengetahui waktu habisnya persediaan serta *cycle* pemesanan sehingga total biaya persediaan yang dikeluarkan minimal.

Algoritma yang ditawarkan membantu dalam menentukan kebijakan pemesanan yang dapat membantu pihak perusahaan untuk memutuskan kapan harus mengambil waktu penundaan pembayaran pembelian dan berapakah jumlah pesanan yang harus dilakukan.

4.2 Saran

Pada tugas akhir ini pembahasan hanya difokuskan pada model persediaan *single item* dengan waktu penundaan pembayaran hanya satu kali dalam setiap *cycle* pemesanannya. Pembahasan dapat dikembangkan pada model persediaan *single item* dengan kondisi *shortage* dengan beberapa kali penundaan pembayaran pembelian dalam satu *cycle* pemesanan. Selain itu, pembahasan juga dapat

dikembangkan lagi pada model persediaan *single item* dengan kondisi *shortage* dan penundaan pembayaran pembelian untuk barang yang dapat mengalami penyusutan (*deteriorating items*).

DAFTAR PUSTAKA

- Aminudin, 2005, **Prinsip-Prinsip Riset Operasi**, Jakarta : Erlangga.
- Attaran, Mohsen, 1992, **Operation Management Information System**, New York : John Wiley & sons, Inc.
- Assauri, S, 1980, **Manajemen Produksi**, Jakarta : PPFE-UI.
- Hadi, Sutrisno, 2004, **Metodologi Research**, Yogyakarta : Penerbit Andi.
- Handoko, T.H, 1984, **Dasar-Dasar Manajemen Produksi dan Operasi**, Yogyakarta: BPFE.
- Heizer, J dan Render B, 2005, **Manajemen Operasi Edisi Tujuh**, Jakarta: Salemba Empat.
- Hillier S, Frederick dan Lieberman J, Gerald, 1994, **Pengantar Riset Operasi Edisi Lima**, Jakarta : Erlangga.
- Levin, Richard I, Rubin, David S, dan Stinson, Joel P, 1992, **Quantitative Approach to Management 8th Edition**, Singapore : Mc Graw hill. Inc.
- Pal, Manishapal, dan Kumar Gosh, Sanjoy, 2002, **An Inventory Model with Shortage and Quantity Dependent Permissible Delay in Payments**, Journal of Operation Research.
- Prima R, Rizkia, 2009, Laporan Praktek Kerja Lapangan, **Pengendalian Stock dalam Minimalisasi Biaya Persediaan Tembakau sebagai Bahan Baku Rokok Pada PR.SUKUN Kudus**.
- Sarwono, Jonathan, 2006, **Metode Penelitian Kuantitatif & Kualitatif**, Yogyakarta : Graha Ilmu.

- Goyal S.K, 1985, **Economic Order Quantity Under Condition of Permissible Delay in Payments**, Journal of Operational Research Society.Vol.36, pp.335-338.
- Subagyo P, Asri M, dan Handoko T.H, 1984, **Dasar-Dasar Operation Research**, Yogyakarta : BPFE.
- Supranto, 1997, **Metode Riset Aplikasi dalam Pemasaran**, Jakarta: LPFE-UI.
- Uthayakumar, R, dan Parvathi, P, 2006, **A Deterministic Inventory Model for Deteriorating Items with Partailly Backlogged and Stock and Time Depandent Demand Under Trade Credit**, International Journal of Soft Computing. Vol. 1, pp.199-206.