JURNAL MATEMATIKA DAN KOMPUTER
Vol. 6. No. 1, 41 - 48, April 2003, ISSN : 1410-8518

MATRIKS STOKASTIK GANDA DAN SIFAT-SIFATNYA

Suryoto
Jurusan Matematika F-MIPA Universitas Diponegoro Semarang

Abstrak

Suatu matriks tak negatif dikatakan stokastik ganda, jika jumlah entri-entri pada tiap baris dan tiap kolomnya sama dengan 1. Karakterisasi yang tampak dari matriks jenis ini adalah mempunyai entri pada diagonal yang positif dan diantara sifat penting dari matriks ini adalah perkalian antara matriks stokastik ganda menghasilkan matriks stokastik ganda lagi. Pada tulisan ini akan dibahas matriks stokastik ganda di atas beserta sifat-sifat pentingnya. Juga dipelajari hubungan matriks jenis ini dengan matriks orthostokastik dan matriks uniter-stokastik.

1. PENDAHULUAN

Teori matriks tak negatif mengalami perkembangan yang cukup berarti setelah pada tahun 1912 Frobenius berhasil memperumum konsep matriks dengan entri positif dari Perron dan mengembangkannya ke dalam matriks dengan entri yang tak negatif serta mempelajari sifat-sifat penting dari matriks tersebut. Salah satu jenis matriks tak negatif yang cukup penting adalah matriks stokastik ganda, karena banyak penggunaan matriks ini di bidang Matematika dan Fisika diantaranya : Aljabar Linier, Teori Ketidaksamaan, Teori Matriks Kombinatorial, Kombinatorik, Kimia Fisika dan lain sebagainya.

Matriks stokastik ganda merupakan bentuk khusus dari matriks kuasi stokastik ganda, yaitu suatu matriks tak negatif di mana jumlah entri-entri pada tiap baris dan tiap kolomnya sama dengan 1. Istilah matriks stokastik ganda pertama kali diperkenalkan oleh Konig pada tahun 1916 dan kemudian dipopulerkan oleh Marcus dan Minc.Kedua orang inilah yang mengkaji lebih mendalam mengenai karakteristik matriks stokastik ganda ini beserta sifat-sifat pentingnya.

2. MATRIKS KUASI STOKASTIK GANDA

Sebelum membahas lebih jauh mengenai matriks stokastik ganda ini akan diperkenalkan terlebih dahulu konsep permanen dari suatu matriks seperti diberikan oleh definisi berikut :

Definisi 1 :

Misalkan A = (a_{ij}) suatu matriks berukuran m x n, dengan m ≤ n. Permanen dari A, dituliskan dengan Per (A) didefinisikan sebagai

$$\text{Per}(A) = \sum_{\sigma} \prod_{i=1}^{m} a_{i\sigma(i)} ,$$

dimana σ adalah fungsi satu-satu dari { 1, 2, …, m } ke { 1, 2, …, n}.

Catatan :

Banyaknya fungsi satu-satu σ : { 1, 2, …, m } → { 1, 2, …, n } dapat ditentukan dengan rumus $m!c_m^n$.

Dalam hal m = n, dituliskan per (A) untuk menggantikan Per (A). Dengan demikian jika A = (a_{ij}) suatu matriks bujur sangkar ordo n, maka

$$\text{per}(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \prod_{i=1}^{n} a_{i\sigma(i)} .$$

Selanjutnya pengertian dari matriks stokastik ganda diberikan oleh definisi berikut ini :

Definisi 2 :

Suatu matriks riil dinamakan kuasi-stokastik ganda jika jumlah entri-entri pada tiap baris dan pada tiap kolomnya sama dengan 1. Suatu matriks kuasi-stokastik ganda tak negatif dinamakan stokastik ganda.

Jadi matriks kuasi-stokastik ganda adalah suatu matriks bujur sangkar dan dari definisi di atas tampak bahwa suatu matriks A berukuran n x n adalah kuasi-stokastik ganda jika dan hanya jika 1 adalah nilai karakteristik dari A dan (1, 1, …, 1) adalah vektor karakteristik yang berpadanan dengan nilai karakteristik 1. Dengan demikian suatu matriks tak negatif A berukuran n x n adalah stokastik ganda jika dan hanya jika $AJ_n = J_n A = J_n$, dimana J_n adalah matriks berukuran n x n dengan setiap entrinya $\frac{1}{n}$.

Beberapa hasil yang penting berkaitan dengan matriks stokastik ganda ini diberikan oleh teorema-teorema berikut ini :

Teorema 1 (Konig, 1916)

Setiap matriks stokastik ganda mempunyai diagonal positif.

Bukti :

Misalkan A suatu matriks stokastik ganda berukuran n x n dan andaikan A tidak mempunyai diagonal yang positif, maka per (A) = 0 dan menurut teorema Frobenius-Konig, terdapat matriks permutasi P dan Q sedemikiaan hingga berlaku

$$\text{PAQ} = \begin{bmatrix} B & C \\ 0 & D \end{bmatrix}$$

dimana blok nol pada sudut kiri bawah berukuran p x q, dengan p + q = n + 1.

Misalkan σ (X) menyatakan jumlahan entri-entri pada matriks X, maka

n = σ (PAQ) ≥ σ (B) + σ (D) = q + p = n + 1.

Ini mustahil, jadi haruslah A mempunyai diagonal positif. ■

Dari teorema 1 di atas diperoleh hasil berikut :

Akibat :

Permanen dari matriks stokastik ganda adalah positip.

Teorema 2 (Schur, 1923)

Misalkan H = (h_{ij}) suatu matriks hermit berukuran n x n dengan nilai-nilai karakteristik $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$. Misalkan juga h = $[h_{11}, h_{22}, ..., h_{nn}]^T$ dan λ = $[\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n]^T$, maka terdapat matriks stokastik ganda S sedemikian hingga h = Sλ.

Bukti :

Misalkan U = (u_{ij}) matriks uniter sedemikian hingga berlaku

H = U diag ($\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$) U*.

Maka $h_{it} = \sum_{t=1}^{n} u_{it}\lambda_t \bar{u}_{it} = \sum_{t=1}^{n} |u_{it}|^2 \lambda_t = \sum_{t=1}^{n} s_{it}\lambda_t$, i = 1, 2, …, n,

dimana $s_{it} = |u_{it}|^2$, i, t = 1, 2, …, n. Jelas bahwa matriks A = (s_{ij}) yang berukuran n x n adalah stokastik ganda. ■

3. MATRIKS ORTHOSTOKASTIK DAN SCHUR-STOKASTIK

Selanjutnya akan diberikan definisi matriks orthostokastik dan matriks Schur-stokastik dan hubungannya dengan matriks stokastik ganda ini.

Definisi 2

a) Suatu matriks A = (a_{ij}) berukuran n x n disebut orthostokastik jika terdapat matriks orthogonal
(riil) T = (t_{ij}) sedemikian hingga $a_{ij} = t_{ij}^2$, i, j = 1, 2, …, n.

b) Suatu matriks A = (a_{ij}) berukuran n x n disebut Schur-stokastik (uniter-stokastik) jika terdapat
matriks uniter U = (u_{ij}) sedemikian hingga $a_{ij} = |u_{ij}|^2$, ∀ i, j.

Berdasarkan pada definisi di atas, matriks S pada Teorema 2 adalah Schur-stokastik dan tampak bahwa setiap matriks orthostokastik adalah Schur-stokastik dan setiap matriks Schur-stokastik adalah stokastik ganda. Pada umumnya tidak semua matriks stokastik ganda adalah Schur-stokastik dan tidak semua matriks Schur - stokastik adalah orthostokastik. Hal ini dapat dilihat pada contoh berikut ini :

Contoh 1 :

Matriks stokastik ganda

$$A = (a_{ij}) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

tidak Schur-stokastik. Sebab, misalkan U = (u_{ij}) adalah sebarang matriks berukuran 3 x 3 sedemikian hingga $a_{ij} = |u_{ij}|^2$, i, j = 1, 2, 3 maka

$u_{11} = u_{22} = u_{33} = 0$ tetapi $u_{11}\bar{u}_{21} + u_{12}\bar{u}_{22} + u_{13}\bar{u}_{23} = u_{13}\bar{u}_{23} \neq 0$

karena modulus dari u_{13} dan $\bar{u}_{23}$ adalah $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Dengan demikian U tidak uniter dan akibatnya A tidak Schur-stokastik.

Matriks stokastik ganda J_3 adalah Schur-stokastik. Sebab, misalkan U = (u_{ij}) adalah matriks uniter :

$$\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} 1 & \theta & \theta^2 \\ \theta^2 & 1 & \theta \\ \theta & \theta^2 & 1 \end{bmatrix}$$

dengan θ adalah akar primitif pangkat 3 dari 1, maka $|u_{ij}|^2 = \frac{1}{3}$ untuk setiap i dan j. Akan tetapi, J_3 tidak orthostokastik. Sebab, misalkan T = (t_{ij}) adalah matriks berukuran 3 x 3 sedemikian hingga $t_{ij}^2 = \frac{1}{3}$ untuk setiap i dan j, maka $t_{11}t_{21} + t_{12}t_{22} + t_{13}t_{23}$ tidak memenuhi (karena jumlahan di atas dapat bernilai – 1, -$\frac{1}{3}$, $\frac{1}{3}$ atau 1), dengan demikian T tidak orthogonal.

4. SIFAT-SIFAT PENTING MATRIKS STOKASTIK GANDA

Beberapa sifat penting yang berlaku pada matriks stokastik ganda diberikan oleh teorema-teorema berikut ini :

Teorema 3 (Marcus & Minc, 1962)

Hasil kali matriks stokastik ganda adalah stokastik ganda.

Bukti :

Misalkan A dan B adalah matriks stokastik ganda berukuran n x n. Maka

$$AJ_n = J_nA = BJ_n = J_nB = J_n .$$

Jelas bahwa AB tak negatif dan berlaku $(AB)J_n = A(BJ_n) = AJ_n = J_n$

dan $J_n(AB) = (J_n A)B = J_n B = J_n$. Jadi AB adalah stokastik ganda. ■

Teorema 4 (Marcus & Minc, 1962)

Invers dari matriks stokastik ganda tak singular adalah matriks kuasi-stokastik ganda.

Bukti :

Misalkan A matriks stokastik ganda tak singular berukuran n x n. Maka

$$J_n = J_n I_n = J_n AA^{-1} = J_n A^{-1},$$

karena A stokastik ganda, dan

$$J_n = I_n J_n = A^{-1}AJ_n = A^{-1}J_n.$$

Dengan demikian A^{-1} kuasi-stokastik ganda. ■

Dari Teorema 3 dan Teorema 4 di atas diperoleh hasil sebagai berikut :

Akibat :

Jika A dan X adalah matriks stokastik ganda dan X tak singular maka XAX^{-1} adalah matriks kuasi-stokastik ganda.

Berikut ini diberikan pengertian matriks stokastik ganda elementer.

Definisi 3

Suatu matriks stokastik ganda ordo n dengan n – 2 entri pada diagonal utamanya sama dengan 1disebut matriks stokastik ganda elementer. Dengan perkataan lain, suatu matriks stokastik ganda A = (a_{ij}) dikatakan elementer jika $a_{ss} = a_{tt} = 1-\theta, a_{st} = a_{ts} = \theta$, untuk suatu bilangan bulat s, t dengan 1 ≤ s < t ≤ n dan bilangan riil θ, dengan 0 ≤ θ ≤ 1 dan $a_{ij} = \delta_{ij}$, untuk yang lainnya.

Dari Teorema 1 tampak bahwa hasil kali antara matriks stokastik ganda elementer adalah matriks stokastik ganda. Akan tetapi sebaliknya tidak berlaku, yaitu tidak semua matriks stokastik ganda dapat dinyatakan sebagai hasil kali matriks stokastik ganda elementer. Untuk contohnya, pandang matriks A pada contoh 1 di atas. Matriks A di atas merupakan matriks stokastik ganda yang tidak dapat dinyatakan sebagai hasil kali matriks stokastik ganda elementer. Untuk contoh lainnya dapat dilihat pada (Minc, 1988).

Selanjutnya akan diperlihatkan bahwa jika matriks stokastik gandanya bersifat tak tereduksi, maka matriks stokastik ganda tersebut kogredien ke jumlah langsung matriks-matriks stokastik ganda yang tereduksi.

Teorema 5 (Minc, 1988)

Matriks stokastik ganda tereduksi kogredien ke jumlah langsung matriks stokastik ganda.

Bukti :

Misalkan A matriks stokastik ganda tereduksi berukuran n x n. Maka A kogredien ke suatu matriks yang berbentuk $B = \begin{bmatrix} X & Y \\ 0 & Z \end{bmatrix}$, dimana X matriks bujur sangkar ordo k dan Z matriks bujur sangkar ordo n – k . Jelas bahwa B stokastik ganda. Perhatikan bahwa jumlah entri-entri pada k kolom pertama dari B adalah k dan semua entri yang tak nol pada kolom-kolom di atas termuat di dalam X, dengan demikian σ (X) = k. Dengan cara serupa, dengan memandang n – k baris terakhir dari B diperoleh σ (Z) = n – k. Di sisi lain

n = σ (B) = σ (X) + σ (Y) + σ (Z) = k + σ (Y) + n – k = n + σ (Y) atau σ (Y) = 0.

Dengan demikian Y = 0 dan diperoleh A kogredien ke $B = X \dot{+} Z$, dimana X dan Z adalah matriks stokastik ganda. ■

Jika di dalam bukti dari Teorema 5 di atas X atau Y tereduksi maka matriks tersebut kogredien ke jumlah langsung dari matriks stokastik ganda dan diperoleh hasil berikut ini :

Akibat :

Suatu matriks stokastik ganda tereduksi kogredien ke jumlah langsung matriks stokastik ganda tak tereduksi.

5. KESIMPULAN

Karakteristik yang tampak dari matriks stokastik ganda adalah matriks tersebut merupakan matriks bujur sangkar dan mempunyai entri yang tak nol pada diagonalnya. Di samping itu perkalian antara matriks stokastik ganda menghasilkan matriks stokastik ganda lagi dan pada umumnya matriks stokastik ganda tidak dapat dinyatakan sebagai hasil kali matriks stokastik ganda elementer. Dalam hal matriks stokastik gandanya bersifat tereduksi, matriks ini kogredien ke jumlah langsung dari matriks-matriks stokastik ganda yang tak tereduksi.

DAFTAR PUSTAKA

1. D. Konig, *Uber Graphen und ihre Anwendung auf Determinantentheorie und Mengenlehre,* Math. Ann. 77, 1916, 453 – 465.
2. I. Schur, Uber eine Klasse von Mitteibildungen mit Anwendung auf die Determinantentheorie, Sber. Berliner Math. Ges., 22, 9 – 20, 1923.
3. H. Minc, Non Negative Matrices, John Wiley & Sons, New York, 1988.
4. M. Marcus and H. Minc, *Some results on Doubly Stochastic Matrices,* Proc. Amer. Math. Soc. 76, 571 – 579, 1962.