

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Populasi merupakan kumpulan dari individu organisme yang memiliki sifat tumbuh (*growth*), reaksi (*respons*) terhadap lingkungannya, dan reproduksi.

Pada dasarnya, pertumbuhan makhluk hidup pada suatu populasi merupakan proses yang berlangsung secara diskret, di mana pengukurannya dilakukan setiap selang waktu tertentu seperti tiap satu minggu, satu bulan, atau satu tahun. Untuk menggambarkan proses tersebut secara matematis, digunakanlah persamaan diferensi yang menggambarkan hubungan ketergantungan antara jumlah populasi pada waktu yang berturut-turut. Sebagian besar model perkembangan dan pertumbuhan makhluk hidup mengikuti kaidah yang berkaitan dengan bentuk-bentuk dari fungsi non-linier, salah satu contoh model pertumbuhan ini adalah model pertumbuhan logistik yaitu model pertumbuhan yang memperhitungkan faktor logistik berupa ketersediaan makanan dan ruang hidup.

Salah satu tujuan utama dari sistem dinamik adalah mempelajari perilaku dari solusi sistem di sekitar titik setimbang (*equilibrium*) (Elaydi, 1996). Untuk mempelajari perilaku dari solusi sistem tersebut digunakan suatu pendekatan yang disebut analisis kestabilan. Analisis ini dapat dilakukan dengan beberapa cara seperti melakukan penyelidikan terhadap perilaku titik setimbang dari persamaan diferensi. Titik setimbang dan kestabilannya dapat memberikan informasi

mengenai perilaku solusi dari persamaan diferensi tak linear. Perilaku titik setimbang x^* dapat diselidiki melalui turunan dari persamaan diferensi f pada titik x^* , kondisi kestabilan dari titik setimbang x^* dapat ditentukan dari beberapa kriteria $f'(x^*)$, antara lain pada saat $f'(x^*) < 1$, $f'(x^*) > 1$, dan $|f'(x^*)| = 1$. Telah banyak pembahasan mengenai kestabilan dari titik setimbang pada kondisi di mana $f'(x^*) < 1$ dan $f'(x^*) > 1$, sedangkan pada saat $|f'(x^*)| = 1$ belum dapat disimpulkan kestabilan dari titik setimbang. Pada tugas akhir ini akan dikembangkan kajian kestabilan yang memenuhi kasus $|f'(x^*)| = 1$ karena stabil tidaknya suatu permasalahan persamaan diferensi harus diketahui. Selain melakukan penyelidikan terhadap perilaku titik setimbang dari persamaan diferensi, analisis kestabilan juga dapat dilakukan melalui metode grafikal, metode grafikal merupakan salah satu cara untuk memperoleh gambaran visual bagaimana proses dinamika populasi mengikuti suatu persamaan atau model tertentu, untuk melakukannya parameter-parameter model perlu diberi nilai. Analisis secara grafikal ini dilakukan dengan memplotkan nilai populasi pada saat tertentu terhadap kerapatan populasi saat satu selang sebelumnya.

Berdasarkan pada pemikiran tersebut, maka pembahasan dititikberatkan pada pengkajian analisis kestabilan dari persamaan diferensi tak linier.

1.2 Permasalahan

Permasalahan yang akan diselesaikan pada penulisan tugas akhir ini adalah menentukan syarat cukup agar titik setimbang dari persamaan diferensi tak linier stabil atau tidak stabil, dan menganalisis kestabilan dari persamaan diferensi tak linier secara teoritis dan menggunakan diagram *Cobweb*.

1.3 Pembatasan Masalah

Permasalahan dibatasi pada analisis persamaan diferensi tak linier orde satu dengan mengambil kasus persamaan diferensi logistik.

1.4 Tujuan Penulisan

Tujuan dari penulisan tugas akhir ini adalah untuk:

1. Mengetahui syarat cukup agar titik setimbang dari persamaan diferensi tak linier stabil atau tidak stabil.
2. Menganalisis kestabilan dari persamaan diferensi tak linier untuk kasus persamaan diferensi logistik.
3. Mengetahui kestabilan dari persamaan diferensi tak linier untuk kasus persamaan diferensi logistik.

1.5 Sistematika Penulisan

Sistematika penulisan dalam tugas akhir ini terbagi menjadi 4 bab, yaitu pendahuluan, teori penunjang, pembahasan, dan penutup. Bab I adalah Pendahuluan yang berisi latar belakang, permasalahan yang diangkat, pembatasan

masalah, tujuan penulisan dan sistematika penulisan. Bab II adalah Teori Penunjang yang berisi tentang teori dasar dan teori yang mendukung dalam pembahasan tugas akhir ini yang meliputi konsep penunjang dalam kalkulus, prinsip induksi matematis, persamaan diferensi, diagram *Cobweb* dan model pertumbuhan logistik. Bab III adalah Analisis Kestabilan Persamaan Diferensi Tak Linier yang berisi tentang pembahasan titik setimbang, persamaan diferensi logistik, dan kestabilan persamaan diferensi logistik. Bab IV adalah Penutup yang berisi tentang kesimpulan hasil pembahasan dan saran.

BAB II

TEORI PENUNJANG

2.1 Konsep Penunjang Dalam Kalkulus

2.1.1 Limit

Pengertian $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$ berarti bahwa bila x dekat tetapi berlainan dari c , maka $f(x)$ dekat dengan L .

Definisi 2.1.1 (Limit) (Purcell *and* Varberg, 1987)

$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$ berarti bahwa untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$ sedemikian

sehingga $|f(x) - L| < \varepsilon$, asalkan $0 < |x - c| < \delta$, yakni

$$0 < |x - c| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon \quad (2.1.1)$$

2.1.2 Turunan

Definisi 2.1.2 (Purcell *and* Varberg, 1987)

Turunan fungsi f adalah fungsi lain f' yang nilainya pada sebarang x adalah

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad (2.1.2)$$

asalkan limit ini ada.

Jika limit ini ada, maka f terdifferensialkan di x . Jika $y = f(x)$, dimana Δx merupakan pertambahan dari x dan Δy merupakan pertambahan dari y dan $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$, maka menurut persamaan (2.1.2):

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \end{aligned} \quad (2.1.3)$$

Pada persamaan (2.1.3), saat $\Delta x \rightarrow 0$, $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ dapat dituliskan dengan simbol

$\frac{dy}{dx}$ yang disebut notasi Leibniz.

Contoh 2.1.1: (Purcell and Varberg, 1987)

Andaikan $f(x) = 13x - 6$. Cari $f'(4)$.

Penyelesaian:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\ f'(4) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{[13(4 + \Delta x) - 6] - [13(4) - 6]}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{13\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 13 = 13. \end{aligned}$$

2.1.3 Aturan Rantai (Purcell and Varberg, 1987)

Andaikan $y = f(u)$ dan $u = g(x)$ dua fungsi yang differensiabel, maka y dapat dinyatakan sebagai fungsi komposisi dari f dan g :

$$y = f(u) = f[g(x)]$$

Jika g terdifferensialkan di x dan f terdifferensialkan di $u = g(x)$, maka $y = f[g(x)]$ terdifferensialkan di x dan

$$y' = g'(x)f'[g(x)]$$

Atau dengan notasi Leibniz

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dx} \quad (2.1.4)$$

2.1.4 Fungsi Naik dan Fungsi Turun (Thomas and Finney, 1986)

Definisi 2.1.2

Sebuah fungsi $y = f(x)$ adalah sebuah *fungsi naik* pada sebuah selang I jika

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

Untuk semua x_1 dan x_2 dalam I .

Sebuah fungsi $y = f(x)$ adalah sebuah *fungsi turun* pada sebuah selang I jika

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_2) < f(x_1)$$

Untuk semua x_1 dan x_2 dalam I .

Uji Turunan Pertama untuk Fungsi Naik dan Fungsi Turun

Andaikan bahwa $y = f(x)$ memiliki sebuah turunan di setiap titik x dari sebuah selang I , maka:

1. f naik pada I jika $f'(x) > 0$ untuk semua x dalam I , dan
2. f turun pada I jika $f'(x) < 0$ untuk semua x dalam I .

2.1.5 Kecekungan

Definisi 2.1.3 (Thomas *and* Finney, 1986)

Grafik dari sebuah fungsi yang differensiabel $y = f(x)$ *cekung ke bawah* pada selang dimana y' turun dan *cekung ke atas* pada selang dimana y' naik.

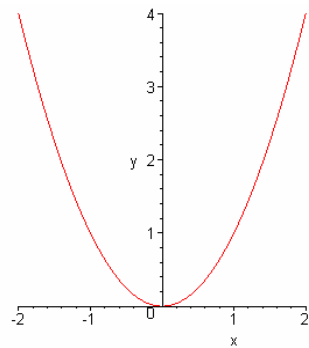
Teorema 2.1.1 (Teorema Kecekungan) (Purcell *and* Varberg, 1987)

Andaikan f terdifferensial dua kali pada selang terbuka (a, b) .

- i. Jika $f''(x) > 0$ untuk semua x dalam (a, b) , maka f cekung ke atas pada (a, b) .
- ii. Jika $f''(x) < 0$ untuk semua x dalam (a, b) , maka f cekung ke bawah pada (a, b) .

Contoh 2.1.2: (Thomas *and* Finney, 1986)

Kurva $y = x^2$ cekung ke atas pada seluruh sumbu- x karena $y'' = 2 > 0$.



Gambar 2.1. Grafik $y = x^2$

2.1.6 Teorema Nilai Rata-Rata

Teorema 2.1.2 (Purcell *and* Varberg, 1987)

Jika f kontinu pada selang tertutup $[a, b]$ dan terdiferensial pada titik-titik dalam dari (a, b) , maka terdapat paling sedikit satu bilangan c dalam (a, b) di mana

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

atau

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

2.1.7 Deret Taylor (Purcell *and* Varberg, 1987)

Rumus Taylor dengan Sisa

Andaikan f adalah suatu fungsi dengan turunan ke $(n+1)$, $f^{(n+1)}(x)$, ada untuk setiap x pada suatu selang buka I yang mengandung a . Maka untuk setiap x di I .

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n(x)$$

dimana sisa (atau kesalahan) $R_n(x)$ diberikan oleh rumus

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

dan c suatu titik antara x dan a .

2.2 Prinsip Induksi Matematis (Purcell and Varberg, 1987)

Misalkan $\{P_n\}$ adalah suatu deret proposisi (pernyataan) yang memenuhi kedua persyaratan di bawah ini

- P_N adalah benar (biasanya N adalah 1).
- Kebenaran P_i secara tidak langsung menyatakan kebenaran P_{i+1} , $i \geq N$.

maka P_n adalah benar untuk setiap bilangan bulat $n \geq N$.

Contoh 2.2.1: (Purcell and Varberg, 1987)

Buktikan $P_n : 2^n > n + 20$ adalah benar untuk setiap bilangan bulat $n \geq 5$.

Penyelesaian:

Pertama-tama perhatikan bahwa $P_5 : 2^5 > 5 + 20$ adalah benar.

Kedua, kita anggap bahwa $P_i : 2^i > i + 20$ adalah benar dan berusaha menarik

kesimpulan dari sini bahwa $P_{i+1} : 2^{i+1} > i + 1 + 20$ adalah benar. Tetapi

$$2^{i+1} = 2 \cdot 2^i > 2(i + 20) = 2i + 40 > i + 21$$

$$2^{i+1} > i + 21$$

Pertidaksamaan di atas merupakan proposisi P_{i+1} , sehingga dapat disimpulkan

bahwa P_n adalah benar untuk $n \geq 5$.

2.3 Persamaan Diferensi

Definisi 2.3.1 (Mickens, 1990)

Misalkan barisan $\{x(n)\}$, dengan $n =$ bilangan bulat tak negatif.

$$\{x(n)\} = x(0), x(1), x(2), \dots$$

Hubungan antara $n, x(n), x(n+1), \dots, x(n+k)$ yang dinyatakan dalam bentuk

$$x(n+k) = F(n, x(n), x(n+1), \dots, x(n+k-1)) \quad (2.3.1)$$

disebut persamaan diferensi.

$F(n, x(n), x(n+1), \dots, x(n+k-1))$ pada persamaan (2.3.1) menyatakan fungsi dari $(n, x(n), x(n+1), \dots, x(n+k-1))$

Penulisan $x(n)$ dapat ditulis dengan x_n .

Definisi 2.3.2 (Mickens, 1990)

Order dari suatu persamaan diferensi adalah selisih antara indeks tertinggi dengan indeks terendah dari suatu persamaan diferensi.

Contoh 2.3.1:

Persamaan diferensi

$$x(n+1) - 3x(n) + x(n-1) = e^{-n} \quad (2.3.2)$$

Order dari persamaan (2.3.2) adalah selisih antara indeks tertinggi dengan indeks terendah, yaitu:

$$(n+1) - (n-1) = 2$$

Jadi, persamaan (2.3.2) mempunyai order 2.

Definisi 2.3.3 (Mickens, 1990)

Suatu persamaan diferensi adalah non-linear jika persamaan tersebut tidak linear.

Definisi 2.3.4 (Mickens, 1990)

Solusi dari sebuah persamaan diferensi adalah suatu fungsi $\Phi(n)$ yang memenuhi persamaan (2.3.1).

Contoh 2.3.2:

$$\text{Fungsi } \Phi(n) = 2^n \quad (2.3.3)$$

adalah solusi dari persamaan diferensi linear orde satu

$$y_{n+1} - 2y_n = 0 ,$$

karena substitusi $\Phi(n)$ ke persamaan (2.3.3)

$$2^{n+1} - 2(2^n) = 2^{n+1} - 2^{n+1} = 0$$

2.3.1 Persamaan Diferensi Linear Orde Satu (Mickens, 1990)

Bentuk umum dari persamaan diferensi orde satu adalah

$$x(n+1) - a(n)x(n) = g(n) \quad (2.3.4)$$

$$x(n+1) - a(n)x(n) = 0 \quad (2.3.5)$$

Persamaan (2.3.4) merupakan persamaan non-homogen, bila $g(n) = 0$ seperti pada persamaan (2.3.5) maka persamaan tersebut disebut persamaan homogen.

a. Penyelesaian persamaan homogen (2.3.5)

Pada persamaan (2.3.5), bila diberikan nilai $x(1)$, maka

$$x(2) = a(1)x(1)$$

$$x(3) = a(2)x(2)$$

⋮

$$x(n-1) = a(n-2)x(n-2)$$

$$x(n) = a(n-1)x(n-1)$$

Maka,

$$x(n) = x(1)a(1)a(2)\dots a(n-2)a(n-1)$$

$$x(n) = x(1) \prod_{i=1}^{n-1} a(i) \quad (2.3.6)$$

Persamaan (2.3.6) merupakan solusi dari persamaan (2.3.5).

Contoh 2.3.3: (Mickens, 1990)

Persamaan diferensi homogen orde satu dengan koefisien konstan mempunyai bentuk

$$x(n+1) - \beta x(n) = 0, \quad \beta = \text{konstanta} \quad (2.3.7)$$

Pada persamaan (2.3.7), $a(n) = \beta$. Maka, dari persamaan (2.3.6), solusi dari persamaan (2.3.7) adalah

$$x(n) = A \prod_{i=1}^{n-1} \beta = C\beta^n$$

dimana $C = A/\beta$ merupakan konstanta sebarang.

b. Penyelesaian persamaan non-homogen (2.3.4)

Solusi umum dari persamaan (2.3.4) terdiri dari penjumlahan solusi persamaan homogen (2.3.5) dan solusi partikular dari persamaan non-homogen (2.3.4).

Dengan membagi kedua ruas persamaan (2.3.4) dengan $\prod_{i=1}^n a(i)$, maka persamaan (2.3.4) menjadi

$$\begin{aligned} x(n+1) / \prod_{i=1}^n a(i) - x(n) / \prod_{i=1}^{n-1} a(i) &= g(n) / \prod_{i=1}^n a(i) \\ \Delta \left(x(n) / \prod_{i=1}^{n-1} a(i) \right) &= g(n) / \prod_{i=1}^n a(i) \end{aligned} \quad (2.3.8)$$

Maka, solusi partikular dari persamaan (2.3.8) adalah

$$\begin{aligned} x(n) / \prod_{i=1}^{n-1} a(i) &= \Delta^{-1} \left(g(n) / \prod_{i=1}^n a(i) \right) \\ x(n) &= \left(\prod_{i=1}^{n-1} a(i) \right) \sum_{i=1}^{n-1} \left(g(i) / \prod_{r=1}^i a(r) \right) \end{aligned} \quad (2.3.9)$$

Sehingga solusi umum persamaan (2.3.4) adalah

$$x(n) = A \prod_{i=1}^{n-1} a(i) + \left(\prod_{i=1}^{n-1} a(i) \right) \sum_{i=1}^{n-1} \left(g(i) / \prod_{r=1}^i a(r) \right) \quad (2.3.10)$$

Contoh 2.3.4: (Mickens, 1990)

Perhatikan persamaan diferensi non-homogen

$$x(n+1) - nx(n) = 1 \quad (2.3.11)$$

pada persamaan (2.3.11), $a(n) = n$ dan $g(n) = 1$. Karena

$$\prod_{i=1}^n i = n!,$$

maka,

$$\sum_{i=1}^{n-1} \left(g(i) / \prod_{r=1}^i a(r) \right) = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i!},$$

sehingga persamaan (2.3.11) memiliki solusi

$$x(n) = A(n-1)! + (n-1)! \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i!} \quad (2.3.12)$$

2.3.2 Hubungan Antara Persamaan Diferensi Linear dengan Persamaan Differensial (Mickens, 1990)

Perhatikan persamaan differensial linear orde- n dengan koefisien konstan,

$$D^n y(x) + a_1 D^{n-1} y(x) + \dots + a_n y(x) = 0 \quad (2.3.13)$$

di mana,

$D \equiv d/dx$ adalah operator diferensiasi,

a_i , dengan $i = 1, 2, \dots, n$ adalah konstanta, dan $a_n \neq 0$.

Persamaan diferensi yang berasosiasi dengan persamaan (2.3.13) adalah

$$y(k+n) + a_1 y(k+n-1) + \dots + a_n y(k) = 0 \quad (2.3.14)$$

Teorema berikut ini memberikan hubungan antara solusi dari persamaan (2.3.13) dan (2.3.14).

Teorema 2.3.1 (Mickens, 1990)

Jika

$$y(x) = \sum_{i=1}^l \left(\sum_{j=0}^{n_i-1} c_{i,j+1} x^j \right) e^{r_i x} + \sum_{j=(n_1+\dots+n_l)+1}^n c_j e^{r_j x} \quad (2.3.15)$$

adalah solusi umum dari persamaan (2.3.13), dimana $c_{i,j+1}$ dan c_j sebarang konstanta, $n_i \geq 1, i = 1, 2, \dots, l$ dengan $n_1 + n_2 + \dots + n_l \leq n$, di mana persamaan karakteristik

$$r^n + a_1 r^{n-1} + \dots + a_n = 0 \quad (2.3.16)$$

memiliki akar r_i sebanyak n_i kali, $i = 1, 2, \dots, l$, dan suatu akar sederhana r_j .

Jika $y(k)$ merupakan solusi umum dari persamaan (2.3.14). Maka

$$y(k) = D^k y(x) \Big|_{x=0}, \quad (2.3.17)$$

dan

$$y(k) = \sum_{i=1}^l \left(c_{i1} + \sum_{m=1}^{n_i-1} \gamma_{i,m} k^m \right) r_i^k + \sum_{j=(n_1+\dots+n_l)+1}^n c_j r_j^k \quad (2.3.18)$$

dimana $\gamma_{i,m}$ adalah sebarang konstanta.

Contoh 2.3.5: (Mickens, 1990)

Perhatikan persamaan differensial orde-2

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - 3 \frac{dy}{dx} + 2y = 0, \quad (2.3.19)$$

Persamaan (2.3.19) tersebut mempunyai solusi umum

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{2x}. \quad (2.3.20)$$

dimana c_1 dan c_2 adalah sebarang konstanta. Persamaan diferensi yang berasosiasi dengan persamaan differensial tersebut adalah

$$y(k+2) - 3y(k+1) + 2y(k) = 0, \quad (2.3.21)$$

Persamaan (2.3.21) tersebut mempunyai solusi umum

$$y(k) = A + B 2^k. \quad (2.3.22)$$

Karena persamaan karakteristik $r^2 - 3r + 2 = 0$ mempunyai akar $r_1 = 1$ dan $r_2 = 2$, A dan B adalah sebarang konstanta. Sekarang akan ditunjukkan bagaimana solusi pada persamaan (2.3.22) dapat diperoleh dari persamaan (2.3.20).

Dengan menghitung $D^k y(x)$, yaitu

$$D^k y(x) = \frac{d^k}{dx^k} (c_1 e^x + c_2 e^{2x}) = c_1 e^x + 2^k c_2 e^{2x},$$

Maka,

$$y(k) = D^k y(x) \Big|_{x=0} = c_1 + c_2 2^k. \quad (2.3.23)$$

Persamaan (2.3.23) tersebut mempunyai bentuk yang sama seperti persamaan (2.3.22) kecuali pada pelabelan konstanta sebarang.

2.3.3 Persamaan Diferensi Non-Linear (Mickens, 1990)

Pada persamaan diferensi non-linear, tidak ada teknik umum dalam mencari solusi. Berikut diberikan contoh penyelesaian persamaan diferensi non-linear menggunakan metode transformasi non-linear sehingga penyelesaian dapat diselesaikan dalam bentuk persamaan diferensi linear.

Persamaan Homogen

Suatu persamaan homogen dalam $x(n)$ dapat ditulis dalam bentuk:

$$f\left(\frac{x(n+1)}{x(n)}, n\right) = 0 \quad (2.3.24)$$

Jika fungsi non-linear f merupakan suatu fungsi polinomial dari $\frac{x(n+1)}{x(n)}$, maka

persamaan (2.3.24) dapat ditulis dalam bentuk:

$$\prod_{i=1}^k [z(n) - A_i(n)] = 0 \quad (2.3.25)$$

dimana $z(n) = \frac{x(n+1)}{x(n)}$, dan $A_i(n)$ adalah fungsi dari n , dan k adalah order dari

fungsi polinomial $z(n)$. Solusi dari masing-masing persamaan linear

$$z(n) - A_i(n) = 0 \quad (2.3.26)$$

$$x(n+1) - A_i(n)x(n) = 0 \quad (2.3.27)$$

memberikan solusi untuk persamaan (2.3.24).

Contoh 2.3.6: (Mickens, 1990)

Perhatikan persamaan diferensi

$$x(n+1)^2 - 4x(n+1)x(n) - 5x(n)^2 = 0 \quad (2.3.28)$$

dengan substitusi $z(n) = \frac{x(n+1)}{x(n)}$, persamaan (2.3.28) menjadi

$$z(n)^2 - 4z(n) - 5 = (z(n) - 5)(z(n) + 1) = 0$$

maka,

$$(x(n+1) - 5x(n)) = 0 \text{ atau } (x(n+1) + x(n)) = 0$$

sehingga solusi dari persamaan (2.3.28) adalah

$$x(n) = C5^n \text{ atau } x(n) = C(-1)^n$$

2.4 Diagram *Cobweb*

Diagram *Cobweb* merupakan suatu metode grafikal yang digunakan untuk menganalisis stabilitas dari titik-titik setimbang dan titik periodik dari persamaan diferensi (2.3.1). Langkah-langkah membuat diagram *Cobweb* merupakan suatu prosedur yang berulang. Diagram *Cobweb* disebut juga diagram *Stair Step* karena bentuknya yang menyerupai tangga atau jaring laba-laba (Devaney and Robert, 1992).

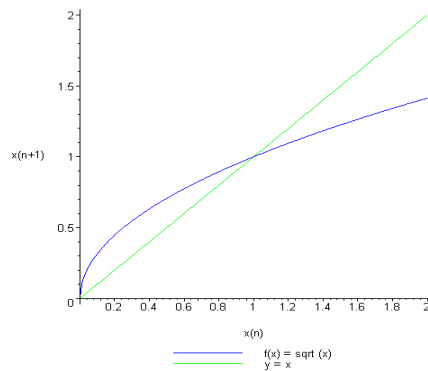
Langkah-langkah membuat diagram *Cobweb* dimulai dengan menggambarkan grafik fungsi f dan garis diagonal bersudut 45° $y = x$ ke dalam bidang $(x(n), x(n+1))$. Perpotongan dari grafik fungsi f dan garis diagonal bersudut 45° $y = x$ merupakan titik setimbang dari fungsi f . Kemudian, dengan menentukan nilai $x(0)$, dapat ditunjukkan dengan tepat nilai $x(1)$ dengan menggambar sebuah garis vertikal melalui $x(0)$ sehingga garis ini juga berpotongan dengan grafik f pada $(x(0), x(1))$. Langkah selanjutnya, gambar sebuah garis horisontal dari $(x(0), x(1))$ sehingga bertemu dengan garis diagonal $y = x$ pada titik $(x(1), x(1))$. Berikutnya, sebuah garis vertikal yang digambarkan dari titik $(x(1), x(1))$ akan bertemu dengan grafik f pada titik $(x(1), x(2))$. Dengan melanjutkan proses ini, akan didapatkan nilai $x(n)$ untuk semua $n > 0$ (Elaydi, 1996). Proses iterasi pada diagram *Cobweb* dapat memberikan hasil yang konvergen atau divergen.

Contoh 2.4.1: (Devaney and Robert, 1992)

Gambarkan diagram *Cobweb* untuk $f(x) = \sqrt{x}$.

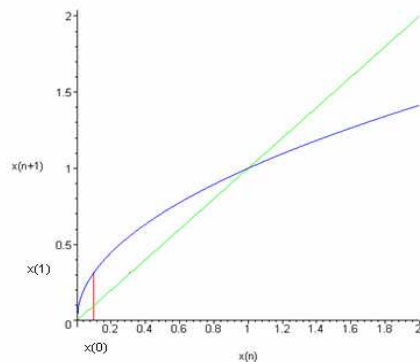
Penyelesaian:

Langkah 1: menggambar fungsi $f(x) = \sqrt{x}$ dan garis $y = x$ pada bidang $(x(n), x(n+1))$.



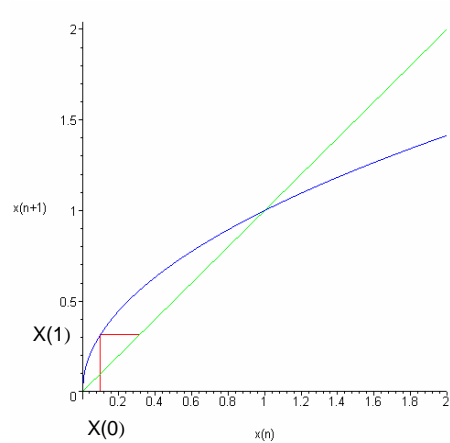
Gambar 2.2. Langkah 1 dalam menggambar diagram *Cobweb* untuk $f(x) = \sqrt{x}$

Langkah 2: Misalkan diambil nilai awal $x(0) = 0.1$, dapat ditunjukkan dengan tepat nilai $x(1)$ dengan menggambar sebuah garis vertikal melalui $x(0)$ sehingga garis ini juga berpotongan dengan grafik f pada $(x(0), x(1))$.



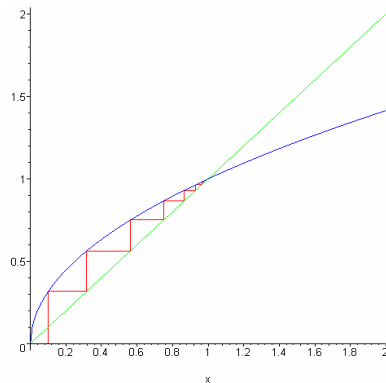
Gambar 2.3. Langkah 2 dalam menggambar diagram *Cobweb* untuk $f(x) = \sqrt{x}$

Langkah 3: Gambar sebuah garis horisontal dari $(x(0), x(1))$ sehingga bertemu dengan garis diagonal $y = x$ pada titik $(x(1), x(1))$.



Gambar 2.4. Langkah 3 dalam menggambar diagram *Cobweb* untuk $f(x) = \sqrt{x}$

Langkah 4: sebuah garis vertikal yang digambarkan dari titik $(x(1), x(1))$ akan bertemu dengan grafik f pada titik $(x(1), x(2))$. Dengan melanjutkan proses ini, akan didapatkan nilai $x(n)$ untuk semua $n > 0$.



Gambar 2.5. Langkah 4 dalam menggambar diagram *Cobweb* untuk $f(x) = \sqrt{x}$

2.5 Model Pertumbuhan Logistik

Salah satu model pertumbuhan populasi adalah model pertumbuhan logistik. Dengan menggunakan kaidah logistik bahwa persediaan logistik ada batasnya, model ini mengasumsikan bahwa pada masa tertentu jumlah populasi akan mendekati titik kesetimbangan (*equilibrium*). Pada titik ini jumlah kelahiran dan kematian dianggap sama, sehingga grafiknya akan mendekati konstan (*zero growth*) (Kosala, 2000).

Misalkan $N(t)$ menyatakan jumlah populasi pada saat t , dan R_0 menyatakan laju pertumbuhan populasi maka secara umum pertumbuhan suatu populasi dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$\frac{dN}{dt} = R_0 N,$$

atau

$$\frac{1}{N} \frac{dN}{dt} = R_0, \quad (2.5.1)$$

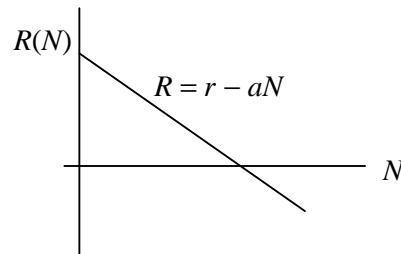
Namun pada kenyataannya laju pertumbuhan populasi tidak konstan, dan bergantung pada populasi, sehingga laju pertumbuhan dengan konstan R_0 pada persamaan (2.5.1) diganti dengan suatu fungsi $R(N)$ sehingga diperoleh

$$\frac{dN}{dt} = R(N) N, \quad (2.5.2)$$

pemilihan fungsi $R(N)$ didasarkan pada sifat berikut

- a. $R(N) \cong r > 0$ saat N kecil,
- b. $R(N)$ menurun dengan meningkatnya N , dan
- c. $R(N) < 0$ saat N cukup besar.

Fungsi paling sederhana yang memiliki sifat ini adalah $R(N) = r - aN$, dimana a adalah konstanta positif. Keadaan ini dapat digambarkan pada grafik di bawah ini



Gambar 2.6. Grafik Laju Pertumbuhan Logistik

Dengan menggunakan fungsi pada persamaan (2.5.2), maka diperoleh

$$\frac{dN}{dt} = (r - aN)N, \quad (2.5.3)$$

Persamaan (2.5.3) dikenal dengan persamaan *Verhulst* atau persamaan logistik.

Secara ekuivalen, persamaan (2.5.3) dapat ditulis dalam bentuk

$$\frac{dN}{dt} = rN \left(1 - \frac{N}{K} \right), \quad (2.5.4)$$

dimana $K = \frac{r}{a}$. Konstanta r merupakan laju pertumbuhan intrinsik (*intrinsic growth rate*), yaitu nilai yang menggambarkan daya tumbuh suatu populasi (Boyce and Diprima, 1992). Dalam hal ini, diasumsikan $r > 0$ karena setiap populasi memiliki potensi untuk berkembang biak, dan K menyatakan *carrying capacity* (kapasitas tampung) yaitu ukuran maksimum dari suatu populasi yang dapat disokong oleh suatu lingkungan.

Persamaan (2.5.4) disebut sebagai model pertumbuhan logistik. Jika ditambahkan syarat awal $N(0) = N_0$, maka diperoleh solusi khusus persamaan differensial ini, yaitu:

$$N(t) = \frac{K}{\left(\frac{K}{N_0 - 1}\right)e^{-rt} + 1}. \quad (2.5.5)$$

dengan,

$N(t)$ = jumlah populasi pada waktu t

r = laju pertumbuhan intrinsik

K = *carrying capacity*