INFERENSI STATISTIK DISTRIBUSI BINOMIAL DENGAN METODE BAYES MENGGUNAKAN PRIOR KONJUGAT

Oleh :

ADE CANDRA SISKA

NIM: J2E 006 002

SKRIPSI

Sebagai Salah Satu Syarat untuk Memperoleh Gelar

Sarjana Sains Pada Program Studi Statistika

PROGRAM STUDI STATISTIKA

JURUSAN MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS DIPONEGORO

2011

INFERENSI STATISTIK DISTRIBUSI BINOMIAL DENGAN METODE BAYES MENGGUNAKAN PRIOR KONJUGAT

Oleh :

ADE CANDRA SISKA

NIM: J2E 006 002

Skripsi

Sebagai Salah Satu Syarat untuk Memperoleh Gelar

Sarjana Sains Pada Program Studi Statistika

PROGRAM STUDI STATISTIKA

JURUSAN MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS DIPONEGORO

2011

HALAMAN PENGESAHAN

Lembar 1

Judul : Inferensi Statistik Distribusi Binomial dengan Metode Bayes Menggunakan Prior Konjugat

Nama : Ade Candra Siska

NIM : J2E 006 002

Telah diujikan pada sidang Tugas Akhir tanggal 6 Juni 2011 dan dinyatakan lulus pada tanggal 24 Juni 2011.

Semarang, Juni 2011

Panitia Penguji Ujian Sarjana

Program Studi Statistika Jurusan Matematika

Ketua

Dra. Tatik Widiharih, M.Si
1961 09 28 1986 03 2 002

Mengetahui,	Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika	Ketua Program Studi Statistika
Fakultas MIPA	
Dr.Widowati, S.Si, M.Si	Dra.Suparti, M.Si
NIP. 1969 02 14 1994 03 2 002	NIP.1965 09 13 1990 03 2 001

KEMENTERIAN PENDIDIKAN NASIONAL UNIVERSITAS DIPONEGORO FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

HALAMAN PENGESAHAN

Lembar 2

Judul Skripsi : Inferensi Statistik Distribusi Binomial dengan Metode Bayes Menggunakan Prior Konjugat

Nama Mahasiswa : Ade Candra Siska

NIM : J2E 006 002

Telah diujikan pada Sidang Tugas Akhir tanggal 6 Juni 2011

Semarang, Juni 2011

Panitia Penguji Ujian Sarjana

Program Studi Statistika Jurusan Matematika

Pembimbing I	Pembimbing II
Yuciana Wulandari, S.Si., M.Si.	Di Asih I Maruddani, S.Si., M.Si
NIP. 1970 05 19 1988 02 2 001	NIP. 19730711 199702 2 001

KATA PENGANTAR

Puji syukur kehadirat Allah SWT, karena atas rahmat, hidayah, kemudahan, dan segala limpahan nikmat-Nya, penulis bisa menyelesaikan Tugas Akhir dengan judul ***"Inferensi Statistik Distribusi Binomial dengan Metode Bayes Menggunakan Prior Konjugat"*** dengan baik. Penulisan Tugas Akhir ini disusun sebagai salah satu syarat bagi penulis untuk meraih gelar sarjana strata satu pada Program Studi Statistika Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam.

Penulis menyadari bahwa penyusunan Tugas Akhir ini tidak akan berjalan baik tanpa adanya dukungan dan bantuan dari berbagai pihak. Oleh karena itu, dalam kesempatan kali ini penulis ingin menyampaikan rasa terima kasih yang sebesar-besarnya kepada :

1. Ibu Dr. Muhammad Nur, DEA selaku Dekan Fakultas MIPA Universitas Diponegoro
2. Ibu Dr. Widowati, M.Si selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas MIPA Universitas Diponegoro.
3. Ibu Dra. Suparti, M.Si selaku Ketua Program Studi Statistika Fakultas MIPA Universitas Diponegoro.
4. Ibu Yuciana Wilandari, S.Si, M.Si serta Ibu Di Asih I Maruddani, S.Si., M.Si, selaku dosen pembimbing yang telah memberikan motivasi, arahan dan bimbingan.
5. Semua pihak yang tidak dapat disebutkan satu per satu yang telah banyak membantu penulis.

Penulis sadar bahwa Tugas Akhir ini masih jauh dari sempurna, untuk itu penulis mengharapkan kritik dan saran yang membangun guna perbaikan lebih lanjut.

Akhir kata semoga Tugas Akhir ini dapat bermanfaat bagi semua pihak.

Semarang, 24 Juni 2011

Penulis

ABSTRAK

Salah satu metode yang digunakan untuk inferensi statistik adalah metode Bayes. Metode Bayes menggabungkan distribusi sampel dan distribusi awal (prior), sehingga didapat distribusi posterior. Pada skripsi ini, distribusi sampel yang digunakan adalah distribusi Binomial. Distribusi prior yang digunakan adalah prior konjugat mengacu pada acuan analisis model terutama pembentukan fungsi likelihoodnya yaitu distribusi Beta dan Uniform. Setelah didapat distribusi posteriornya akan didapat estimasi titik, interval dan uji hipotesis untuk proporsi Binomial.

Kata kunci: Metode Bayes, Prior Konjugat, Beta, Binomial, Uniform.

ABSTRACT

One of the method which can be used in inference statistics is Bayesian method. It is combine sample distribution and prior distribution, so can result posterior distribution. In this thesis, sample distribution used is binomial distribution. Prior distribution used is the conjugate prior analysis refers to the reference model, especially the establishment of the distribution likelihood function, that is Beta and Uniform. After got the posterior distribution, then by using posterior distribution that has been formed will get the estimation of point, interval and hypothesis test for Binomial proportions.

Key Words: Bayesian method, Conjugate Prior, Beta, Binomial, Uniform.

DAFTAR ISI

Halaman

DAFTAR SIMBOL

$f(x)$	: fungsi densitas peluang dari variabel random X
$E(X)$	: nilai ekspektasi dari variabel random X
$Var(X)$	: variansi dari variabel random X
$\sim$	: berdistribusi
$\sum_{i}^{n} x_i$	: penjumlahan himpunan anggota $x_i \ldots x_n$
θ	: parameter proporsi
σ	: standard deviasi
a	: parameter distribusi Beta
b	: parameter distribusi Beta
Γ	: fungsi Gamma
∂	: differensial
n	: jumlah data sampel
Z	: nilai tabel Normal standard
α	: tingkat signifikansi
L	: likelihood
e	: eksponensial
$f(\theta)$	: distribusi prior
$f(x\|\theta)$	: fungsi likelihood
$f(\theta\|x)$	: distribusi posterior

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 LATAR BELAKANG

Metode statistik adalah prosedur-prosedur yang digunakan dalam pengumpulan, penyajian, analisis, dan penafsiran data. Dalam penggunaan statistika terdapat tiga bagian utama, yaitu statistika deskriptif, probabilitas (peluang) dan statistika inferensi. Statistika deskriptif bertujuan untuk menyajikan informasi data sebagai deskripsi fakta dalam bentuk numerik, tabel, grafik atau kurva distribusi, sehingga suatu fakta atau peristiwa dapat secara mudah untuk dipahami dan disimpulkan. Sedangkan statistika inferensi menggunakan konsep probabilitas untuk membuat perkiraan, prediksi, peramalan, ataupun generalisasi dari suatu objek berdasarkan informasi data yang diambil fakta sebagai populasi atau sampel (Mustafid, 2003). Inferensi statistik dapat dibedakan menjadi dua yaitu estimasi parameter dan uji hipotesis. Estimasi parameter dibedakan menjadi dua yaitu estimasi parameter titik dan estimasi parameter berupa interval. Inferensi statistik dapat dicari dengan metode klasik dan metode Bayes (Walpole dan Myers, 1995).

Pada suatu penelitian terkadang diamati karakteristik dari sebuah populasi. Beberapa macam ukuran statistik digunakan untuk mengetahui karakteristik dari populasi, misalnya rataan, varian, median, atau proporsi. Pada inferensi statistik ingin diperoleh kesimpulan mengenai populasi, meskipun tidak praktis untuk mengamati keseluruhan individu yang menyusun populasi atau tidak mungkin jika populasinya tak hingga. Dengan berbagai keterbatasan dan kendala, tidak dimungkinkan mengamati keseluruhan dari elemen populasi, maka dapat dilakukan langkah alternatif yaitu pendugaan populasi dengan menggunakan sampel yang diambil secara acak dari sebuah populasi.

Pada teori estimasi titik dapat dilakukan dengan dua metode yaitu metode klasik dan metode Bayes. Metode klasik sepenuhnya mengandalkan proses inferensi pada data sampel yang diambil dari populasi, sedangkan metode Bayes disamping memanfaatkan data sampel yang diperoleh dari populasi juga memperhitungkan suatu distribusi awal yang disebut distribusi prior (Walpole dan Myers, 1995). Salah satu teknik yang digunakan dalam metode klasik adalah metode maksimum likelihood. Metode klasik memandang parameter sebagai besaran tetap yang tidak diketahui harganya, dan inferensi didasarkan hanya pada informasi dalam sampel. Metode Bayes memandang parameter sebagai variabel yang menggambarkan pengetahuan awal tentang parameter sebelum pengamatan dilakukan dan dinyatakan dalam suatu distribusi yang disebut dengan distribusi prior (Bolstad, 2007). Setelah pengamatan dilakukan, informasi dalam distribusi prior dikombinasikan dengan informasi dengan data sampel melalui teorema Bayes, dan hasilnya dinyatakan dalam bentuk distribusi yang disebut distribusi posterior yang selanjutnya menjadi dasar untuk inferensi di dalam metode Bayes (Berger, 1990).

Dalam statistik klasik parameter proporsi Binomial dianggap sebagai sebuah nilai yang dianggap konstan, tapi dalam beberapa situasi dan tempat pengamatan yang berbeda akan diperoleh proporsi yang berubah-ubah, sehingga dalam hal ini prinsip Bayes cukup relevan digunakan, karena dalam prinsip Bayes parameter proporsi diperlakukan sebagai variabel agar mempunyai kemampuan yang akomodatif pada keadaan tersebut.

Teorema Bayes memungkinkan seseorang untuk memperbaruhi keyakinannya mengenai sebuah parameter setelah data diperoleh. Sehingga dalam hal ini mengharuskan adanya keyakinan awal (prior) sebelum memulai inferensi. Pada dasarnya distribusi prior bisa diperoleh berdasarkan keyakinan subjektif dari peneliti itu sendiri mengenai nilai yang mungkin untuk parameter yang diestimasi, sehingga perlu diperhatikan bagaimana cara menentukan prior. Jika distribusi sampel berasal dari keluarga Eksponensial, maka salah satu caranya adalah dengan menggunakan prior konjugat (Bolstad, 2007), dimana distribusi prior konjugat (*conjugate*) mengacu pada acuan analisis model terutama dalam pembentukan fungsi likelihoodnya, sehingga dalam penentuan prior konjugat selalu dipikirkan mengenai penentuan pola distribusi prior yang mempunyai bentuk konjugat dengan fungsi densitas peluang pembangun likelihoodnya (Box dan Tiao, 1973). Kemudian digabungkan dengan informasi sampel melalui teorema Bayes sehingga dihasilkan distribusi posterior. Setelah distribusi posterior terbentuk, maka dapat diperoleh estimasi titik, interval dan uji hipotesis Bayes untuk parameter yang diestimasi.

1.2 PERUMUSAN MASALAH

Dalam penulisan Tugas Akhir ini, permasalahan yang dibahas yaitu bagaimana menentukan inferensi statistik berupa estimasi titik, estimasi interval dan uji hipotesis untuk proporsi Binomial menggunakan prior konjugat dengan metode Bayes, serta membandingkan metode Bayes dengan metode maksimum likelihood untuk distribusi Binomial untuk parameter proporsi θ yang tidak diketahui.

1.3.1 PEMBATASAN MASALAH

Penulisan Tugas Akhir ini pembahasan masalah akan dibatasi mengenai prior Beta dan Uniform sebagai prior konjugat dari distribusi Binomial dan *Maximum Likelihood Estimator* (MLE) serta *Mean Square Error* (MSE) dan sifat takbias sebagai kriteria evaluasi estimator.

1.4 TUJUAN PENULISAN

Tujuan dari penulisan Tugas Akhir ini adalah:

1. Menentukan estimasi titik, estimasi interval dan uji hipotesis untuk proporsi Binomial dengan metode Bayes menggunakan prior Beta dan Uniform sebagai prior konjugatnya.
2. Membandingkan inferensi Bayes dengan metode maksimum likelihood untuk distribusi Binomial untuk parameter proporsi Binomial (θ) yang tidak diketahui.

1.5 SISTEMATIKA PENULISAN

Adapun sistematika penulisan Tugas Akhir ini terdiri atas empat bab, yaitu pendahuluan, tinjauan pustaka, pembahasan, dan penutup. Bab I Pendahuluan, berisi latar belakang masalah, permasalahan, pembatasan masalah, tujuan penulisan, dan sistematika penulisan. Bab II Teori Penunjang, berisi konsep dasar distribusi Binomial, distribusi Gamma, distribusi Beta, distribusi Uniform, teorema Bayes, distribusi prior dan posterior, estimasi interval serta uji hipotesis dan metode maksimum likelihood. Bab III Inferensi Statistik dari Distribusi Binomial dengan Metode Bayes untuk prior konjugatanya berisi distribusi Binomial sebagai distribusi sampel, likelihood dari distribusi Binomial, prior konjugat dari distribusi Binomial, prosedur memilih prior, estimator Bayes dari distribusi Binomial dengan prior Beta, estimator Bayes dari distribusi Binomial dengan prior Uniform, distribusi posterior, Interval kepercayaan Bayes serta uji hipotesis Bayes. Membandingkan inferensi estimator Bayes dengan MLE (*Maximum Likelihood Estimator*). Bab IV Kesimpulan, berisi kesimpulan-kesimpulan yang diperoleh berdasarkan pembahasan pada bab-bab sebelumnya.

BAB II

TEORI PENUNJANG

2.1 Variabel Random

Definisi 2.1 (Bain dan Engelhardt, 1992)

Suatu variabel random (peubah acak) dapat didefinisikan sebagai suatu fungsi yang memetakan unsur-unsur dalam ruang sampel suatu percobaan terhadap suatu gugus bilangan riil sebagai suatu wilayah fungsi. Variabel random dapat dilambangkan dengan huruf besar, misalnya *X*, *Y*, *Z*,... sedangkan huruf kecil *x*, *y*, *z*, ... dinotasikan sebagai nilai padanannya.

2.2 Fungsi Distribusi Peluang

Definisi 2.2 (Walpole dan Myers, 1995)

Jika X adalah suatu variabel random diskrit dengan hasil yang mungkin $x_1 x_1, \ldots, x_k$, maka fungsi peluangnya adalah suatu fungsi yang memenuhi kondisi:

1. $f(x_i) \geq 0$
2. $\sum_{i=1}^{k} f(x_i) = 1$
3. $f(x_i) = P(X = x_i)$

Definisi 2.3 (Walpole dan Myers, 1995)

Jika X adalah suatu variabel random kontinu, maka fungsi densitas peluangnya adalah suatu fungsi yang memenuhi kondisi:

1. $f(x) \geq 0$
2. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$

3. $P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx$

2.3 Ekspektasi dan Variansi

Definisi 2.4 (Walpole dan Myers, 1995)

Misalkan X suatu peubah acak dengan distribusi peluang f(x), maka Nilai ekspektasi X ialah

$$\mu = E(X) = \sum_x xf(x) \quad \text{bila X diskrit} \tag{2.1}$$

$$\mu = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx \quad \text{bila X kontinu} \tag{2.2}$$

Teorema 2.1 (Walpole dan Myers, 1995)

Misalkan X adalah suatu peubah acak dengan a dan b merupakan suatu tetapan, maka

$E(aX + b) = aE(X) + b$

BUKTI

Menurut definisi nilai ekspektasi

$$E(aX + b) = \int_{-\infty}^{\infty} (ax + b)f(x)dx$$

$$= a \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx + b \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$$

Karena $\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = E(X)$ dan $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$, maka diperoleh

$E(aX + b) = aE(X) + b$ *

Definisi 2.5 (Montgomery dan Runger, 2003)

Jika X adalah suatu variabel random diskrit dengan distribusi peluang f(x) maka variansi dari X yang dinotasikan dengan σ^2 atau var(X), adalah

$$\sigma^2 = Var(X) = E(X - \mu)^2 = \sum_x (x - \mu)^2 \ f(x)$$

$$= \sum_x (x^2 - 2\mu x + \mu^2) f(x)$$

$$= \sum_x x^2 f(x) - \sum_x 2\mu x \ f(x) + \sum_x \mu^2 f(x)$$

$$= \sum_x x^2 f(x) - 2\mu \sum_x x f(x) + \mu^2 \sum_x f(x)$$

$$= \sum_x x^2 f(x) - 2\mu^2 + \mu^2$$

$$= \sum_x x^2 f(x) - \mu^2 \tag{2.3}$$

Standar deviasi X adalah σ = $\sqrt{\sigma^2}$

Definisi 2.6 (Montgomery dan Runger, 2003)

Jika X adalah suatu variabel random kontinu dengan fungsi densitas peluang f(x), maka variansi dari X yang dinotasikan dengan σ^2 adalah

$$\sigma^2 = E(X - \mu)^2$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 \ f(x) dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} (x^2 - 2\mu x + \mu^2) f(x)\ dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) - \int_{-\infty}^{\infty} 2\mu x f(x) + \int_{-\infty}^{\infty} \mu^2 f(x) dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx - 2\mu \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx + \mu^2 \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx - 2\mu^2 + \mu^2$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x^2\, f(x) dx - \mu^2 \qquad (2.4)$$

Standar deviasi X adalah σ = $\sqrt{\sigma^2}$

Teorema 2.2 (Spiegel, Schiller dan Srinivasan, 2004)

Jika X adalah suatu variabel random dengan fungsi densitas peluang f(x), maka variansi dari X yang dinotasikan dengan σ^2 adalah

$$\sigma^2 = E(X - \mu)^2 = E(X^2) - \mu^2 = E(X^2) - [E(X)]^2$$

Dimana $\mu = E(X)$

BUKTI

$$\begin{aligned} E(X - \mu)^2 &= E(X^2 - 2\mu X + \mu^2) \\ &= E(X^2) - 2\mu E(X) + \mu^2 \\ &= E(X^2) - 2\mu^2 + \mu^2 \\ &= E(X^2) - \mu^2 \end{aligned}$$

$$= E(X^2) - [E(X)]^2 *$$

Teorema 2.3 (Bain dan Engelhardt, 1992)

Misalkan X adalah variabel random dan a dan b adalah konstanta, maka

$$Var(aX + b) = a^2\, Var(X)$$

BUKTI

$$Var(aX + b) = E[(aX + b - a\mu_X - b)^2]$$

$$= E[a^2(X - \mu_X)^2]$$

$$= a^2\, Var\,(X) *$$

2.4 Fungsi Densitas Peluang Bersama

Definisi 2.7 (Bain dan Engelhardt, 1992)

Fungsi densitas peluang bersama dari k-dimensi variabel random diskrit $X = (X_1, X_2, \dots, X_k)$ didefinisikan

$$f(x_1, x_2, \dots, x_k) = P[X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_k = x_k] \qquad (2.5)$$

untuk semua nilai $x = (x_1, x_2, \dots, x_k)$ dari X.

Definisi 2.8 (Bain dan Engelhardt, 1992)

Sebuah k-dimensi nilai vektor variabel random $X = (X_1, X_2, \dots, X_k)$ kontinu dengan fungsi densitas bersama $f(x_1, x_2, \dots, x_k)$, maka fungsi densitas komulatifnya dapat ditulis

$$F(x_1, \dots, x_k) = \int_{-\infty}^{x_1} \dots \int_{-\infty}^{x_k} f(t_1, \dots, t_k)\, dt_1 \dots dt_k \qquad (2.6)$$

untuk semua $x = (x_1, x_2, \ldots, x_k)$

2.5 Fungsi Densitas Peluang Marginal

Definisi 2.9 (Bain dan Engelhardt, 1992)

Jika pasangan (X_1, X_2) adalah variabel random diskrit yang mempunyai fungsi densitas peluang bersama $f(x_1, x_2)$, maka fungsi densitas peluang marginal untuk X_1 dan X_2 adalah

$$f_1(x_1) = \sum_{x_2} f(x_1, x_2) \tag{2.7}$$

$$f_2(x_2) = \sum_{x_1} f(x_1, x_2) \tag{2.8}$$

Jika pasangan (X_1, X_2) adalah variabel random kontinu yang mempunyai fungsi densitas peluang bersama $f(x_1, x_2)$, maka fungsi densitas peluang marginal untuk X_1 dan X_2 adalah

$$f_1(x_1) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2) dx_2 \tag{2.9}$$

$$f_2(x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2) dx_1 \tag{2.10}$$

2.6 Distribusi Bersyarat

Definisi 2.10 (Bain dan Engelhardt, 1992)

Jika X_1 dan X_2 merupakan variabel random diskrit atau kontinu dengan fungsi densitas peluang bersama $f(x_1, x_2)$, maka fungsi densitas peluang bersyarat dari X_2 jika diketahui $X_1 = x_1$ didefinisikan dengan:

$$f(x_2|x_1) = \frac{f(x_1, x_2)}{f_1(x_1)} \tag{2.11}$$

untuk nilai x_1 sedemikian hingga $f_1(x_1) > 0$, dan nol untuk lainnya. Sedangkan fungsi densitas peluang bersyarat dari X_1, jika diketahui $X_2 = x_2$ didefinisikan dengan :

$$f(x_1|x_2) = \frac{f(x_1, x_2)}{f_2(x_2)} \tag{2.12}$$

untuk nilai x_2 sedemikian hingga $f_2(x_2) > 0$, dan nol untuk lainnya.

2.7 Fungsi Gamma

Definisi 2.11 (Soehardjo 1985 dalam Pharamita, 2009)
Fungsi Gamma didefinisikan oleh

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty x^{n-1} e^{-x}\, dx \tag{2.13}$$

untuk n > 0 , n pecahan negatif n bukan bilangan bulat negatif

Teorema 2.4 (Soehardjo 1985 dalam Pharamita, 2009)

Sifat – sifat dari fungsi Gamma antara lain:

a) $\Gamma(n) = (n-1)\Gamma(n-1)$ atau $\Gamma(n-1) = \frac{\Gamma(n)}{(n-1)}$ (2.14)

$n > 1$, n pecahan negatif dan n bukan bilangan bulat negatif

b) $T(n) = (n-1)!$ (2.15)

c) $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ (2.16)

BUKTI PERSAMAAN (2.14)

Berdasarkan persamaan (2.13) jika dilakukan integral parsial dari fungsi Gamma dengan $u(x) = x^{n-1}$ dan $dv(x) = e^{-x}\, dx$, maka diperoleh

$$u(x) = x^{n-1} \Rightarrow du(x) = (n-1)x^{n-2}dx$$

$$dv(x) = e^{-x}\, dx \Rightarrow v(x) = \int_0^\infty e^{-x}\, dx = -e^{-x}$$

sehingga

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty u(x)dv(x)$$

$$= u(x)v(x) - \int_0^\infty v(x)du(x)$$

$$= -e^{-x}\, x^{n-1} \Big|_0^\infty - \int_0^\infty (-e^{-x})(n-1)\, x^{n-2}\, dx$$

$$= 0 + (n-1)\int_0^\infty (e^{-x})\, x^{n-2}dx$$

$\Gamma(n) = (n-1)\Gamma(n-1), n > 1$, n pecahan negatif dan n bukan bilangan bulat negatif

BUKTI PERSAMAAN (2.15)

Berdasarkan persamaan (2.14), dengan menggunakan rumus berulang berkali-kali diperoleh

$$\Gamma(n) = (n-1)\Gamma(n-1).$$

Dengan menggunakan cara yang sama akan dihasilkan

$$\Gamma(n) = (n-1)(n-2)\Gamma(n-2)$$

$$= (n-1)(n-2)(n-3)\Gamma(n-3) \dots dst$$

Bila n adalah bilangan bulat positif, maka,

$$\Gamma(n) = (n-1)(n-2) \dots \Gamma(1)$$

dimana

$$\mathit{\Gamma}(1) = \int_0^1 x^0 e^{-x}\, dx = -e^{-x}\Big|_0^{\infty}$$

$$= -(e^{-\infty}) - (-e^0)$$

$$= 0 - (-1)$$

$$= 1$$

Sehingga diperoleh

$$\mathit{\Gamma}(n) = (n-1)(n-2)\ldots 1$$

$$\mathit{\Gamma}(n) = (n-1)! *$$

untuk $n = 1,2,\ldots$

BUKTI PERSAMAAN 2.16

Bentuk lain dari $\Gamma(n)$ adalah:

$$\Gamma(n) = \int_0^{\infty} x^{n-1}e^{-x}dx = 2\int_0^{\infty} y^{2n-1}e^{-y^2}dy \qquad (2.17)$$

Bukti persamaan (2.17)

$$\Gamma(n) = \int_0^{\infty} x^{n-1}e^{-x}dx$$

Subsitusi: $x = y^2$

$dx = 2ydy$

Batas integralnya: $x = 0 \Rightarrow y = 0$

$x = \infty \Rightarrow y = \infty$

$$\int_0^{\infty} x^{n-1}e^{-x}dx = \int_0^{\infty} (y^2)^{n-1}e^{-(y^2)}2ydy$$

$$= 2\int_0^{2} y^{2n-2}e^{-y^2}ydy$$

$$= 2\int_0^{1} y^{2n-1}e^{-y^2}dy$$

Terbukti bahwa $\Gamma(n) = \int_0^\infty x^{n-1}e^{-x}dx = 2\int_0^\infty y^{2n-1}e^{-y^2}dy$, sehingga persamaan 2.16 dapat dibuktikan sebagai berikut;

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2\int_0^\infty y^{2\left(\frac{1}{2}\right)-1}e^{-y^2}dx$$

$$= 2\int_0^\infty e^{-y^2}dy$$

$$\left\{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right\}^2 = \left[2\int_0^\infty e^{-y^2}dy\right]\left[2\int_0^\infty e^{-z^2}\,dz\right]$$

$$= 4\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(y^2+z^2)}dydz$$

Subsitusi:

$y = r\cos\theta$

$z = rsin\ \theta$

$dydz = r\ dr\ d\theta$

Batas integralnya: $y = 0 \Rightarrow \theta = 0$

$z = 0 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$

$r = 0 \Rightarrow \theta = \infty$

$$\left\{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right\}^2 = 4\int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}}\int_{r=0}^{\infty} e^{-r^2}r\ dr\ d\theta$$

$$= 4 \int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_{r=0}^{\infty} e^{-r^2} r\, dr$$

$$= 4 \int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} \left(-\frac{e^{-r^2}}{2}\right)\Big|_0^{\infty} d\theta$$

$$= 4\left(\frac{1}{2}\right) \int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} d\theta$$

$$= 2\theta \Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$\left\{\Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right)\right\}^2 = \pi$$

$$\Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right) \quad = \sqrt{\pi}*$$

2.8 Distribusi Beta

Definisi 2.12 (Spiegel, Schiller dan Srinivasan, 2004)

Suatu variabel acak dikatakan memiliki distribusi Beta dengan parameter a dan b, jika fungsi kepadatanya adalah

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{B(a,b)} x^{a-1}(1-x)^{b-1} & 0 < x < 1 \\ 0 & \text{yang lain} \end{cases} \quad (2.18)$$

di mana $B(a,b)$ merupakan fungsi Beta yang didefinisikan sebagai

$$B(a,b) = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}\, dx \qquad a > 0, b > 0. \quad (2.19)$$

Fungsi Beta dihubungkan dengan fungsi Gamma oleh

$$B(a, b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a + b)}. \qquad (2.20)$$

Sehingga distribusi Beta juga dapat didefinisikan oleh fungsi kepadatan

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\Gamma(a + b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} x^{a-1}(1 - x)^{b-1} & 0 < x < 1 \\ 0 & \text{yang lainya} \end{cases} \qquad (2.21)$$

Teorema 2.5 (**Berger, 1990)**

Mean dan variansi dari distribusi Beta dengan parameter a dan b masing-masing adalah

$\mu = \frac{a}{a+b}$ dan $\sigma^2 = \frac{ab}{(a + b+1)(a+b)^2}$,

BUKTI

Menghitung momen dari distribusi Beta bisa dilakukan dengan metode sebagai berikut

$$EX^n = \frac{1}{B(a, b)} \int_0^1 x^n x^{a-1}(1 - x)^{b-1} dx$$

$$= \frac{1}{B(a, b)} \int_0^1 x^{(a+n)-1}(1 - x)^{b-1} dx \qquad (2.22)$$

maka juga dapat diperoleh persamaan

$$EX^n = \frac{B(a + n, b)}{B(a, b)} = \frac{\Gamma(a + n)\Gamma(\alpha + b)}{\Gamma(a + b + n)\Gamma(a)}. \qquad (2.23)$$

Berdasarkan persamaan (2.22) dan persamaan (2.23), maka untuk memperoleh mean ($E(X)$) dan var(X) = $E(X^2) - [E(X)]^2$ adalah dengan mensubsitusikan n= 1 dan n= 2 ke persamaan (2.23), maka

$$Mean(\mathrm{X}) = EX^1 = \frac{\Gamma(a+1)\Gamma(a+\ b)}{\Gamma(a+\ b+1)\Gamma(a)}$$

$$= \frac{a\,\Gamma(a)\Gamma(a+\ b)}{(\alpha+\ b)\Gamma(a+\ b)\Gamma(a)}$$

$$= \frac{a}{(\alpha+\ b)} *$$

dan

$$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2.$$

Karena

$$E(X^2) = \frac{\Gamma(a+2)\Gamma(a+\ b)}{\Gamma(a+\ b+2)\Gamma(a)}$$

$$= \frac{(a+1)a\,\Gamma(a)\,\Gamma(a+\ b)}{(a+\ b+1)(a+\ b)\Gamma(a+\ b)\Gamma(a)}$$

$$= \frac{(a+1)a}{(a+\ b+1)(a+\ b)},$$

maka

$$Var(X) = \frac{(a+1)a}{(\alpha+\ b+1)(a+\ b)} - \left(\frac{a}{a+\ b}\right)^2$$

$$= \frac{(a+1)a}{(a+\ b+1)(a+\ b)} - \frac{a^2}{(a+\ b)^2}$$

$$= \frac{(a+\ b)(a^2+\ a) - a^2(a+\ b+1)}{(a+\ b)^2(a+\ b+1)}$$

$$= \frac{ab}{(a+\ b)^2(a+\ b+1)} *$$

2. 9 Distribusi Uniform

Definisi 2.13 (Berger, 1990)

Distribusi Uniform kontinu memiliki sebaran probabilitas yang sama pada seluruh interval $[p, q]$, dengan densitas

$$f(x|p,q) = \begin{cases} \frac{1}{q-p} & \text{jika x} \in [\text{p}, \text{q}] \\ 0, \text{yang lain} & \end{cases} \tag{2.24}$$

Sehingga $\int_p^q f(x)dx = 1$.

Teorema 2.6

Distribusi Uniform$(x; p, q)$ mempunyai mean dan variansi

$$E(X) = \mu = \frac{q+p}{2}$$

$$Var(X) = \sigma^2 = \frac{(q-p)^2}{12}$$

BUKTI

$$E(X) = \mu = \int_p^q \frac{x}{q-p}\, dx$$

$$= \frac{1}{q-p} \int_p^q x\, dx$$

$$= \frac{1}{q-p} \left(\frac{x^2}{2} \Big|_p^q \right)$$

$$= \frac{1}{q-p} \left(\frac{q^2}{2} - \frac{p^2}{2} \right)$$

$$= \frac{1}{q-p}\left(\frac{q^2 - p^2}{2}\right)$$

$$= \frac{q+p}{2} *$$

sehingga

$$E(X^2) = \int_p^q x^2 \frac{1}{q-p} dx$$

$$= \frac{1}{q-p} \int_p^q x^2 dx$$

$$= \frac{1}{q-p} \frac{x^3}{3}\Big|_p^q$$

$$= \frac{1}{q-p}\left[\frac{q^3 - p^3}{3}\right]$$

$$= \frac{1}{q-p}\left[\frac{(q-p)(q^2 + qp + p^2)}{3}\right]$$

$$= \left[\frac{(q^2 + qp + p^2)}{3}\right]$$

akibatnya

$$Var(X) = \sigma^2 = E(X^2) - E(X)^2$$

$$= \frac{q^2 + qp + p^2}{3} - \left(\frac{q+p}{2}\right)^2$$

$$= \frac{q^2 + qp + p^2}{3} - \left(\frac{q^2 + 2qp + p^2}{4}\right)$$

$$= \frac{4q^2 + 4qp + 4p^2}{12} - \left(\frac{3q^2 + 6pq + 3p^2}{12}\right)$$

$$= \frac{q^2 - 2qp + p^2}{12}$$

$$= \frac{(q-p)^2}{12} *$$

Teorema 2.7 (Bolstad, 2007)

Variabel random Uniform (0,1) dapat dinyatakan sebagai Beta (1,1), dimana distribusi Uniform (0,1) merupakan fungsi densitas probabilitas yang konstan pada interval$[0, 1]$ dapat didefinisikan sebagai

$$f(x) = \begin{cases} 1 \quad \text{untuk } 0 \le x \le 1, \\ 0 \ \text{ untuk yang lainya atau } \notin [0, 1] \end{cases} \tag{2.25}$$

BUKTI

Perhatikan

$$\text{Beta}(a, b) = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}\, dx$$

$$\text{Beta}(1,1) = \int_0^1 x^0(1-x)^0 dx = \int_0^1 dx = x \Big|_0^1 = 1,$$

maka densitas Beta (1,1) adalah

$$f(x|1,1) = \frac{1}{B(1,1)}\, x^0(1-x)^0 \;\; 0 < x < 1, a > 0, b > 0$$

$$= 1 *$$

2.10 Distribusi Binomial

Definisi 2.14 (Walpole dan Myers,1995)

Suatu percobaan sering terdiri atas beberapa usaha dan tiap usaha dengan dua kemungkinan hasil yang dapat diberi nama sukses atau gagal, percobaan tersebut dinamakan percobaan Binomial jika:

1. Percobaan terdiri atas n usaha yang berulang
2. Tiap usaha memberikan hasil yang dapat ditentukan dengan sukses atau gagal
3. Peluang sukses dinyatakan dengan θ, tidak berubah dari usaha yang satu ke usaha yang berikutnya
4. Tiap usaha bebas dari usaha lainya.

Distribusi peluang peubah Binomial X disebut distribusi Binomial dan dinyatakan dengan Binomial$(x; n, \theta)$ karena nilainya tergantung pada banyaknya usaha (n) dan peluang sukses dalam usaha (θ). Bila suatu usaha Binomial dapat menghasilkan sukses dengan peluang θ dan gagal dengan peluang $(1 - \theta)$. maka distribusi peluang variabel random Binomial X yaitu banyaknya sukses dalam n usaha bebas ialah

$$Binomial(x; n, \theta) = \binom{n}{x} \theta^x 1 - \theta^x, \quad x = 0,1,2, \ldots, n. \qquad (2.26)$$

Teorema 2.8

Distribusi Binomial $(x; n, \theta)$ mempunyai mean dan variansi

$\mu = n\theta$ dan $\sigma^2 = n\theta(1 - \theta)$.

BUKTI

Misalkan hasil usaha ke j dinyatakan dengan variabel random X_j ; X_j dimisalkan mendapat nilai 0 dan 1, masing-masing dengan peluang 1 - θ dan θ. Ini disebut peubah Bernoulli dengan $X_j = 0$ menunjukan suatu kegagalan sedangkan $X_j = 1$ menunjukan suatu sukses.

Jadi banyaknya sukses dalam suatu percobaan Binomial dapat ditulis sebagai n peubah penunjuk bebas, sehingga

$$X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$$

Setiap X_j mempunyai mean $E(X_j) = 0.(1 - \theta) + 1.\theta = \theta$

$$E(X) = \mu = E(X_1) + E(X_2) + \cdots + E(X_n)$$

$$= \theta + \theta + \cdots + \theta$$

$$= n\theta *$$

Variansi setiap X_j diberikan oleh

$$\sigma_{x_j}^2 = VarX_j = E\left(X_j - \theta\right)^2$$

$$= E\left(X_j^2\right) - \theta^2$$

$$= (0)^2 (1 - \theta) + (1)^2 \theta - \theta^2$$

$$= \theta(1 - \theta)$$

maka

$$Var(X) = \sigma^2 = Var(X_1) + Var(X_2) + \cdots + Var(X_3)$$

$$= \theta(1 - \theta) + \theta(1 - \theta) + \ldots + \theta(1 - \theta)$$

$$= n\theta(1 - \theta) *$$

2.11 Keluarga Eksponensial

Definisi 2.15 (Berger, 1990)

Keluarga densitas disebut keluarga eksponensial k parameter bila densitas tersebut dapat dinyatakan dalam bentuk:

$$f(x|\theta) = h(x)c(\theta)exp\left(\sum_{i=1}^{k} w_i(\theta)t_i(x)\right) \qquad (2.27)$$

Keterangan;

h(x) ≥ 0 dan $t_i(x)$, …,$t_k(x)$ adalah nilai real fungsi dari observasi *x*(nilai yang tidak tergantung terhadap θ) dan $w_1(\theta)$…$w_k(\theta)$ adalah nilai real fungsi dari nilai vector yang mungkin dari parameter θ(tidak tergantung tehadap *x* / independen terhadap θ).

h(x) = fungsi non negatif dari *x*

$t_i(x)$ = fungsi berharga nyata dari *x*

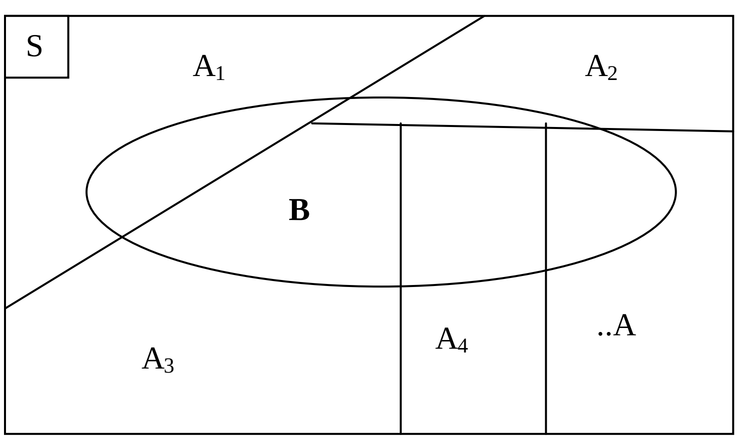
$c(\theta) =$ fungsi non negatif dari *θ*

$w_i(\theta)$ = fungsi berharga nyata dari *θ*

2.12 Teorema Bayes

Definisi 2.16 (Soejoeti dan Soebanar, 1988)

Misal S adalah ruang sampel dari suatu eksperimen dan $A_1, A_2, \dots, A_k$ adalah peristiwa-peristiwa didalam S sedemikian sehingga $A_1, A_2, \dots, A_k$ saling asing dan $\bigcup_{i=1}^{k} A_k = S$ dikatakan bahwa $A_1, A_2, \dots, A_k$ membentuk partisi di dalam S



Gambar 2.1. Teorema Bayes

Jika k peristiwa $A_1, A_2, \dots, A_k$ membentuk partisi di dalam S, maka terlihat pada gambar 2.1 bahwa peristiwa-peristiwa $A_1 \cap B, A_2 \cap B, \dots, A_k \cap B$ membentuk partisi dalam B sehingga dapat ditulis $B = (A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B), \dots, \cup (A_k \cap B)$. Karena peristiwa-peristiwa di ruas kanan saling asing maka

$$P(B) = \sum_{i=1}^{k} P(A_i \bigcap B) \tag{2.28}$$

Jika $P(A_i) > 0)$ untuk $i = 1,2, \dots, k$ maka $P(A_i \cap B) = P(A_i)P(B|A_i)$ sehingga didapat $P(B) = \sum_{i=1}^{k} P(A_i)P(B|A_i)$. Misal peristiwa-peristiwa $A_1, A_2, \dots, A_k$ membentuk partisi di dalam ruang sampel S sedemikan sehingga $(A_i) > 0$;$i = 1,2, \dots, k$ dan misalkan B sembarang peristiwa sedemikian hingga $P(B) > 0$ maka untuk $i = 1,2, \dots, k$

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i)P(B|A_i)}{\sum_{i=1}^{k} P(A_i)P(B|A_i)} \tag{2.29}$$

Teorema Bayes memberikan aturan sederhana untuk menghitung probabilitas bersyarat peristiwa A_i jika B terjadi, jika masing-masing probabilitas tak bersyarat A_i dan probabilitas bersyarat B jika diberikan A_i.

2.13 Distribusi Prior

Dalam inferensi Bayes untuk kasus Binomial, parameter θ diperlakukakn sebagai variabel, maka akan memepunyai nilai dalam sebuah domain dengan densitas $f(\theta)$, dan densitas inilah yang akan dinamakan sebagai distribusi prior dari θ, dengan adanya informasi prior ini maka akan kombinasikan dengan data sampel yang digunakan dalam membentuk posterior.

Prior merupakan bentuk distribusi *frequency* yang merupakan representasi objektif pada suatu parameter yang lebih rasional untuk dipercayai, atau prior merupakan suatu representasi subjektifitas seseorang dalam memandang sebuah sebuah parameter menurut penilaiannya sendiri. Sehinggga permasalahan pokok agar prior dapat interpretatif adalah bagaimana memilih distribusi prior untuk suatu parameter yang tidak diketahui namun sesuai dengan permasalahan yang ada.

Permasalahan utama dalam metode Bayes adalah bagaimana memilih distribusi prior $f(\theta)$, dimana prior menunjukan ketidakpastian tentang parameter θ yang tidak diketahui. Distribusi prior dikelompokan menjadi dua kelompok berdasarkan bentuk fungsi likelihoodnya (Box dan Tiao, 1973):

1. Berkaitan dengan bentuk distribusi hasil identifikasi pola datanya
   a) Distribusi prior konjugat (*conjugate*), mengacu pada acuan analisis model terutama dalam pembentukan fungsi likelihoodnya sehingga dalam penentuan prior konjugat selalu dipikirkan mengenai penentuan pola distribusi prior yang mempunyai bentuk konjugat dengan fungsi densitas peluang pembangun likelihoodnya.
   b) Distribusi prior tidak konjugat (*non-conjugate*), apabila pemberian prior pada suatu model tidak mengindahkan pola pembentuk fungsi likelihoodnya.
2. Berkaitan dengan penentuan masing-masing parameter pada pola distribusi prior tersebut.
   a) Distribusi prior informatif mengacu pada pemberian parameter dari distribusi prior yang telah dipilih baik distribusi prior konjugat atau tidak, pemberian nilai parameter pada distribusi prior ini akan sangat mempengaruhi bentuk distribusi posterior yang akan didapatkan pada informasi data yang diperoleh.
   b) Distribusi prior non-informatif, pemilihannya tidak didasarkan pada data yang ada atau distribusi prior yang tidak mengandung informasi tentang parameter θ, salah satu pendekatan dari non-informatif prior adalah metode Jeffrey's.

2.14 Fungsi Likelihood

Definisi 2.17 (Bain dan Engelhardt, 1992)

Fungsi likelihood adalah fungsi densitas bersama dari n variabel random $X_1, X_2, \ldots, X_n$ dan dinyatakan dalam bentuk $f(x_1, x_2, \ldots, x_n;\ \theta)$. Jika $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ditetapkan, maka fungsi likelihood adalah fungsi dari parameter θ dan dinotasikan dengan $L(\theta)$. Jika $X_1, X_2, \ldots, X_n$ menyatakan suatu sampel random dari $f(x;\theta)$, maka

$$L(\theta) = f(x_1;\ \theta) f(x_2;\theta) \ldots f(x_n;\theta)$$

$$= \prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta) \qquad (2.30)$$

2.15 Distribusi Posterior

Definisi 2.18 (Soejoeti dan Soebanar, 1988)

Distribusi posterior adalah fungsi densitas bersyarat θ jika diketahui nilai observas x. Ini dapat dituliskan sebagai:

$$f(\theta|x) = \frac{f(\theta, x)}{f(x)} \qquad (2.31)$$

apabila θ kontinu, distribusi prior dan posterior θ dapat disajikan dengan fungsi densitas. Fungsi densitas bersyarat satu variabel random jika diketahui nilai variabel random kedua hanyalah fungsi kepadatan bersama dua variabel random itu dibagi dengan fungsi densitas marginal variabel random kedua. Tetapi fungsi densitas bersama $f(\theta, x)$ dan fungsi densitas marginal

$f(x)$ pada umumya tidak diketahui, hanya distribusi prior dan fungsi likelihood yang biasanya dinyatakan.

Fungsi densitas bersama yang diperlukan dapat ditulis dalam bentuk distribusi prior dan fungsi likelihood sebagai berikut,

$$f(\theta, x) = f(x|\theta)\, f(\theta) \tag{2.32}$$

dimana $f(x|\theta)$ merupakan fungsi likelihood dan $f(\theta)$ merupakan fungsi densitas distribusi prior. Selanjutnya fungsi densitas marginal dapat dinyatakan sebagai

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\theta, x) d\theta = \int_{-\infty}^{\infty} f(\theta) f(x|\theta)\, d\theta \tag{2.33}$$

Sehingga dari persamaan (2.31), (2.32) dan (2.33), fungsi densitas posterior untuk variabel random kontinu dapat ditulis sebagai

$$f(\theta|x) = \frac{f(\theta) f(x|\theta)}{\int_{-\infty}^{\infty} f(\theta) f(x|\theta)\, d\theta} \tag{2.34}$$

Distribusi posterior dapat digunakan untuk menentukan estimator dan estimasi interval dari parameter yang tidak diketahui.

2.16 Metode Evaluasi Estimator

Estimator yang telah diperoleh dengan metode pendekatan Bayes dan pendekatan klasik akan menghasilkan estimator yang berbeda. Estimator terbaik yang memenuhi sifat tertentu, diantaranya sifat tak bias dan *Mean Square Error* (MSE).

- **Sifat Tak Bias (Unbiased)**

Definisi 2.19

Sifat tak bias ini merupakan sifat baik dari estimator yang diperoleh melalui pendekatan klasik, dalam pembahasan pemilihan estimator terbaik salah satunya harus memenuhi sifat tak bias ini. Jika W merupakan estimator titik untuk parameter θ, maka W disebut estimator tak bias untuk parameter θ jika $E(W) = \theta$ (Widiharih dan Suparti, 2003). Sifat bias dari estimator titik W dari θ adalah perbedaan (selisih) antara nilai ekspektasi W dan θ (Berger, 1990), sehingga dapat ditulis sebagai

$$\text{Bias}(W) = E(W) - \theta$$

- ***Mean Square Eror* (MSE)**

Teorema 2.9 (Berger, 1990)

Jika W merupakan sebuah estimator untuk θ, maka *Mean Square Eror* (MSE) dari estimator W merupakan fungsi $E(W - \theta)^2$, MSE mengukur rataan kuadrat dari selisih estimator W dengan parameter θ yang didefinisikan sebagai.

$$E(W - \theta)^2 = Var\, W + E(W - \theta)^2$$

$$= Var(W) + (bias(W))^2 \qquad (2.35)$$

BUKTI PERSAMAAN (2.35)

$$\text{MSE}(W) = E(W - \theta)^2$$

$$= E(W - E(W) + E(W) - \theta)^2$$

$$= E(W - E(W))^2 + E(E(W) - \theta)^2 + 2E(W - E(W)(E(W) - \theta)$$

$$= E(W - E(W))^2 + E(E(W) - \theta)^2 + 0$$

$$= Var(W) + (bias\ (W))^2 *$$

Sehingga berdasarkan persamaan (2.33), MSE (W) untuk estimator tak bias akan sama dengan nilai variansinya dari estimator W, karena nilai $(\text{bias}(W))^2$ pada estimator takbias akan sama dengan nilai nol. Secara umum MSE mempunyai dua komponen, yaitu variansi yang mengukur variabilitas estimator (*precision*) dan bias yang mengukur keakuratan (*accuracy*) dari estimator.

2.17 Interval Konfidensi

Definisi 2.20 (Bain dan Engelhardt, 1992)

Misalkan $X_1, \ldots, X_n$ mempunyai fungsi densitas $f(x_1,\ldots,x_n;\theta)$, $\theta \in \Omega$ dimana Ω merupakan interval. Anggap $L=L(X_1, \ldots, X_n)$ dan $U=U(X_1, \ldots, X_n)$ merupakan statistik-statistik. Jika sebuah eksperimen menghasilkan data $x_1, x_2, \ldots, x_n$, maka nilai-nilai $l(x_1, \ldots, x_n)$ dan $u(x_1, \ldots, x_n)$ dapat dihitung.

Definisi 2.21 (Bain dan Engelhardt, 1992)

Interval $(l(x_1, \ldots, x_n), u(x_1, \ldots, x_n))$ dinamakan interval konfidensi 100γ% untuk θ jika $P[L(X_1, \ldots, X_n) < \theta < U(X_1, \ldots, X_n)] = \gamma$ dengan $\gamma = 1 - \alpha$ dimana $0 < \gamma < 1$. Nilai-nilai $l(x_1, \ldots, x_n)$ dan $u(x_1, \ldots, x_n)$ masing-masing dinamakan limit konfidensi bawah dan atas.

Definisi 2.22 (Bain dan Engelhardt, 1992)

1. Jika $P[l(X_1, \ldots, X_n) < \theta] = \gamma$

   maka $l(x_1, \ldots, x_n)$ dinamakan limit konfidensi 100γ% bawah satu sisi untuk θ

2. Jika $P[\theta < u(X_1, \ldots, X_n)] = \gamma$

   maka $u(x_1, \ldots, x_n)$ dinamakan limit konfidensi 100γ% atas satu sisi untuk θ.

2.18 Uji Hipotesis

Definisi 2.23 (Walpole dan Myers, 1995)

Hipotesis statistik adalah suatu anggapan atau pernyataan yang mungkin benar atau tidak, mengenai satu populasi atau lebih. Dalam melakukan pengujian hipotesis, ada dua macam kesalahan yang terjadi yaitu:

1. Kesalahan Tipe I yaitu karena menolak H_0 padahal seharusnya diterima.
2. Kesalahan Tipe II yaitu karena menerima H_0 padahal seharusnya ditolak.

2.19 Maksimum Likelihood Estimator (MLE)

Definisi 2.24 (Bain dan Engelhardt, 1992)

Misalkan $X_1, X_2, \dots, X_n$ adalah sampel random dari populasi dengan densitas $f(x_i;\theta)$, fungsi likelihood didefinisikan dengan:

$$L(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_2) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i\,;\theta) \qquad (2.36)$$

Bila fungsi likelihood ini terdiferensikan dalam θ maka calon estimator likelihood yang mungkin adalah $\hat{\theta}$ sedemikian sehingga:

$$\frac{\partial L(\hat{\theta})}{\partial \hat{\theta}} = 0$$

Untuk membuktikan bahwa $\hat{\theta}$ benar-benar memaksimumkan fungsi likelihood $L(\hat{\theta})$ harus ditunjukan bahwa:

$$\frac{\partial^2 L(\hat{\theta})}{\partial \hat{\theta}^2} < 0$$

Dalam banyak kasus dimana diferensi digunakan, akan lebih mudah bekerja pada logaritma dari $L(\hat{\theta})$ yaitu $= \log L(\hat{\theta})$. Hal ini dimungkinkan karena fungsi logaritma naik tegas pada $(0, \infty)$ yang berarti bahwa $L(\hat{\theta})$ mempunyai ekstrem yang sama.

Sehingga untuk menentukan estimator maksimum likelihood dari $\hat{\theta}$ sebagai berikut:

1. Tentukan fungsi likelihood

$$L(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i; \theta)$$

2. Bentuk log likelihood $l = \log L(\hat{\theta})$
3. Tentukan turunan dari $l = \log L(\hat{\theta})$ terhadap $\hat{\theta}$

$$\frac{\partial \log\left[L(\hat{\theta})\right]}{\partial \hat{\theta}} = 0$$

   Penyelesaian dari persamaan poin 3 merupakan estimator maksimum likelihood untuk θ.

4. Tentukan turunan kedua dari dari $l = \log L\left(\hat{\theta}\right)$ terhadap $\hat{\theta}$. Jika $\frac{\partial^2 L(\hat{\theta})}{\partial \hat{\theta}^2} < 0$, maka akan membuktikan bahwa $\hat{\theta}$ benar-benar memaksimumkan fungsi likelihood $L(\hat{\theta})$.

BAB III

PERBANDINGAN INFERENSI BAYES DAN INFERENSI KLASIK UNTUK PROPORSI BINOMIAL

Dalam bab ini dibahas bagaimana menentukan inferensi statistik berupa estimasi titik, estimasi interval dan uji hipotesis dari distribusi Binomial dengan metode Bayes menggunakan prior konjugat serta membandingkan inferensi dengan metode maksimum likelihood untuk distribusi Binomial untuk parameter proporsi yang tidak diketahui.

3.1 Likelihood dari Distribusi Binomial

Jika diketahui $X_1, X_2, \dots, X_n$ sampel random dari distribusi Binomial, dengan $X_i \sim$ Binomial (1,θ) dimana $\theta \in \Omega = (0,1)$, maka fungsi probabilitasnya adalah

$$f(x_i;\theta) = \binom{1}{x_i} \theta^{x_i}(1-\ \theta)^{n-x_i}$$

dengan $x_i = 0,1,2,\dots,n,$ sehingga fungsi likelihoodnya adalah

$$\begin{aligned} L(\theta|x_1, x_2, \dots, x_n) &= \prod_{i=1}^{n} \mathrm{f}(x_i;\theta) \\ &= \prod_{i=1}^{n} \binom{1}{x_i}\ \theta^{x_i}(1-\ \theta)^{n-x_i} \\ &= \ \theta^{\sum_{i=1}^{n} x_i}(1-\ \theta)^{n-\sum_{i=1}^{n} x_i} \qquad (3.1) \end{aligned}$$

Dimana $\sum_{i=1}^{n} x_i\ \sim$ Binomial (n,θ) (Freund, 1992).

Dalam kasus Binomial terlihat hubungan antara parameter θ dengan parameter x, tapi harus diperhatikan bahwa x merupakan jumlah dari kejadian sukses yang dihasilkan dari observasi dan θ merupakan sebuah nilai kemungkinan (probabilitas) yang akan diberikan oleh observasi. Jika $X_1, X_2, \dots, X_n$ sampel random berdistribusi Binomial(1,θ) dengan $x = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim$ Binomial (n,θ), maka dengan persamaan (3.1), fungsi likelihood dari distribusi Binomial dapat dinyatakan sebagai

$$= \binom{n}{x} \theta^x (1 - \theta)^{n-x} \qquad untuk\ 0 \leq \theta \leq 1. \tag{3.2}$$

Terlihat bahwa ada kesamaan hubungan distribusi sampel (observasi) x yang diberikan oleh parameter θ, tetapi subjek fungsi yang berubah menjadi parameter (Bolstad,2007)

3.2 Distribusi Binomial sebagai Densitas yang Berasal dari Keluarga Eksponensial

Jika $X_1, X_2, \dots, X_n$ adalah sampel random Binomial *(1,θ)*, maka $x = \sum X_i \sim$ Binomial(n, θ). Berdasarkan definisi 2.15 bahwa keluarga densitas disebut keluarga eksponensial k parameter bila densitas tersebut dapat dinyatakan dalam bentuk:

$$f(x|\theta) = h(x)c(\theta)exp\left(\sum_{i=1}^{k} w_i(\theta)t_i(x)\right)$$

Jika $x = \sum X_i \sim$ Binomial(n, θ), maka densitas adalah:

$$f(x|\theta) = \binom{n}{x} \theta^x (1 - \theta)^{n-x}$$

$$= \binom{n}{x} (1 - \theta)^n \left(\frac{\theta}{1 - \theta}\right)^x$$

$$= \binom{n}{x} (1 - \theta)^n \exp\left(x\, log \left(\frac{\theta}{1 - \theta}\right)\right.$$

dengan mengambil:

$$h(x) = \begin{cases} \binom{n}{x} & x = 0, \dots, n \\ 0 & lainya \end{cases}$$

$$c(\theta) = \begin{cases} (1-\theta)^n, & 0 < \theta < 1 \\ 0, & lainya \end{cases}$$

$$w(\theta) = \begin{cases} log\left(\frac{\theta}{1-\theta}\right) & 0 < \theta < 1 \\ 0 & yang\ lainya \end{cases}$$

$$t_i(x) = x,$$

maka berdasarkan definisi 2.15 terbukti bahwa distribusi Binomial merupakan keluarga dari eksponensial**.**

3.3 Distribusi Beta sebagai Densitas yang Berasal dari Keluarga Eksponensial

Jika $X \sim$ Beta(a,b), maka X disebut keluarga eksponensial k parameter bila densitas tersebut dapat dinyatakan dalam bentuk persamaan (2.25), sehingga

$$f(x|a,b) = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} x^{a-1}(1-x)^{b-1}$$

$$= \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} exp\left(logx^{(a-1)}\right) exp\ (log(1-x)^{b-1})$$

$$= \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}\ exp((a-1\ )(logx)) + (b-1)\log(1-x))$$

dengan mengambil;

$$h(x) = 1$$

$$c(a,b) = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}$$

$$w_1(a,b) = a-1$$

$$w_2(a,b) = b-1$$

$t_1(x) \quad = \log x$

$t_2(x) \quad = \log(1-x)$

dapat membuktikan bahwa distribusi Beta juga barasal dari keluarga eksponensial, oleh karena itu dapat dikatakan bahwa densitas Beta memiliki kesamaan bentuk fungsional dengan likelihood dari distribusi Binomial, sehingga densitas Beta dapat digunakan sebagai prior konjugat untuk Binomial.

3.4 Distribusi Beta Sebagai Prior

Dalam teori probabilitas dan statistik, distribusi Beta adalah distribusi probabilitas kontinu dalam interval (0,1) dengan dua parameter yang positif dan biasanya dinotasikan a dan b. Dalam hal ini distribusi Beta digunakan untuk menjelaskan distribusi dari sebuah nilai probabilitas yang tidak diketahui sebagai distribusi prior pada sebuah parameter probabilitas sukses dalam distribusi Binomial (Bolstad,2007). Dalam hal ini dianggap bahwa probabilitas sukses θ dapat menjalani setiap nilai real antara 0 dan 1, sehingga distribusi prior tidak diskrit melainkan kontinu. Karena dalam banyak hal distribusi prior untuk Binomial anggapan diskrit tidak realistis (Soejoeti dan Soebanar,1988).

Dalam statistik Bayes distribusi Beta dapat dilihat sebagai probabilitas parameter proporsi θ pada distribusi Binomial setelah observasi $a-1$ sukses (dengan probabilitas θ sebagai probabilitas sukses) dan $b-1$ gagal (dengan probabilitas 1 – θ gagal) (Bolstad, 2007). Beta(a, b) sebagai prior memiliki densitas:

$$f(\theta : a, b) = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \theta^{a-1}(1-\theta)^{b-1} \; untuk \; 0 \; \leq \; \theta \; \leq 1 \qquad (3.3)$$

Dalam distribusi Beta, kuantitas yang tidak diketahui adalah θ dimana merupakan probabilitas sukses dalam distribusi Binomial, sehingga yang membatasi nilai probabilitas ini haruslah dari 0 sampai dengan 1. Maka cukup beralasan untuk menganggap bahwa θ dapat menjalani banyak tak berhingga nilai-nilai real dari 0 sampai dengan 1 dan menggunakan distribusi kontinu (seperti distribusi Beta) sebagai distribusi prior (Soejoeti dan Soebanar,1988).

3.5 Prosedur Memilih Prior

Teorema Bayes memberikan metode untuk memilih keyakinan terhadap suatu parameter dari sebuah distribusi jika data diperoleh. Karena dalam kasus ini ditetapkan bahwa Beta (a,b) sebagai prior, maka untuk menggunakan teorema ini, harus dipunyai Beta (a,b) yang merepresentasikan keyakinan terhadap parameter tersebut, sehingga ada beberapa pertimbangan dalam menentukan parameter a dan b pada Beta (Bolstad, 2007).

Pada lampiran 1, terlihat beberapa bentuk grafik densitas Beta (a, b) dengan parameter a = 0.5,1,2,3 dan b = 0.5,1,2,3 yang menggambarkan variasi bentuk dari distribusi Beta (a, b). Beta (a, b) akan digunakan sebagai prior dalam membuat inferensi Bayes terhadap parameter Binomial**.** Sehingga permasalahan disini adalah bagaimana menentukan parameter a dan b untuk Beta yang tepat untuk digunakan sebagai prior dari beberapa parameter Beta yang mungkin (Bolstad, 2007).

Ada beberapa Hal Yang Diperhatikan dalam menentukan parameter Beta (a,b), yaitu;

1. *Gambarkan prior Beta(a, b) yang dipilih.* Jika grafik cukup beralasan terhadap keyakinan prior yang dipilih maka gunakan Beta tersebut sebagai prior. Oleh karena itu dapat dilakukan dengan mengatur dan merubah mean prior dan standard deviasi prior sehingga ditemukan grafik prior yang berkorespondensi terhadap keyakinan secara aproksimasi. Namun selama prior memiliki probabilitas yang cukup beralasan terhadap keyakinan maka prior tersebut dapat digunakan.

2. *Menghitung persamaan ukuran sampel dari prior(* n_{eq}*)*. Diketahui bahwa proporsi Binomial $\theta = \frac{x}{n}$, maka diperoleh mean proporsi Binomial adalah

$$E(\theta) = E\left(\frac{x}{n}\right)$$

$$= \frac{1}{n}E(x)$$

$$= \frac{1}{\theta}n\theta$$

$$= \theta$$

dan variansi proporsi Binomial adalah

$$Var(\theta) = Var\left(\frac{x}{n}\right)$$

$$= \frac{1}{n^2}Var(x)$$

$$= \frac{1}{n^2}n\theta(1-\theta)$$

$$= \frac{\theta(1- \theta)}{n}.$$

Karena Beta(a,b) merupakan prior dengan mean prior adalah $\frac{a}{a+ b}$ dan variansi prior adalah $\frac{ab}{(a+ b)^2(a+ b+1)}$, maka dengan menyamakan variansi proporsi Binomial dengan variansi prior diperoleh

$$\frac{\theta(1- \theta)}{n_{eq}} = \frac{ab}{(a+ b)^2(a+ b+1)}.$$

Dengan menyamakan mean prior dan mean proporsi maka diperoleh $\theta = \frac{a}{a+ b}$ dan $1- \theta = \frac{b}{a+ b}$, sehingga persamaaan ukuran sampel n_{eq} diperoleh

$$\frac{\theta(1- \theta)}{n_{eq}} = \frac{\theta(a+ b)(1- \theta)(a+ b)}{(a+ b+1)(a+b)^2}$$

$$\frac{\theta(1-\ \theta)}{n_{eq}} = \frac{\theta(1-\ \theta)}{a+\ b+1}$$
$$n_{eq} = \ a+\ b+1.$$

Ini berarti bahwa banyaknya informasi terhadap parameter θ dari prior yang dipilih mendekati banyaknya sampel random. Sehingga harus diketahui apakah informasi prior terhadap θ benar-benar sama terhadap informasi θ, salah satu caranya dengan memeriksa ukuran sampel random n_{eq}.

Jika data yang dimilki cukup, maka efek terhadap prior yang terpilih akan lebih kecil dibandingkan dengan data. Dengan kata lain bahwa distribusi posterior yang diperoleh akan memperoleh hasil yang mirip walaupun dengan menggunakan prior yang berbeda (Bolstad,2007).

Ada 2 metode dalam memilih parameter prior Beta (a,b) adalah

1. Memilih Prior Konjugat ketika Informasi Prior Samar-Samar

Salah satu cara untuk memilih parameter prior Beta (a, b) yang digunakan adalah berdasarkan gambar grafik densitas prior Beta yang cocok seperti pada lampiran 1. Contohnya, jika diketahui bahwa anggapan awal(prior) dari peneliti bahwa parameter proporsi adalah θ ≤ 50%, maka Beta (0.5,1), Beta(0.5,2), Beta(0.5,3), Beta(1,2), atau Beta(1,3) dimana $a, b \ni \frac{a}{a+b} \leq 50\%$ akan menjadi prior yang bagus untuk mengestimasi parameter θ atau sebaliknya jika peneliti percaya bahwa parameter proporsi adalah θ >50%, maka Beta (1,0.5), Beta(2,0.5), Beta(3, 0.5), Beta(2,1), atau Beta(3,1) dimana $a, b \ni \frac{a}{a+b} > 50\%$ akan menjadi prior yang bagus untuk mengestimasi parameter θ, Namun pada dasarnya semua prior konjugat tersebut tidak akan menjadi sebuah masalah yang berarti terhadap prior mana yang akan dipilih, karena biasanya hasil posterior akan memberikan hasil yang mirip atau mendekati (Bolstad, 2007).

2. Memilih Prior Konjugat dengan Mencocokan Mean Dan Variansi

Distribusi Beta(a, b) adalah prior konjugat untuk distribusi Binomial *(n,θ)*, dimana distribusi Beta (a, b) memiliki beberapa bentuk berdasarkan parameter a dan b yang dipilih, sehingga parameter prior yang dipilih seharusnya mereprensentasikan dengan penilaian subjektif peneliti itu sendiri. Salah satu metodenya adalah dengan memilih Beta *(a,b)* yang cocok dengan keyakinan prior berdasarkan mean dan standard deviasi.

Jika $\theta = \frac{x}{n}$ merupakan proporsi Binomial, maka mean dari proporsi Binomial adalah $E(\theta) = E\left(\frac{x}{n}\right) = \theta$, dan mean Beta(a,b) adalah $\frac{a}{a+b}$. Dengan menyamakan persamaan mean Beta(a,b) sebagai mean proporsi Binomial diperoleh

$$\theta = \frac{a}{a+b} \tag{3.4}$$

sehingga

$$\begin{aligned} 1 - \theta &= 1 - \frac{a}{a+b} \\ &= \frac{a+b}{a+b} - \frac{a}{a+b} \\ &= \frac{b}{a+b}. \end{aligned}$$

Diketahui standard deviasi distribusi Beta(a,b) adalah $\sqrt{\frac{ab}{(a+b+1)(a+b)^{2,}}}$, dimana dengan persamaan (3.4) dapat diperoleh persamaan $a = \theta(a+b)$ dan $b = (1-\theta)(a+b)$, Jika $\sigma = \sqrt{\frac{\theta(1-\theta)}{n}}$ merupakan standar deviasi dari proporsi Binomial, dengan menyamakan standar deviasi Beta(a,b) sebagai standar deviasi dari proporsi Binomial. maka σ juga dapat dinyatakan sebagai

$$\sigma = \sqrt{\frac{\theta(a+ b)(1- \theta)(a+ b)}{(a+ b+1)(a+b)^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{\theta(1- \theta)}{a+ b+1}}$$

Sehingga variansi dari proporsi Binomial juga bisa dinyakan sebagai

$$\sigma^2 = \frac{\theta(1- \theta)}{a+ b+1}. \qquad (3.5)$$

Dengan persamaan (3.4) diperoleh

$$\theta(a+ b) = a$$

$$\theta a+ \theta b - a = 0$$

$$(\theta - 1)a + \theta b = 0 \qquad (3.6)$$

Karena diketahui bahwa θ merupakan proporsi Binomial dimana $\theta = \frac{x}{n}$, maka persamaan (3.6) menjadi

$$\left(\frac{x}{n} - 1\right)a + \frac{x}{n}b = 0$$

$$\left(\frac{x-n}{n}\right)a + \frac{x}{n}b = 0$$

$$(x-n)a + xb = 0 \qquad (3.7)$$

dan dengan persamaan (3.5) diperoleh

$$(a+ b+1)\sigma^2 = \theta(1- \theta)$$

$$\sigma^2 a + \sigma^2 b + \sigma^2 = \theta(1- \theta). \qquad (3.8)$$

Karena variansi proporsi Binomial adalah $\sigma^2 = \frac{\theta(1- \theta)}{n}$, maka persamaan (3.8) adalah

$$\frac{\theta(1- \theta)}{n}a + \frac{\theta(1- \theta)}{n}b + \frac{\theta(1- \theta)}{n} = \theta(1- \theta) \qquad (3.9)$$

Jika ruas kanan dan ruas kiri pada persamaan (3.9) dikalikan dengan $\frac{1}{\theta(1- \theta)}$, maka

$$\frac{1}{n}a + \frac{1}{n}b + \frac{1}{n} = 1$$

$$a + b = n - 1 \tag{3.10}$$

sehingga jika diketahui x dan n, maka dengan metode eliminasi persamaan (3.7) dan persamaan (3.10) dapat diselesaikan berdasarkan a dan b, maka

$$(x-n)a + xb = 0 \qquad (3.11a)$$

$$a + b = n - 1 \qquad (3.11.b).$$

Persamaan (3.11.b) dikalikan dengan x, maka

$$(x-n)a + xb = 0 \qquad (3.11.c)$$

$$xa + xb = x(n-1) \qquad (3.11.d)$$

Persamaan (3.11c) dikurangi dengan (3.11.d), maka a diperoleh

$$\big((x-n) - x\big)a = -\big(x(n-1)\big)$$

$$a = \frac{-\big(x(n-1)\big)}{-n}$$

$$a = \frac{x(n-1)}{n}. \tag{3.12}$$

Dengan mensubsitusikan persamaan (3.12) ke persamaan (3.11.b), maka dapat diperoleh persamaan b sebagai berikut

$$\frac{x(n-1)}{n} + b = n - 1$$

$$b = (n-1) - \left(\frac{x(n-1)}{n}\right)$$

$$b = \frac{n(n-1) - x(n-1)}{n}$$

$$b = \frac{(n-x)(n-1)}{n} \tag{3.13}$$

sehingga dengan persamaan (3.12) dan persamaan (3.13) diperoleh parameter Beta(a, b) yang akan digunakan sebagai prior (Bolstad, 2007).

3.6 Distribusi Posterior dari Distribusi Binomial

Dalam teorema Bayes setelah data diambil dan prior telah ditentukan maka distribusi posteriornya dicari dengan mengalikan priornya dengan likelihoodnya dalam hal ini prior independent terhadap likelihoodnya, sehingga data yang diobservasi harus independen terhadap prior yang telah ditetapkan (Bolstad, 2007).

$$f(\theta|x) \propto f(\theta).f(x|\theta) \tag{3.14}$$

Jika $f(\theta|x)$ merupakan distribusi posterior dari distribusi Binomial dengan prior konjugat (Beta dan Uniform), maka distribusi posterior marginal untuk Proporsi Binomial θ adalah (Bolstad, 2007)

$$f(\theta|x) = \int_0^1 f(\theta)f(x|\theta)d\theta \tag{3.15}$$

Untuk mendapatkan distribusi posterior, maka persamaan (3.14) dibagi dengan beberapa k (konstanta) untuk membuat posterior menjadi distribusi probabilitas, artinya persamaan (3.14) harus dibagi dengan persamaan (3.15) , sehingga distribusi posterior dapat dirumuskan sebagai berikut

$$f(\theta|x) = \frac{f(\theta).f(x|\theta)}{\int_0^1 f(\theta).f(x|\theta)\, d\theta} \tag{3.16}$$

sehingga fungsi integrasi menjadi dependen terhadap prior $f(\theta)$ yang dipilih. Ini adalah teorema Bayes untuk variabel random kontinu (Bolstad, 2007).

Fungsi kepadatan $f(\theta|x)$ dan $f(\theta)$ masing-masing menunjukkan distribusi posterior dan distribusi prior , sedangkan $f(\theta|x)$ menunjukkan fungsi likelihood. Istilah-istilah ini mempunyai intrepetasi yang sama untuk variabel random kontinu seperti halnya variabel random diskrit. Distribusi prior dan posterior harus benar-benar merupakan fungsi densitas, yakni posterior harus bernilai tidak negatif dan jumlah luasan dibawah kurva yang ditentukan dengan pengintegralan fungsi kepadatan itu meliputi seluruh domainya serta harus sama dengan satu. Sehingga persamaan (3.15) membuat distribusi posterior benar-benar merupakan distribusi probabilitas, dengan fungsi likelihood adalah fungsi θ dengan x diketahui (sama dengan nilai observasi x) (Soejoeti dan Soebanar,1988).

Harus diperhatikan bahwa pada persamaan (3.15) dianggap bahwa θ adalah variael random kontinu. Jika variabel random yang menjadi perhatian adalah distribusi Binomial dan informasi sampel terdiri dari banyaknya “ sukses” dalam n percobaan tertentu maka model probabilitas tersebut adalah diskrit, sedangkan distribusi prior θ dapat berupa diskrit atau kontinu. Istilah “teorema Bayes untuk model probabilitas diskrit” dan “teorema Bayes untuk model probabilitas kontinu” menunjukan kepada bentuk distribusi prior dan posterior (yakni menunjukan apakah variabel random θ dianggap diskrit atau kontinu) (Soejoeti dan Soebanar, 1988).

- ***Posterior Mean Square*** **(PMS)**

Rataan kuadrat posterior dari estimator $\hat{\theta}$ untuk proporsi θ adalah

$$\text{PMS}(\hat{\theta}) = \int_0^1 (\theta - \hat{\theta})^2 \, f(\theta|x) d\theta \qquad (3.17)$$

Persamaan (3.17) menyatakan rataan kuadrat jarak estimasi dari nilai sebenarnya, Dengan menambahkan dan mensubsitusikan mean posterior m', maka diperoleh

$$\text{PMS}(\hat{\theta}) = \int_0^1 \left(\theta - m' + m' - \hat{\theta}\right)^2 f\,(\theta|x)d\theta$$

$$= \int_0^1 \left[(\theta - m')^2 + 2(\theta - m')\left(m' - \hat{\theta}\,\right) + \left(m' - \hat{\theta}\right)^2\right] f(\theta|x)d\theta$$

$$= \int_0^1 (\theta - m')^2\, f(\theta|x)d\theta$$

$$+ \int_0^1 2(\theta - m')\left(m' - \hat{\theta}\,\right)f(\theta|x) + \int_0^1 \left(m' - \hat{\theta}\right)^2 f(\theta|x)d\theta$$

Sehingga ada 3 buah integral yaitu $\int_0^1(\theta - m')^2\, f(\theta|x)d\theta$,$\int_0^1 2\,(\theta - m')\left(m' - \hat{\theta}\,\right)f(\theta|x)d\theta$ dan $\int_0^1\left(m' - \hat{\theta}\right)^2\; f(\theta|x)d\theta$. Berikut adalah penyelesaian ketiga integral tersebut

- Integrasi pertama

$$\int_0^1 (\theta - m')^2\, f(\theta|x)d\theta = Var(\theta|x)$$

- Integrasi kedua

$$\int_0^1 2(\theta - m')\left(m' - \hat{\theta}\,\right)f(\theta|x)d\theta = 2\int_0^1 (\theta m' - \theta\hat{\theta} - (m')^2 + m'\hat{\theta})f(\theta|x)d\theta$$

$$= \int_0^1 \theta m'\; f(\theta|x)d\theta - \int_0^1 \theta\hat{\theta}\, f(\theta|x)d\theta - \int_0^1 (m')^2\, f(\theta|x)d\theta$$

$$+\int_0^1 m'\hat{\theta}\, f(\theta|x)d\theta$$

$$= m' \int_0^1 \theta f\,(\theta|x)d\theta - \hat{\theta} \int_0^1 \theta\ f(\theta|x)d\theta$$

$$-(m')^2 \int_0^1 f(\theta|x)d\theta + m'\hat{\theta} \int_0^1 f(\theta|x)d\theta$$

Karena $\int_0^1 \theta\ f(\theta|x)d\theta = m'$ dan $\int_0^1 f(\theta|x)d\theta = 1$, maka

$$= m'm' - \hat{\theta}\, m' - (m')^2 + m'\hat{\theta}$$

$$= 0$$

- Integrasi ketiga

$$\int_0^1 \left(m' - \hat{\theta}\right)^2 f(\theta|x)d\theta = \left(m' - \hat{\theta}\right)^2 \int_0^1 f(\theta|x)d\theta$$

Karena $\int_0^1 f(\theta|x)d\theta = 1$, maka

$$\int_0^1 \left(m' - \hat{\theta}\right)^2 f(\theta|x)d\theta = \left(m' - \hat{\theta}\right)^2$$

Sehingga

$$\text{PMS}\left(\hat{\theta}\right) = Var(\theta|x) + 0 + \left(m' - \hat{\theta}\right)^2 \tag{3.18}$$

Dimana $\left(m' - \hat{\theta}\right)^2$ pada persamaan (3.18) merupakan sebuah kuadrat yang selalu mendekati 0. Terlihat bahwa pada kuadrat jarak nilai sebenarnya dengan mean posterior m' adalah lebih kecil daripada untuk setiap nilai estimasi untuk $\hat{\theta}$ yang mungkin jika diketahui prior dan data observasi, sehingga mean posterior adalah estimator optimum. Ini adalah alasan yang baik untuk menggunakan mean posterior sebagai estimator Bayes untuk mengestimasi proporsi Binomial (Bolstad, 2007).

3.7 Estimator Bayes dari Distribusi Binomial dengan Prior Beta

Jika $X \sim \text{Binomial}(n, \theta)$ dan densitas prior $\theta \sim$ Beta(a,b), maka fungsi densitas posterior dapat dinyatakan sebagai fungsi bersyarat dari θ dengan x diketahui, sehingga berdasarkan definisi 2.10 dapat ditulis dengan

$$f(\theta|x) = \frac{f(\theta, x)}{f(x)} \tag{3.19}$$

karena $f(\theta, x)$ dapat dinyatakan sebagai $f(x)f(\theta|x)$ atau $f(\theta)f(x|\theta)$, maka

$$f(\theta)f(x|\theta) = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}\theta^{a-1}(1-\theta)^{b-1}.\binom{n}{x}\theta^{x}(1-\theta)^{n-x}$$

$$= \binom{n}{x}\frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}\theta^{x+a-1}(1-\theta)^{n-x+b-1}, \tag{3.20}$$

dimana

$$\binom{n}{x} = \frac{n!}{(n-x)!\,x!}\,. \tag{3.21}$$

Berdasarkan persamaan (2.15) bahwa $\Gamma(n) = (n-1)!$, maka persamaan (3.21) dapat ditulis sebagai

$$\binom{n}{x} = \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n-x+1)\Gamma(x+1)}. \tag{3.22}$$

Sehingga dengan mensubsitusikan persamaan (3.22) ke persamaan (3.20) maka diperoleh

$$f(\theta)f(\theta|x) = \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n-x+1)\Gamma(x+1)}\frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}\theta^{x+a-1}(1-\theta)^{n-x+b-1}.$$

Selanjutnya perhatikan $f(x)$, dimana $f(x)$ merupakan fungsi densitas peluang marginal dari x, sehingga berdasarkan persamaan (2.10) dapat ditulis sebagai

$$f(x) = \int_0^1 f(\theta, x) d\theta$$

$$= \int_0^1 f(\theta) f(x|\theta) d\theta$$

$$= \int_0^1 \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n-x+1)\Gamma(x+1)} \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \theta^{x+a-1}(1-\theta)^{n-x+b-1} d\theta$$

$$= \frac{\Gamma(n+1)\Gamma(a+ b)}{\Gamma(x+1)\Gamma(n-x+1)\Gamma(a)\Gamma(b)} \frac{\Gamma(x+a)\Gamma(n+ b-x)}{\Gamma(a+n+ b)}$$

$$* \int_0^1 \frac{\Gamma(a+n+ b)}{\Gamma(x+ a)\Gamma(n+ b-x)} \theta^{x+a-1}(1- \theta)^{n+ b-x-1} d\theta. \qquad (3.23)$$

Perhatikan

$$\frac{\Gamma(a+n+ b)}{\Gamma(x+ a)\Gamma(n+ b-x)} \theta^{x+a-1}(1- \theta)^{n+ b-x-1}$$

merupakan integrasi dari fungsi densitas Beta$(x+ a, n+ b-x)$. Karena x variabel random kontinu, maka berdasarkan definisi 2.3, fungsi densitas peluangnya akan memenuhi kondisi bahwa $\int_0^1 f(x)dx = 1$, sehingga

$$\int_0^1 \frac{\Gamma(a+n+ b)}{\Gamma(x+ a)\Gamma(n+ b-x)} \theta^{x+a-1}(1- \theta)^{n+ b-x-1} d\theta = 1.$$

Oleh karena itu persamaan (3.23) dapat ditulis menjadi

$$f(x) = \frac{\Gamma(n+1)\Gamma(a+b)}{\Gamma(x+1)\Gamma(n-x+1)\Gamma(a)\Gamma(b)} \frac{\Gamma(x+ a)\Gamma(n+ b-x)}{\Gamma(a+n+ b)}, \qquad (3.24)$$

maka dengan persamaan (3.19), (3.20) dan (3.24) fungsi densitas posterior dapat ditulis sebagai

$$f(\theta|x) = \frac{f(\theta).f(x|\theta)}{\int_0^1 f(\theta)x\, f(x|\theta)\, d\theta}$$

$$= \frac{\frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n-x+1)\Gamma(x+1)}\frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}\theta^{x+a-1}(1-\theta)^{n-x+b-1}}{\frac{\Gamma(n+1)\Gamma(\alpha+\ b)}{\Gamma(x+1)\Gamma(n-x+1)\Gamma(a)\Gamma(b)}\frac{\Gamma(x+\ a)\Gamma(n+b-x)}{\Gamma(a+n+\ b)}}$$

$$= \frac{\Gamma(a+n+\ b)}{\Gamma(x+\ a)\Gamma(n+\ b-x)}\ \theta^{x\ +\ a-1}(1-\ \theta)^{n+\ b-x-1}. \qquad (3.25)$$

Berdasarkan persamaan (3.25), dapat diketahui bahwa posterior berdistribusi Beta *(x +* a *,n – x + b)* dengan θ merupakan variabel dan x adalah nilai observasi atau sampel.

Dalam perspektif Bayes, estimasi titik mempunyai pengertian bahwa distribusi posterior akan digambarkan oleh nilai dari sebuah statistik tunggal. Nilai yang paling penting untuk menggambarkan distribusi posterior adalah ukuran lokasi. Oleh karena itu, mean posterior dan median posterior disini akan menjadi kandidat terbaik untuk dijadikan sebagai sebuah estimator. Mengacu pada persamaan (3.17) yang membuktikan bahwa mean posterior merupakan estimator yang optimum untuk θ, maka dalam hal ini mean posterior digunakan sebagai estimator Bayes (Bolstad, 2007), sehingga estimator Bayes untuk parameter θ jika dinyatakan sebagai $\hat{\theta}_B$ adalah

$$\hat{\theta}_B = \frac{x+a}{a+b+n} \qquad (3.26)$$

Perhatikan estimator Bayes $\hat{\theta}_B$ yang diperoleh, diketahui bahwa distribusi Beta(a,b) yang digunakan sebagai prior yang mempunyai mean $a/(a+b)$ dan $\hat{\theta} = \frac{x}{n}$ yang merupakan proporsi distribusi Binomial, maka estimator Bayes $\hat{\theta}_B$ akan mengkombinasikan estimator $\hat{\theta}$ dengan informasi prior, hal ini terlihat jika $\hat{\theta}_B$ ditulis sebagai

$$\hat{\theta}_B = \left(\frac{n}{a+bn}\right)\left(\frac{x}{n}\right) + \left(\frac{a+b}{a+b+n}\right)\left(\frac{a}{a+b}\right) \qquad (3.27)$$

Sehingga pada persamaan (3.27) terlihat bahwa $\hat{\theta}_B$ adalah kombinasi linear dari mean prior dan mean sampel (Berger, 1990).

- **Nilai Ekspektasi dan Variansi Posterior**

Berdasarkan teorema 2.5 nilai ekspektasi (μ) dan variansi (σ^2) dari distribusi Beta(a, b) adalah

$$\mu = \frac{a}{a+b} \text{ dan } \sigma^2 = \frac{ab}{(a+b+1)(a+b)^2}.$$

Diketahui distribusi posterior yang diperoleh berdistribusi Beta $(x + a, n - x + b)$, misalkan $a' = x + a$ dan $b' = n - x + b$, maka diperoleh nilai ekspektasi dari distribusi posteriornya adalah.

$$E(\theta|x) = \hat{\theta}_B = \frac{a'}{a' + b'}$$

$$= \frac{x + a}{(x + a) + (n - x + b)}$$

$$= \frac{x + a}{a + b + n} \qquad (3.28)$$

dan variansi dari distribusi posterior adalah

$$\text{Var}(\theta|x) = \frac{a'\, b'}{(a' + b')^2(a' + b' + 1)}$$

$$= \frac{(x + a)(n - x + b)}{\big((x + a) + (n - x + b)\big)^2\big((x + a) + (n - x + b) + 1\big)}$$

$$= \frac{(x + a)(n - x + b)}{(x + a + n - x + b)^2(x + a + n - x + b + 1)}$$

$$= \frac{(x + a)(n - x + b)}{(a + b + n)^2(a + b + n + 1)} \qquad (3.29)$$

(Bolstad, 2007)

BUKTI PERSAMAAN 3.28

Nilai ekspektasi posterior dapat diperoleh dengan

$$E(\theta|x) = \int_0^1 \theta \ f(\theta|x) d\theta$$

$$= \int_{\mathbf{0}}^{\mathbf{1}} \theta \frac{\Gamma(\alpha + n + b)}{\Gamma(x + a)\Gamma(n + b - x)} \theta^{x + a - 1}(1 - \theta)^{n + b - x - 1} d\theta$$

$$= \frac{\Gamma(a + n + b)}{\Gamma(x + a)\Gamma(n + b - x)} \int_0^1 \theta[\theta^{x + a - 1}(1 - \theta)^{n + b - x - 1}] d\theta$$

$$= \frac{\Gamma(\alpha + n + b)}{\Gamma(x + a)\Gamma(n + b - x)} \int_0^1 \theta^{x + a}(1 - \theta)^{n + b - x - 1} \, d\theta$$

$$= \frac{\Gamma(a + n + b)}{\Gamma(x + a)\Gamma(n + b - x)} \frac{\Gamma(x + a + 1)\Gamma(n - x + b)}{\Gamma(x + a + 1 + n - x + b)}$$

$$= \frac{\Gamma(a + n + b)}{\Gamma(x + a)\Gamma(n + b - x)} \frac{\Gamma(x + a + 1)\Gamma(n - x + b)}{\Gamma(a + 1 + n + b)}$$

$$= \frac{\Gamma(a + n + b)(x + \alpha)\Gamma(x + a)}{\Gamma(x + a)\Gamma(a + 1 + n + b)}$$

$$= \frac{\Gamma(a + n + b)(x + a)}{\Gamma(a + 1 + n + b)}$$

$$= \frac{\Gamma(a + n + b)(x + a)}{(n + a + b)\Gamma(n + a + b)}$$

$$= \frac{x + a}{a + b + n} *$$

BUKTI PERSAMAAN 3.29

jika

$$E(\theta^2|x) = \int_0^1 \theta^2 \ f(\theta|x) d\theta$$

$$= \frac{\Gamma(a+n+b)}{\Gamma(x+a)\Gamma(n+b-x)} \int_0^1 \theta^2[\theta^{x+a-1}(1-\theta)^{n+b-x-1}]d\theta$$

$$= \frac{\Gamma(a+n+b)}{\Gamma(x+a)\Gamma(n+b-x)} \int_0^1 \theta^{x+a+1}(1-\theta)^{n+b-x-1}d\theta$$

$$= \frac{\Gamma(\alpha+n+b)}{\Gamma(x+\alpha)\Gamma(n+b-x)} \frac{\Gamma(x+\alpha+2)\Gamma(n+b-x)}{\Gamma(x+\alpha+2+n+b-x)}$$

$$= \frac{\Gamma(\alpha+n+b)\Gamma(x+\alpha+2)}{\Gamma(x+a)\Gamma(\alpha+b+n+2)}$$

$$= \frac{\Gamma(a+n+b)(x+a+1)(x+a)\Gamma(x+a)}{\Gamma(x+a)(a+b+n+1)(\alpha+b+n)\Gamma(\alpha+b+n)}$$

$$= \frac{(x+a+1)(x+a)}{(a+b+n+1)(a+b+n)}.$$

Maka dengan teorema 2.2 diperoleh variansi posterior sebagai berikut

$$\text{Var}(\theta|x) = E(\theta^2|x) - E(\theta|x)^2$$

$$= \frac{(x+a+1)(x+a)}{(a+b+n+1)(a+b+n)} - \left(\frac{x+a}{a+b+n}\right)^2$$

$$= \frac{(x+a+1)(x+a)}{(a+b+n+1)(a+b+n)} - \frac{(x+a)^2}{(a+b+n)^2}$$

$$= \frac{(x+a+1)(x+a)(a+b+n) - (x+a)^2(a+b+n+1)}{(a+b+n+1)(a+b+n)^2}$$

$$= \frac{(x+a)\big(((x+a+1)(a+b+n)\big) - ((x+a)(a+b+n+1)))}{(a+b+n+1)(a+b+n)^2}$$

$$= \frac{(x+a)((xn+xa+xb+an+a^2+ab+n+a+b) - (xa+xb+xn+x+a^2+ab+an+a))}{(a+b+n+1)(a+b+n)^2}$$

$$= \frac{(x+a)(n-x+b)}{(a+b+n+1)(a+b+n)^2} *$$

- **Sifat Tak Bias (Unbiased) Estimator Bayes $\hat{\boldsymbol{\theta}}_B$**

Jika $X_1, X_2, \dots, X_n$ adalah sampel random Binomial *(1,θ)*, maka $x = \sum X_i \sim$ Binomial(n, θ). Diketahui $\hat{\theta}_B = \frac{x+\alpha}{\alpha+b+n}$ merupakan estimator Bayes untuk parameter θ, maka nilai ekspektasi dari estimator Bayes $\hat{\theta}_B$ adalah

$$E(\hat{\theta}_B) = E\left(\frac{x+a}{a+b+n}\right)$$

$$= \frac{1}{a+b+n} E(x+a)$$

$$= \frac{1}{a+b+n} E(x) + E(a)$$

$$= \frac{1}{a+b+n} ((n\theta) + a)$$

Karena $\frac{1}{a+b+n}\left((n\theta)+a\right) \neq \theta$, maka berdasarkan definisi 2.16.1 dapat disimpulkan bahwa $\hat{\theta}_B$ merupakan estimator yang bias untuk θ. Bertolak belakang dengan statistik klasik, estimator Bayes tidak menekankan kepada sifat tak bias dari sebuah estimator, karena estimator Bayes biasanya merupakan estimator yang bias (Bolstad, 2007).

- ***Mean Square Error* (MSE) Estimator Bayes $\hat{\boldsymbol{\theta}}_B$**

Jika $X_1, X_2, \dots, X_n$ adalah sampel random Binomial *(1,θ)*, maka $x = \sum X_i \sim$ Binomial (n, θ). Diketahui $\hat{\theta}_B = \frac{x+\alpha}{\alpha+b+n}$ merupakan estimator Bayes untuk parameter θ, maka MSE dari estimator Bayes $\hat{\theta}_B$ adalah

$$E\left(\hat{\theta}_B - \theta\right)^2 = \text{Var}\,\hat{\theta}_B + \left(\text{bias}\,\hat{\theta}_B\right)^2$$

$$= \text{Var}\left(\frac{x+a}{a+b+n}\right) + \left(E\left(\frac{x+a}{a+b+n}\right) - \theta\right)^2$$

$$= \left(\frac{1}{a+b+1}\right)^2 \text{Var}(x+\alpha) + \left(\frac{1}{a+b+n} E(x+a) - \theta\right)^2$$

$$= \frac{1}{(a+\ b+n)^2}\ \mathrm{Var}(x) +\ \mathrm{Var}(a) + \left(\frac{1}{a+\ b+n}\ \big(E(x) +\ E(a)\big) -\ \theta\right)^2$$

Karena diketahui bahwa, Var $(\alpha) =\ 0, \mathrm{Var}(x) =\ n\,\theta(1-\ \theta)$ dan $E(x) =\ n\theta$, maka

$$E\big(\hat{\theta}_B -\ \theta\big)^2 = \frac{n\theta(1-\ \theta)}{(\alpha+\ b+n)^2} + \left(\frac{n\theta +\ a}{\alpha+\ b+n} -\ \theta\right)^2 \tag{3.30}$$

Estimator Bayes biasanya mempunyai *Mean Square Error* (MSE) yang lebih kecil daripada estimator klasik, sehingga estimator Bayes dapat dikatakan lebih baik daripada estimator klasik ketika dinilai dengan kriteria klasik yaitu *Mean Square Error* (MSE) (Bolstad, 2007).

3.8 Estimator Bayes Distribusi Binomial dengan Prior Uniform

Jika $X_1, X_2, \dots, X_n$ adalah percobaan random independen dari distribusi Bernoulli dengan parameter θ, maka ekuivalen dengan

$$x = \sum X_i \sim \text{Binomial}\ (n, \theta) \tag{3.31}$$

Mengacu fungsi kepadatan posterior dinyatakan sebagai fungsi bersyarat θ jika *x* diketahui dan ditulis

$$f(\theta|x) = \frac{f(\theta, x)}{f(x)} \tag{3.32}$$

dimana $f(\theta, x)$ merupakan fungsi distribusi bersama dari *x* dan θ. Selain itu $f(\theta, x)$ juga dapat dinyatakan sebagai perkalian distribusi bersyarat $f(x|\theta)$ dengan distribusi prior $f(\theta)$. Sedangkan $f(x)$ merupakan fungsi densitas posterior maginal *x*, sehingga persamaan (3.32) juga dapat ditulis

$$f(\theta|x) = \frac{f(\theta)f(x|\theta)}{\int_0^1 f(\theta)f(x|\theta)dx}$$

Jika diketahui distribusi Binomial(n, θ) sebagai distribusi sampel, maka distribusi Uniform yang digunakan sebagai prior konjugat untuk mengestimasi proporsi (θ) harus terbatasi pada nilai 0 dan 1. Sehingga salah satu pilihan distribusi priornya adalah distribusi Uniform $\theta \sim$ Uniform(0,1), dimana θ akan bernilai konstan sebesar 1 pada semua interval, maka diperoleh fungsi densitas marginal *x* yaitu

$$\int_0^1 f(\theta)f(x|\theta)dx = \int_0^1 1.\binom{n}{x}\theta^x(1-\ \theta)^{n-x}dx$$

$$= \int_0^1 \ \binom{n}{x}\theta^x(1-\ \theta)^{n-x}dx$$

$$= 1$$

oleh karena itu distribusi posterior dapat ditulis sebagai

$$f(\theta|x) = \frac{f(\theta)f(\theta|x)}{1}$$

$$= \binom{n}{x}\theta^x(1-\ \theta)^{n-x}. \qquad (3.33)$$

Persamaan (3.33) tidak hanya sebagai sebuah distribusi posterior namun juga sebagai distribusi Binomial sebagai distribusi sampel.

Berdasarkan teorema 2.7, distribusi Uniform (0,1) juga dapat dinyatakan sebagai distribusi Beta (1,1) (Bolstad, 2007). Oleh karena itu, maka inferensi Bayes untuk proporsi Binomial (θ) dengan prior Uniform (0,1) juga dapat diperoleh dengan menggunakan prior Beta (1,1). Karena distribusi posterior $f(\theta|x) \sim$ Beta *(x + a ,n – x + b)* dengan a = 1 dan b=1, maka distribusi posterior dapat dinyatakan sebagai

$$f(\theta|x) \sim \text{Beta}\ (x+1, n-x+1) = \frac{\Gamma(\ n+2)}{\Gamma(x+1)\Gamma(n-x+1)}\ \theta^{(x+1)-\ 1}(1-\theta)^{(n-x+1)-1}$$

$$= \frac{\Gamma(n+2)}{\Gamma(x+1)\Gamma(n-x+1)}\ \theta^{x}(1-\theta)^{n-x},$$

Dimana $\frac{\Gamma(n+2)}{\Gamma(x+1)\Gamma(n-x+1)}$ merupakan konstanta untuk mentransformasi $\theta^{x}(1-\ \theta)^{n-x}$ ke distribusi Beta dan distribusi posterior bisa dinyatakan dalam distribusi Beta (*x + 1,n – x +1*), sehingga estimator Bayes $\hat{\theta}_{\mathrm{B}}$ dari distribusi Binomial dengan prior Uniform[0,1] bisa dinyatakan sebagai

$$\hat{\theta}_{\mathrm{B}} = \frac{x+1}{(x+1)+(n-x+1)}$$

$$= \frac{x+1}{n+2} \qquad (3.34)$$

- **Nilai Ekspektasi dan Variansi Posterior**

Jika a' = *x + 1*, b' = *n – x + 1* dan estimator Bayes $\hat{\theta}_{B}$, maka dengan menggunakan teorema 2.5 nilai ekspektasi dan variansi dari distribusi posterior adalah.

$$E(\theta|x) = \ \hat{\theta}_{B} = \frac{a'}{a'+b'}$$

$$= \frac{x+1}{(x+1)+(n-x+1)}$$

$$= \frac{x+1}{n+2} \qquad (3.35)$$

dan

$$Var\ (\theta|x) = \frac{a'\,b'}{(a'+\ b')^{2}(a'+\ b'+\ 1)}$$

$$= \frac{(x+1)(n-x+1)}{((x+1)+(n-x+1))^{2}((x+\ 1)+\ (n-\ x+\ 1)+1)}$$

$$= \frac{nx-x^{2}+x+n-x+1}{(x+1+n-x+1)^{2}(x+1+n-x+1+1)}$$

$$= \frac{nx - x^2 + n + 1}{(n+2)^2(n+3)} \tag{3.36}$$

BUKTI PERSAMAAN (3.35)

Nilai ekspektasi posterior dapat diperoleh dengan

$$E(\theta|x) = \int_0^1 \theta \; f(\theta|x)$$

$$= \int_{\mathbf{0}}^{\mathbf{1}} \theta \frac{\Gamma(\,n+2)}{\Gamma(x+1)\Gamma(n-x+1)} \; \theta^x (1-\theta)^{n-x} \, d\theta$$

$$= \frac{\Gamma(\,n+2)}{\Gamma(x+1)\Gamma(n-x+1)} \int_0^1 \theta[\theta^x (1-\theta)^{n-x}] d\theta$$

$$= \frac{\Gamma(\,n+2)}{\Gamma(x+1)\Gamma(n-x+1)} \int_0^1 \theta^{x+1} (1-\theta)^{n-x} d\theta$$

$$= \frac{\Gamma(\,n+2)}{\Gamma(x+1)\Gamma(n-x+1)} \frac{\Gamma(x+2)\Gamma(n-x+1)}{\Gamma(x+2+n-x+1)}$$

$$= \frac{\Gamma(\,n+2)\Gamma(x+2)}{\Gamma(x+1)\Gamma(n+3)}$$

$$= \frac{\Gamma(\,n+2)(x+1)\Gamma(x+1)}{\Gamma(x+1)(n+2)\Gamma(n+2)}$$

$$= \frac{x+1}{n+2}$$

BUKTI PERSAMAAN (3.36)

Karena

$$E(\theta^2|x) = \int_0^1 \theta^2\ f(\theta|x)d\theta$$

$$= \frac{\Gamma(\ n+2)}{\Gamma(x+1)\Gamma(n-x+1)}\int_0^1 \theta^2[\theta^x(1-\theta)^{n-x}]d\theta$$

$$= \frac{\Gamma(\ n+2)}{\Gamma(x+1)\Gamma(n-x+1)}\int_0^1 \theta^{x+2}(1-\theta)^{n-x}d\theta$$

$$= \frac{\Gamma(\ n+2)}{\Gamma(x+1)\Gamma(n-x+1)}\frac{\Gamma(x+3)\Gamma(n-x+1)}{\Gamma(x+3+n-x+1)}$$

$$= \frac{\Gamma(\ n+2)\Gamma(x+3)}{\Gamma(x+1)\Gamma(n+4)}$$

$$= \frac{\Gamma(\ n+2)(x+2)(x+1)\Gamma(x+1)}{\Gamma(x+1)(n+3)(n+2)\Gamma(\ n+2)}$$

$$= \frac{(x+2)(x+1)}{(n+3)(n+2)}$$

Maka dengan teorema 2.2 diperoleh variansi posterior sebagai berikut

$$Var(\theta|x) = E(\theta^2|x) - E(\theta|x)^2$$

$$= \frac{(x+2)(x+1)}{(n+3)(n+2)} - \left(\frac{x+1}{n+2}\right)^{\mathbf{2}}$$

$$= \frac{(x+2)(x+1)}{(n+3)(n+2)} - \frac{(x+1)^2}{(n+2)^2}$$

$$= \frac{((x+2)(x+1)(n+2)) - ((x+1)^2(n+3))}{(n+2)^2(n+3)}$$

$$= \frac{((x^2+3x+2)(n+2)) - (x^2+2x+1)(n+3)}{(n+2)^2(n+3)}$$

$$= \frac{(nx^2+3nx+2n+2x^2+6x+4) - (\ nx^2+2nx+n+3x^2+6x+3)}{(n+2)^2(n+3)}$$

$$= \frac{nx^2 + 3nx + 2n + 2x^2 + 6x + 4 - \ nx^2 - 2nx - n - 3x^2 - 6x - 3}{(n+2)^2(n+3)}$$

$$= \frac{nx - x^2 + n + 1}{(n+2)^2(n+3)} *$$

➢ **Sifat Tak Bias (Unbiased) Estimator Bayes $\hat{\boldsymbol{\theta}}_B$**

Jika $X_1, X_2, \dots, X_n$ adalah sampel random Binomial *(1,θ)*, maka $x = \sum X_i \sim$ Binomial(n, θ). Diketahui estimator Bayes yang telah diperoleh $\hat{\theta}_B = \frac{x+1}{n+2}$, sehingga nilai ekspektasi $\hat{\theta}_B$ adalah

$$E(\hat{\theta}_B) = E\left(\frac{x+1}{n+2}\right)$$

$$= \frac{1}{(n+2)} E(x+1)$$

$$= \frac{1}{(n+2)} \left(E(x) + \ E(1)\right)$$

$$= \frac{1}{(n+2)} (n\theta + 1)$$

$$= \frac{(n\theta + 1)}{n+2}$$

Karena $\frac{(n\theta+1)}{n+2} \neq \theta$, maka berdasarkan definisi 2.19 dapat disimpulkan bahwa $\hat{\theta}_B$ merupakan estimator yang bias untuk θ.

➢ ***Mean Square Error* (MSE) Estimator Bayes $\hat{\boldsymbol{\theta}}_B$**

Jika $X_1, X_2, \dots, X_n$ adalah sampel random Binomial *(1,θ)*, maka $x = \sum X_i \sim$ Binomial(n, θ), dan estimator Bayes adalah $\hat{\theta}_B = \frac{x+1}{n+2}$, sehingga MSE dari estimator Bayes untuk θ adalah

$$E\left(\hat{\theta}_B - \theta\right)^2 = Var(\hat{\theta}_B) + \left(bias\ (\hat{\theta}_B)\right)^2$$

$$= Var\ \left(\tfrac{x+1}{n+2}\right) + \left(E\left(\tfrac{x+1}{n+2}\right) - \theta\right)^2$$

$$= \left(\tfrac{1}{n+2}\right)^2 Var(x+1) + \left(\tfrac{1}{n+2}\ E(x+1) - \theta\right)^2$$

$$= \frac{1}{(n+2)^2}\ Var(x) + Var(1) + \left(\frac{1}{n+2}\ \left(E(x) + E(1)\right) - \theta\right)^2$$

Diketahui bahwa $Var\ (1) = 0, Var(x) = n\,\theta(1-\theta), E(1) = 1$ dan $E(x) = n\theta$

maka,

$$E\left(\hat{\theta}_B - \theta\right)^2 = \frac{n\theta(1-\theta)}{(n+2)^2} + \left(\frac{n\theta + 1}{n+2} - \theta\right)^2 \qquad (3.37)$$

merupakan *Mean Square Eror* (MSE) dari estimator $\hat{\theta}_B$ (Berger, 1990).

3.9 Interval Konfidensi Bayes

Dalam inferensi Bayes, interval konfidensi merupakan interval probabilitas posterior yang digunakan untuk estimasi interval, sedangkan pada pendekatan klasik interval konfidensi diperoleh dari data sampel (Bolstad, 2007)

Misalkan $X_1, X_2, \ldots X_n$ variabel random yang diambil dari suatu populasi sembarang yang mempunyai mean μ dan variansi σ^2, distribusi sampling untuk mean dapat dianggap mendekati normal dengan $\mu_{\bar{x}} = \mu$ dan variansi $\sigma_{\bar{x}}^2 = {\sigma^2}/{n}$, maka dengan Teorema limit pusat diperoleh

$$Z = \frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu)}{\sigma} \sim N(0.1)$$

Untuk n→ ∞ (Bain dan Engelhardt, 1992). Jika dianggap bahwa σ diketahui maka interval konfidensi untuk μ dengan koefisien konfidensi mendekati $1 - \alpha$ adalah

$$P\left(-Z\alpha_{/2} \leq Z \leq Z\alpha_{/2}\right) \sim 1-\alpha$$

$$P\left(-Z\alpha_{/2} \leq \frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu)}{\sigma} \leq Z\alpha_{/2}\right) \sim 1-\alpha$$

$$P\left(-Z\alpha_{/2} \leq \frac{(\bar{X}_n - \mu)}{\sigma/\sqrt{n}} \leq Z\alpha_{/2}\right) \sim 1-\alpha$$

$$P\left(-Z\alpha_{/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \bar{X}_n - \mu \leq Z\alpha_{/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \sim 1-\alpha$$

$$P\left(-Z\alpha_{/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \bar{X}_n - \mu \leq Z\alpha_{/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \sim 1-\alpha$$

$$P\left(\bar{X}_n - Z\alpha_{/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{X}_n + Z\alpha_{/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \sim 1-\alpha \qquad (3.38)$$

Diketahui distribusi posterior $f(\theta|x)$ berdistribusi Beta *(x + a ,n – x + b)*, dengan $\bar{X}_n = m' = \hat{\theta}_B$ dan $\sigma_{\bar{x}}^2 = s'$, maka dengan persamaan (3.39) interval konfidensi untuk mean $\hat{\theta}_B$ dengan kepercayaan mendekati 1 – α dari distribusi posterior Beta *(x + α ,n – x + b* juga dapat diperoleh dengan mengaproksimasi ke distribusi Normal $N[m';(s')^2]$, sehingga dapat ditulis sebagai

$$\left[m' - Z\alpha_{/2}s', m' + Z\alpha_{/2}s'\right] \qquad (3.39)$$

dimana $Z_{\frac{\alpha}{2}}$ adalah nilai tabel Normal standar, mean posterior

$$m' = \frac{x+a}{n+a+b}$$

dan variansi posterior

$(s')^2 = \frac{(x+a)(n-x+b)}{(a+b+n)^2(a+b+n+1)}$ (Bolstad, 2007)

3.10 Uji Hipotesis Bayes

Seperti yang telah diketahui sebelumnya bahwa model Bayes tidak hanya mengandung distribusi sampel $f(x|\theta)$ namun juga distribusi prior $f(\theta)$, dimana prior merupakan anggapan awal terhadap parameter θ. Dalam hal ini dijelaskan bahwa informasi sampel dapat dikombinasikan dengan informasi prior menggunakan teorema Bayes sehingga menghasilkan distribusi posterior $f(\theta|x)$, sehingga semua inferensi terhadap θ berdasarkan distribusi posterior (Berger, 1990).

Dalam masalah menguji hipotesis, distribusi posterior digunakan untuk menghitung probabilitas H_0 dan H_1 adalah benar. Tapi perlu diperhatikan bahwa $f(\theta|x)$ merupakan sebuah probabilitas untuk sebuah variabel random. Karenanya, probabilitas posterior $P\big(\ \theta \epsilon\ \hat{\theta}_B|x\big) = P(\ H_0\ benar|x)$ dapat dihitung (Berger, 1990),

Pengujian yang dihadapi merupakan uji dua arah dan satu arah untuk hipotesis H_0 dengan tandingan H_1 dengan taraf signifikansi α

A. $H_0 : \theta \ \leq\ \theta_0$vs $H_1 :\ \theta >\ \theta_0$
B. $H_0 : \theta \ \geq\ \theta_0$vs $H_1 :\ \theta <\ \theta_0$
C. $H_0 :\ \theta =\ \theta_0$vs $H_1 :\ \theta \neq\ \theta_0$

Pendekatan yang biasa digunakan pada kasus ini adalah dilakukan dengan mengaproksimasi ke distribusi Normal**.** Dengan statistik uji pada taraf α, maka kriteria uji;

$$Z = \frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - \theta_0)}{\sigma}$$

atau

$$Z = \frac{(\bar{X}_n - \theta_0)}{{}^{s}\!/\!\sqrt{n}}$$

Dengan $\bar{X}_n = m' = \hat{\theta}_B$ dan $\sigma_{\bar{x}}^2 = \ {}^{\sigma}\!/\!\sqrt{n} = s'$, maka

$$Z = \frac{(m' - \theta_0)}{s'}$$

Sehingga tolak H_0 (berdasarkan α dan hipotesis)

A. H_0ditolak apabila Z > Z_α

B. H_0 ditolak apabila Z < $-Z_\alpha$

C. H_0 ditolak apabila Z > $Z_{\alpha/2}$ atau Z < $Z_{-\alpha/2}$

3.11 Inferensi Klasik untuk proporsi Binomial

Salah satu metode untuk estimasi titik dalam inferensi klasik adalah metode *Maximum Likelihood Estimator (MLE)*. Jika diketahui *x* kejadian sukses pada n percobaan, maka estimasi maksimum likelihood parameter θ dari distribusi Binomial adalah menentukan nilai maximum untuk θ (Freund,1992).

Jika diketahui $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sampel random dari distribusi Binomial(1,θ) dengan $\theta \epsilon \Omega = (0,1)$, maka fungsi probabilitasnya adalah

$$f(x_i;\theta) = \binom{1}{x_i} \theta^{x_i}(1 - \theta)^{n-x_i}$$

dengan $x_i = 0,1,2, \ldots, n$ sehingga fungsi likelihoodnya adalah

$$L(\theta|x_1, x_2, \ldots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} \mathrm{f}(x_i;\theta)$$

$$= \prod_{i=1}^{n} \binom{1}{x_i} \theta^{x_i}(1 - \theta)^{n-x_i}$$

$$= \theta^{\sum_{i=1}^{n} x_i}(1 - \theta)^{n-\sum_{i=1}^{n} x_i}.$$

Logaritma dari fungsi likelihoodnya adalah

$$\ln L(\theta) = (\ln \theta) \sum_{i=1}^{n} x_i - \ln(1-\theta) \sum_{i=1}^{n} x_i + n \ln(1-\theta)$$

Dengan mendiferensialkan terhadap θ, maka diperoleh

$$\frac{\partial[\ln L(\theta)]}{\partial\theta} = \frac{d[(\ln \theta) \sum_{i=1}^{n} x_i - \ln(1-\theta) \sum_{i=1}^{n} x_i + n \ln(1-\theta)]}{\partial\theta}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{\theta} + \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{1-\theta} - \frac{n}{1-\theta}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{\theta} - \frac{n - \sum_{i=1}^{n} x_i}{1-\theta}$$

Akibatnya θ yang memaksimumkan fungsi likelihoodnya akan sama dengan akar dari persamaan

$\frac{\partial[\ln L(\theta)]}{\partial\theta} = 0$, yaitu

$$\frac{d[\ln L(\theta)]}{d\theta} = 0$$

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{\theta} - \frac{n - \sum_{i=1}^{n} x_i}{1-\theta} = 0$$

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i (1-\theta)}{\theta(1-\theta)} - \frac{\theta(n - \sum_{i=1}^{n} x_i)}{\theta(1-\theta)} = 0$$

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i (1-\theta) - \theta(n - \sum_{i=1}^{n} x_i)}{\theta(1-\theta)} = 0$$

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i - \theta \sum_{i=1}^{n} x_i - \theta n + \theta \sum_{i=1}^{n} x_i}{\theta(1-\theta)} = 0$$

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i - \theta n}{\theta(1-\theta)} = 0$$

$$\frac{-\theta n}{\theta(1-\theta)} = \frac{-\sum_{i=1}^{n} x_i}{\theta(1-\theta)}$$

$$\theta = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} \qquad (3.40)$$

Sehingga MLE untuk θ adalah $\hat{\theta} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$. Untuk membuktikan bahwa $\hat{\theta}$ benar-benar memaksimumkan fungsi likelihood $L(\hat{\theta})$, harus ditunjukan bahwa

$$\frac{\partial^2 [lnL(\hat{\theta})]}{\partial \hat{\theta}^2} < 0.$$

Karena

$$\frac{\partial^2 [lnL(\hat{\theta})]}{\partial \hat{\theta}^2} = \frac{\partial^2 \left[\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{\theta} - \frac{n - \sum_{i=1}^{n} x_i}{1 - \theta}\right]}{\partial \hat{\theta}^2}$$

$$= -\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{\theta^2} - \frac{n - \sum_{i=1}^{n} x_i}{(1-\theta)^2},$$

jika $x = \sum_{i=1}^{n} x_i$ merupakan jumlah kejadian sukses dari n percobaan, dimana $n \leq x$, maka $-\frac{x}{\theta^2} - \frac{n-x}{(1-\theta)^2} < 0$

(Freund, 1992)

- **Sifat Tak Bias (*unbiased*)**

Jika $X_1, X_2, \dots, X_n$ adalah sampel random Binomial *(1,θ)*, maka $x = \sum X_i \sim$ Binomial(n, θ), diketahui MLE nya adalah $\hat{\theta} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \frac{x}{n}$, maka nilai ekspektasi $\bar{X}$ adalah

$$E\left(\frac{x}{n}\right) = \frac{1}{n} \cdot E(x) = \frac{1}{n} \cdot n\theta = \theta$$

Karena $E(\hat{\theta}) = \theta$, sehingga $\hat{\theta}$ merupakan estimator tak bias untuk θ.

- ***Mean Square Error* (*MSE*)**

Jika $X_1, X_2, \ldots, X_n$ adalah sampel random Binomial *(1,θ)*, maka $x = \sum X_i \sim$ Binomial(n, θ) dan MLE untuk $\hat{\theta} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \frac{x}{n}$. Karena $\hat{\theta}$ merupakan estimator yang tak bias untuk θ. Sehingga *Mean Square Error* (MSE) ialah

$$MSE(\hat{\theta}) = Var\,(\hat{\theta})$$

$$= Var\left(\frac{x}{n}\right)$$

$$= \frac{1}{n^2}\,Var(x)$$

$$= \frac{1}{n^2}\,n\,\theta(1-\theta)$$

$$= \frac{\theta(1-\theta)}{n} \qquad (3.41)$$

➢ **Interval Konfidensi Klasik (*Confidensi Interval*)**

Dalam teori estimasi pada statistik klasik, parameter θ dianggap sebagai suatu konstanta yang akan diestimasi dari sejumlah n sampel pengamatan yang ada. Pendekatan yang paling biasa digunakan untuk interval konfidensi (*confidence interval*) adalah dengan pendekatan normal terhadap Binomial, maka berdasarkan persamaan (3.38) persamaan interval konfidensi $1-\alpha$ dinyatakan dengan

$$P\left(\bar{X}_n - Z\alpha_{/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le \mu \le \bar{X}_n + Z\alpha_{/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \sim 1-\alpha$$

jika diketahui $\sigma^2 = \frac{\hat{\theta}(1-\hat{\theta})}{n}$ dan $\bar{X} = \hat{\theta}$, maka interval konfidensi untuk mean $\hat{\theta}$ adalah

$$\left[\hat{\theta} - Z_{\frac{\alpha}{2}}.\sqrt{\frac{\hat{\theta}(1-\hat{\theta})}{n}}, \hat{\theta} + Z_{\frac{\alpha}{2}}.\sqrt{\frac{\hat{\theta}(1-\hat{\theta})}{n}}\right] \qquad (3.42)$$

Dimana $\hat{\theta}$ adalah estimator parameter proporsi distribusi Binomial yang diestimasi dari statistik sampel, $Z_{\frac{\alpha}{2}}$ adalah presentil α / 2 dari distribusi normal standard dan n adalah ukuran sampel (Bain dan Engelhardt, 1992).

- **Uji Hipotesis Klasik**

Pendekatan yang biasa digunakan pada kasus ini adalah dilakukan dengan mengaproksimasi ke distribusi Normal. dengan aproksimasi uji α dengan hipotesis

A. $H_0 : \theta \leq \theta_0$ vs $H_1 : \theta > \theta_0$

B. $H_0 : \theta \geq \theta_0$ vs $H_1 : \theta < \theta_0$

C. $H_0 : \theta = \theta_0$ vs $H_1 : \theta \neq \theta_0$

Pendekatan yang biasa digunakan pada kasus ini adalah dilakukan dengan mengaproksimasi ke distribusi Normal**.** Dengan statistik uji pada taraf α dan X = $\sum X_i$~Binomial(n,θ), maka dengan kriteria uji;

$$z_0 = \frac{\hat{\theta} - \theta_0}{\sqrt{(1 - \theta_0)/_n}} \sim N(0,1)$$

Maka tolak H_0(berdasarkan α dan hipotesis) pada

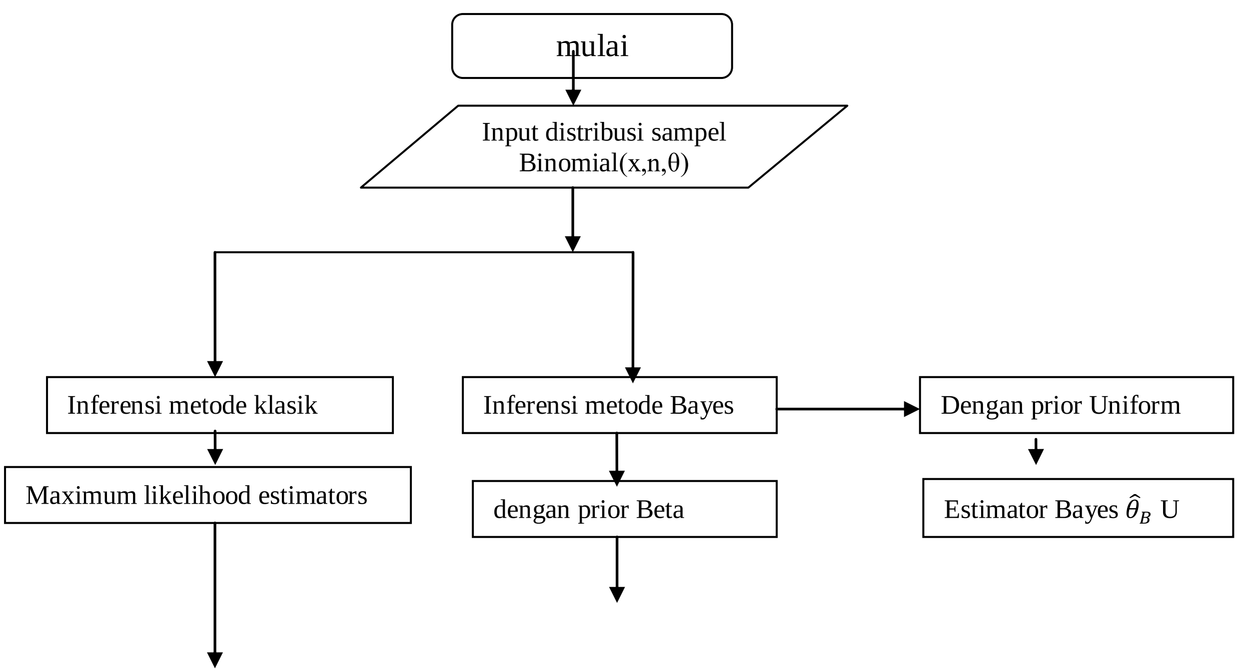
A. tolak H_0 jika $z_0 > z_\alpha$

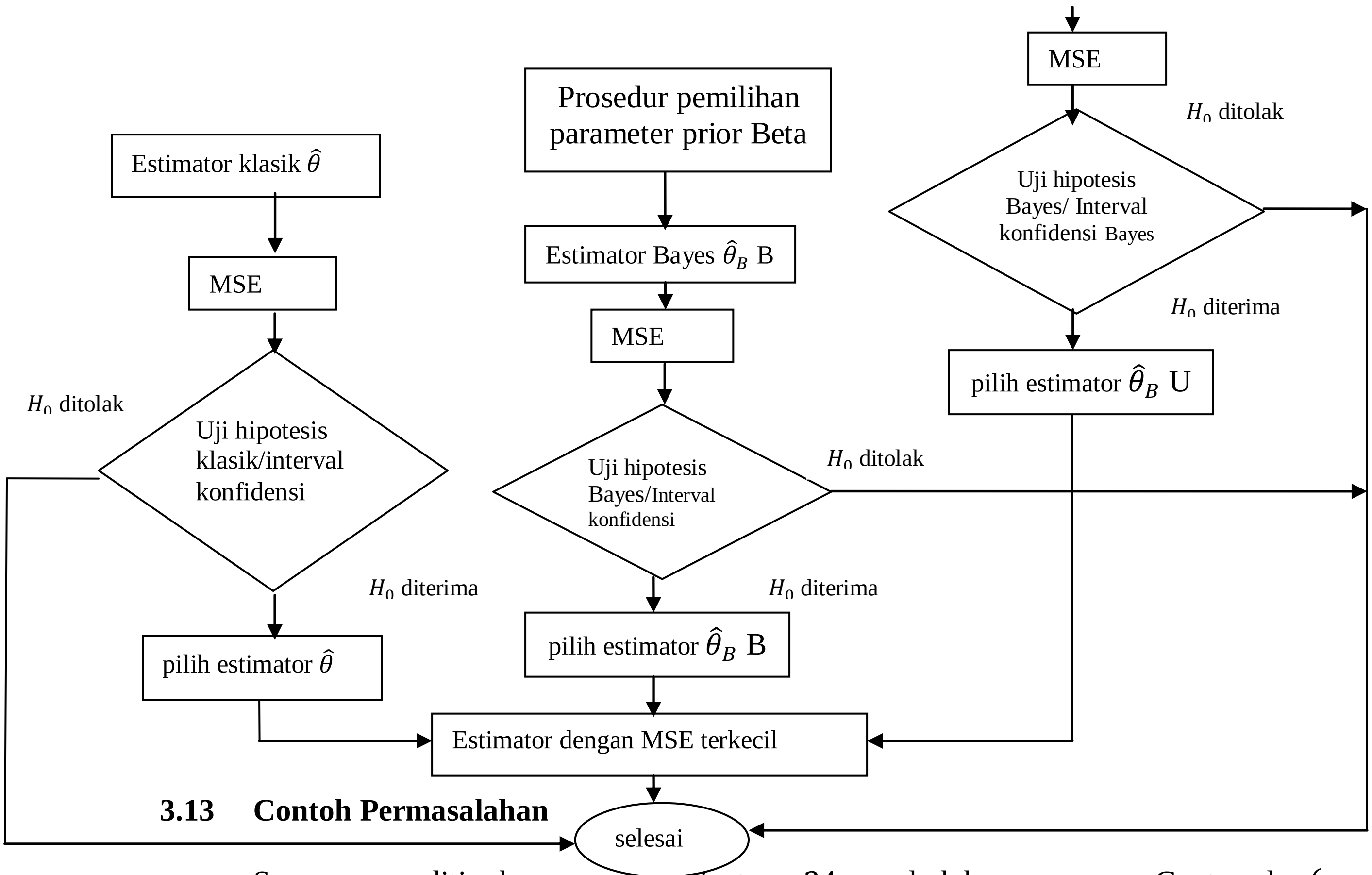
B. tolak H_0 jika $z_0 < -z_\alpha$

C. tolak H_0 jika $z_0 < -z_{\frac{\alpha}{2}}$ atau $z_0 > z_{\frac{\alpha}{2}}$ (Bain dan Engelhardt, 1992)

3.12 Algoritma Penyelesaian

Adapun prosedur penyelesaian membuat inferensi distribusi Binomial dapat di digambarkan dalam diagram alur berikut





Gambar 3.5 Algoritma Inferensi distribusi Binomial

3.13 Contoh Permasalahan

Seorang peneliti akan menguji diantara 24 penduduk perempuan Guetamala $(n = 24)$ mengenai proporsi orang terjangkit polio didaerah tersebut., dimana dalam penelitian tersebut ditemukan 17 perempuan terjangkit polio.

Perhatikan $X_i = 1$ jika responden i merupakan terjangkit kasus polio dan $X_i = 0$ jika responden i yang bukan terjangkit kasus polio, maka $X \sim$ Binomial $(\theta, 17{,}24)$.

Inferensi Bayes dengan Prior Beta

➢ **Pemilihan Parameter Prior Beta**

Pada kasus ini diketahui bahwa dari (n = 24) jumlah sampel penduduk Guetemala teridentifikasi bahwa (x = 17) penderita polio, sehingga dapat dikatakan bahwa proporsi orang terjangkit polio adalah $\theta = \frac{x}{n} = \frac{17}{24} = 0.7083333$ atau 70.83333%.

Seorang peneliti percaya bahwa proporsi orang terjangkit polio di Guetemala berdistribusi Beta(a,b), sehingga Beta(a,b) ditetapkan sebagai prior, maka dengan menggunakan persamaan (3.12) dan persamaan (3.13) parameter a dan b diperoleh

$$a = \frac{x(n-1)}{n}$$

$$= \frac{17(24-1)}{24}$$

$$= \frac{391}{24}$$

$$= 16.29167$$

dan

$$b = \frac{(n-x)(n-1)}{n}$$

$$= \frac{(24-17)(24-1)}{24}$$

$$= \frac{161}{24}$$

$$= 6.708.$$

Sehingga prior yang digunakan adalah $f(\theta) \sim$ Beta $(16.29167, 6.708)$. Dengan persamaan ukuran sampel prior adalah

$$n_{eq} = a + b + 1 = 16.29167 + 6.708 = 22.99967$$

Dan ini cukup mendekati dengan ukuran sampel n = 24, sehingga $f(\theta)$ layak digunakan sebagai prior dalam kasus ini.

- **Nilai Ekspektasi dan Variansi Prior**

Diketahui prior $f(\theta) \sim$ Beta (16.29167,6.708). Dengan teorema 2.5 dapat diperoleh mean prior (μ) dan variansi prior (σ^2) berturut – turut sebagai berikut

$$E(\theta) = \mu = \frac{a}{a+b}$$

$$= \frac{16.29167}{16.29167 + 6.708}$$

$$= 0.7083436$$

dan

$$\mathrm{Var}(\theta) = \sigma^2 = \frac{ab}{(a+b+1)(a+b)^2}$$

$$= \frac{16.29167 * 6.708}{(16.29167 + 6.708 + 1)(16.29167 + 6.708)^2}$$

$$= 0.008608157.$$

Atau anggapan awal (prior) peneliti disini bahwa rata-rata seseorang terjangkit polio di guetamala berdistribusi Beta adalah sekitar 70,83436% dengan variansi 0.008608157, dalam hal ini terlihat bahwa anggapan awal (prior) cukup mendekati proporsi Binomial.

- **Distribusi Posterior Dan Estimator Bayes**

Dari kasus diatas diketahui bahwa 17 dari 24 perempuan diidentifikasi terjangkit polio (x = 17) dan n = 24, dimana x berdistribusi Binomial, maka distribusi posterior adalah berdistribusi Beta (x + a, n – x + b) = Beta (17 + 16.29167, 24 – 17 + 6.708) = Beta (33.29167, 13.708). Berdasarkan persamaan (3.26), estimator Bayes untuk parameter θ adalah

$$\hat{\theta}_B = \frac{x+a}{a+b+n}.$$

Diketahui $a = 16.29167$ dan $b = 6.708$, maka

$$\hat{\theta}_B = \frac{17 + 16.29167}{16.29167 + 6.708 + 24}$$

$$= \frac{33.29167}{46.99967}$$

$$= 0.7083384.$$

Sehingga bisa dikatakan bahwa proporsi perempuan terjangkit polio didaerah Guetemala adalah 70,83384%.

- **Nilai Ekspektasi dan Variansi Posterior**

Jika $\alpha' = x + a = 17 + 16.29167 = 33.29167$ dan $b' = n - x + b = 24 - 17 + 6.708 = 13.708$, maka dengan menggunakan persamaan (3.28) dan persamaan (3.29) maka mean dan variansi dari ditribusi posterior $f(\theta|x)$ adalah

$$E(\theta|x) = \hat{\theta}_B = \frac{a'}{a' + b'}$$

$$= \frac{33.29167}{33.29167 + 13.708}$$

$$= 0.7083384$$

dan

$$\mathrm{Var}(\theta|x) = \frac{a'b'}{(a + b')^2(a' + b' + 1))}$$

$$= \frac{33.29167(13.708)}{(33.29167 + 13.708)^2(33.29167 + 13.708 + 1)}$$

$$= \frac{456.3622}{106029.8}$$

$$= 0.004304095.$$

- ***Mean Square Error* (MSE) Estimator Bayes**

Berdasarkan persamaan (3.30) *Mean Square Eror (MSE)* estimator Bayes dapat diperoleh dengan

$$E(\hat{\theta}_B - \theta)^2 = \frac{n\theta(1-\theta)}{(a+b+n)^2} + \left(\frac{n\theta + a}{a+b+n} - \theta\right)^2$$

Karena θ merupakan proporsi dari distribusi Binomial, maka dari sampel kasus diatas diketahui bahwa 17 dari 24 perempuan diidentifikasi terjangkit polio (x = 17) dan n = 24 dapat diperoleh bahwa proporsi seseorang terjangkit polio $\theta = \frac{17}{24} = 0.7083333 \sim 0.7$. Distribusi prior yang digunakan Beta $(16.29167{,}6.708)$ dengan parameter $a = 16.29167$ dan $b = 6.708,$ maka MSE estimator $\hat{\theta}_B$ adalah

$$E(\hat{\theta}_B - \theta)^2 = \frac{24 * 0.7(1-0{,}7)}{(16.29167 + 6.708 + 24)^2} + \left(\frac{24 * 0.7 + 16.29167}{16.29167 + 6.708 + 24} - 0.7\right)^2$$

$$= \frac{5{,}04}{2208.969} + \left(\frac{33.09167}{46.99967} - 0.7\right)^2$$

$$= 0.002281607 + 0.004083029$$

$$= 0.006364636.$$

- **Interval Konfidensi Estimator Bayes**

Telah diketahui mean distribusi posterior $E(\theta|x) = m' = 0.7083384$ dan variansi posterior $Var(\theta|x) = s' = 0.004304095$. Berdasarkan persamaan (3.39) maka interval konfidensi$(1-\alpha)100\%$ untuk θ diaproksimasi ke

$$m' \pm Z_{\frac{\alpha}{2}} . s'$$

Misalkan taraf signifikansi $\alpha = 0.05$ dengan $a' = 33.29167$, $b' = 13.708$ dan $Z_{\alpha/2} = Z_{0,05/2} = 1.96$, maka interval konfidensi$(1 - \alpha)100\%$ untuk $\hat{\theta}_B$ adalah

$$m' \pm Z_{\frac{\alpha}{2}} . s'$$

$$\left[0.7083384 - 1.96 * 0.004304095 < \hat{\theta}_B < 0.7083384 + 1.96 * 0.004304095\right]$$

$$\left[0.6999024 < \hat{\theta}_B < 0.7167744\right].$$

Maka dapat disimpulkan bahwa proporsi orang terjangkit polio di Guetemala adalah antara 69.99024% dan 71.67744%.

- **Uji Hipotesis Bayes**

Misalkan akan diuji hipotesis berikut

$$H_0 : \theta = 0.7083333$$

$$H_1 : \theta \neq 0.7083333$$

Taraf signifikansi $\alpha = 0{,}05$

$$Z = \frac{(m' - \theta_0)}{s'}$$

H_0 ditolak apabila Z > $Z_{\alpha/2}$ atau Z < $Z_{-\alpha/2}$, dimana, $\hat{\theta}_B = m' = 0.7083384$, $\theta_0 = 0.7083333$ dan $s' = \mathrm{Var}(\theta|x) = 0.004304095$, maka

$$Z = \frac{(0.7083384 - 0.7083333)}{0.004304095}$$

$$= 0.001184918$$

Karena $Z_{\alpha/2} = Z_{0.5/2} = Z_{0.25} = 1.96$ (Lampiran 2), maka $Z < Z_{0.25}$ maka terima H_0, sehingga data mempunyai cukup bukti untuk menyatakan bahwa : $\theta \neq 0.7083384$.

Inferensi Bayes dengan Prior Uniform(0.1)

- **Nilai Ekspektasi Dan Variansi Prior**

Berdasarkan teorema 2.7 bahwa Uniform (0.1) = Beta (1.1). Jika digunakan prior Beta(1.1) untuk untuk mengestimasi proporsi Binomial θ, maka dapat diperoleh mean prior (μ) dan variansi prior (σ^2) berturut – turut sebagai berikut

$$E(\theta) = \mu = \frac{a}{a+b}$$

$$= \frac{1}{1+1}$$

$$= \frac{1}{2} = 0{,}5$$

dan

$$\mathrm{Var}(\theta) = \sigma^2 = \frac{ab}{(\alpha + b + 1)(a + b)^2}$$

$$= \frac{1.1}{(1+1+1)(1+1)^2}$$

$$= \frac{1}{3.2^2}$$

$$= \frac{1}{12} = 0{,}083.$$

- **Estimator Bayes dan Distribusi Posterior**

Diketahui prior $f(\theta) \sim$ Uniform (0.1) = Beta (1.1), dan $n = 24$ dan $x = 17$, maka distribusi posterior $f(\theta|x,n) \sim Beta\ (x+1, n-x+1)$, sehingga

$$f(\theta|x) \sim \text{Beta}\ (17+1, 24-17+1)$$

$$\sim \text{Beta}\ (18{,}8).$$

Berdasarkan persamaan (3.26), maka estimator Bayes untuk parameter θ dengan prior Uniform (0.1) adalah

$$\hat{\theta}_B = \frac{x+a}{a+b+n}$$

Diketahui $a = 1$ dan $b = 1$, maka

$$\hat{\theta}_B = \frac{x+1}{2+n}$$

$$= \frac{17+1}{24+2}$$

$$= 0.6923077.$$

Sehingga proporsi dapat dikatakan orang terjangkit polio di Guetemala adalah 69.23077%.

- **Nilai Ekspektasi dan Variansi Posterior**

Jika $a' = x + a = 18$ dan $b' = n - x + b = 8$, dengan menggunakan persamaan (3.28) dan (3.29), maka mean dan variansi dari ditribusi posterior $(f(\theta|x)$ adalah

$$E(\theta|x) = m' = \frac{a'}{a'+b'}$$

$$= \frac{18}{18+8}$$

$$= 0.6923077$$

$$Var(\theta|x) = s' = \frac{a'b'}{(a'+b')^2(a'+b'+1))}$$

$$= \frac{18(8)}{(18+8)^2(18+8+1)}$$

$$= 0.007889546$$

- ***Mean Square Eror (MSE)***

Berdasarkan persamaan (3.30) *Mean Square Error*(MSE), estimator dapat diperoleh dengan

$$E(\hat{\theta}_B - \theta)^2 = \frac{n\theta(1-\theta)}{(a+b+n)^2} + \left(\frac{n\theta + a}{a+b+n} - \theta\right)^2$$

Karena θ merupakan proporsi Binomial, maka

$$\theta = \frac{x}{n}$$

$$= \frac{17}{24}$$

$$= 0.7083333 \sim 0.7$$

Dan distribusi prior yang digunakan adalah Beta(1,1) dengan $a = b = 1$, maka

$$E(\hat{\theta}_B - \theta)^2 = \frac{24 * 0.7(1 - 0.7)}{(1 + 1 + 24)^2} + \left(\frac{24 * 0.7 + 1}{1 + 1 + 24} - 0.7\right)^2$$

$$= \frac{5.04}{676} + \left(\frac{17.8}{26} - 0.7\right)^2$$

$$= 0.00745562 + 0{,}0002366863$$

$$= 0{,}00769230$$

- **Interval Konfidensi Bayes**

Jika $a' = x + a$ = x + 1 = 17 + 1 = 18 dan $b' = n - x + b = 24 - 17 + 1 = 8.$ Diketahui mean distribusi posterior $m' = \frac{a'}{a' + b'} = \frac{x+a}{n+a+b} = 0.6923077$, dan variansi posterior adalah $(s')^2 = \frac{a'b'}{(a'+b')^2(a'+b'+1)} = 0.00788954$. Berdasarkan persamaan (3.39), maka interval konfidensi$(1-\alpha)100\%$ untuk θ diaproksimasi ke

$$m' \pm Z_{\frac{\alpha}{2}} . s'$$

sehingga

$$\left[m' - Z_{\frac{\alpha}{2}}.s' < \hat{\theta}_B < m' + Z_{\frac{\alpha}{2}}.s'\right].$$

Dengan mengambil taraf signifikansi $\alpha = 0.05$, dengan $a' = 18$, $b' = 8$ dan $Z_{\alpha/2} = Z_{0,05/2} = 1.96$, maka interval konfidensi$(1 - \alpha)100\%$ untuk $\hat{\theta}_B$ adalah

$$\left[0.6923077 - 1.96 * 0.007889546 < \hat{\theta}_B < 0.6923077 + 1.96 * 0.007889546\right]$$

$$\left[0.6768442 < \hat{\theta}_B < 0.7077712\right].$$

Dapat disimpulkan bahwa proporsi orang terjangkit polio di Guetemala adalah antara 67.68442% dan 70.77712%.

➢ **Uji Hipotesis Bayes**

Misalkan akan diuji hipotesis

$$H_0 : \theta = 0.6768442$$

$$H_1 : \theta \neq 0.6768442$$

Taraf signifikansi $\alpha = 0{,}05$

$$Z = \frac{(m' - \theta_0)}{s'}$$

H_0 ditolak apabila Z > $Z_{\alpha/2}$ atau Z < $Z_{-\alpha/2}$, dengan $\theta_0 = 0.6768442$, $\hat{\theta}_B = m' = 0.6923077$ dan $s' = \mathrm{Var}(\theta|x) = 0.007889546$, maka

$$Z = \frac{(0.6923077 - 0.6768442)}{0.007889546}$$

$$= 1.959999$$

Karena $Z_{\alpha/2} = Z_{0.5/2} = Z_{0.25} = 1.96$ (Lampiran 2), dan $Z < Z_{0.25}$, maka tolak H_0, sehingga data tidak mempunyai cukup bukti untuk menyatakan bahwa : $\theta \neq 0.6923077$.

- **Inferensi dengan Estimator Klasik**

Jika digunakan MLE untuk mengestimasi proporsi Binomial θ, maka berdasarkan persamaan (3.40) diperoleh bahwa

$$\hat{\theta} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \frac{x}{n}.$$

Diketahui bahwa *x* = 17 dan n = 24, maka Estimator Maximum Likelihoodnya (MLE) adalah

$$\hat{\theta} = \frac{x}{n}$$

$$= \frac{17}{24}$$

$$= 0.708333 \sim 0.7$$

maka dengan MLE disimpulkan bahwa proporsi orang terjangkit polio diguetamala adalah 70%.

- **Niai Ekspektasi Dan Variansi**

Nilai ekspektasi dan variansi adalah

$$E(X) = n\hat{\theta}$$

$$= 24 * 0.7 = 17$$

dan

$$Var(X) = n\hat{\theta}(1 - \hat{\theta})$$

$$= 24 * 0.7(1 - 0.7)$$

$$= 5.1$$

- ***Mean Square Error*(MSE)**

Berdasarkan persamaan (3.4.1) maka diperoleh *Mean Square Error* (MSE) dari MLE adalah

$$MSE(\hat{\theta}) = Var\,(\hat{\theta})$$

$$= \frac{\theta(1-\theta)}{n}$$

$$= \frac{0.7(1-0.7)}{24}$$

$$= \frac{0.21}{24}$$

$$= 0.857$$

- **Interval Konfidensi**

Interval konfidensi untuk θ dengan koefisien konfidensi $1-\ \alpha$ dinyatakan dengan

$$\left[\hat{\theta} - Z_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{\theta}(1-\ \hat{\theta})}{n}} < \ \hat{\theta} < \hat{\theta} + \ Z_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{\theta}(1-\ \hat{\theta})}{n}}\right]$$

$$\left[0.7 - 1.96\ \sqrt{\frac{0,7(1-\ 0,7)}{24}} < \ \hat{\theta} < 0.7 + 1.96\ \sqrt{\frac{0.7(1-\ 0.7)}{24}}\right]$$

$$[0.7 - 0.183341 < \ \hat{\theta} < 0.7 + 0.183341]$$

$$[0.516659 < \ \hat{\theta} < 0.883341212]$$

Maka dapat disimpulkan dengan MLE bahwa proporsi orang terjangkit polio di Guetemala adalah antara 51% dan 88%.

- **Uji hipotesis**

Misalkan akan diuji hipotesis

$$H_0 :\ \theta =\ 0.65$$

$H_1 : \theta \neq 0.65$

Taraf signifikansi $\alpha = 0{,}05$

Kriteria uji:

Jika $\hat{\theta} = 0.7, \theta_0 = 0.65$ dan n = 24, maka kriteria ujinya adalah tolak H_0 jika

$$z_0 = z_0 = \frac{\hat{\theta} - \theta_0}{\sqrt{\theta_0(1 - \theta_0)/_n}} \sim N(0,1)$$

$> Z\alpha/_2$

Karena

$$Z = \frac{0.7 - 0.65}{\sqrt{0.65(1 - 0.65)/_{24})}}$$

$$= 0.5135526$$

Dan $Z\alpha/_2 = Z_{0.25} = 1.96$ (Lampiran 2) maka $Z < Z\alpha/_2$, maka tolak H_0. Sehingga dengan estimator MLE dikatakan bahwa data tidak mempunyai cukup bukti untuk menyatakan bahwa $\theta = 0.65$

Dari Ketiga estimator yang diperoleh dapat dicari estimator yang terbaik berdasarkan kriteria-kriteria tertentu, maka hasil dari analisis permasalahan contoh diatas dapat dilihat perbandingan dari ketiga estimator diatas dalam tabel berikut

Tabel 3.2

Tabel Hasil Perbandingan 3 Estimator dari Contoh Permasalahan

kriteria	**Estimator Bayes Dengan Prior Beta**	**Estimator Bayes Dengan Prior Uniform**	**Estimator Maximum Likelihood(Estimator Proporsi)**
Estimator	0,7083384	0,6923	0,7
Mean			
1. prior	0,7083436	0,5	17
2.posterior	0,0.7083384	0,6923077	
Variansi			
1.prior	0,008608157	0,083	5,1
2.posterior	0,004304095	0,007889546	
Sifat Ketakbiasan	Biased	Biased	unbiased
Mean Square Error	0,006364636	0,00769230	0,857
Interval Konfidensi	[0,6999024 $<\hat{\theta}_B <$ 0,0.7167744	0,67432 $< \hat{\theta}_B <$ 0,70568	0,516659 $< \hat{\theta} <$ 0,883341211

Dari tabel 3.2, terlihat bahwa walaupun estimator Bayes bukan merupakan estimator yang bias untuk parameter θ dari distribusi Binomial, namun *Mean Square Error* (MSE) dari estimator Bayes lebih kecil dari pada estimator maximum likelihood, sehingga dapat dikatakan bahwa estimator Bayes menghasilkan estimator yang baik untuk parameter θ jika MSE dari estimator sebagai ukuran kebaikannya.

BAB IV

KESIMPULAN

Dari pembahasan pada bab III maka dapat diambil kesimpulan sebagai berikut:

1. Distribusi posterior dibentuk dari distribusi sampel dan distribusi awal (prior). Dalam kasus ini distribusi sampel yang digunakan adalah distribusi Binomial. Sedangkan distribusi priornya $f(\theta)$ adalah prior konjugat.
2. Densitas Beta dapat digunakan sebagai prior konjugat untuk Binomial karena distribusi Beta dan distribusi Binomial memiliki kesamaan bentuk fungsional likelihood.
3. Distribusi posterior yang diperoleh dengan prior Beta bisa dinyatakan dalam distribusi Beta $(x + a, n - x + b)$ dengan θ merupakan variabel dan x adalah nilai dari hasil percobaan atau observasi. Dengan distribusi posterior tersebut dapat diperoleh estimator Bayes parameter proporsi Binomial θ jika dinyatakan sebagai $\hat{\theta}_B$ dapat dirumuskan sebagai

   $$\hat{\theta}_B = \frac{x + a}{a + b + n}$$

4. Distribusi posterior yang diperoleh dengan prior Uniform bisa dinyatakan dalam distribusi Beta $(x + 1, n - x + 1)$, dan estimator Bayes $\hat{\theta}_B$ untuk parameter proporsi Binomial dengan prior Uniform[0,1] dinyatakan sebagai

$$\widehat{\theta}_{\mathrm{B}} = \frac{x+1}{n+2}$$

5. Estimator Bayes biasanya merupakan estimator yang bias untuk parameter proporsi Binomial θ, namun variansi dan *Mean Square Error* (MSE) dari estimator bayes lebih kecil dari pada estimator maximum likelihood, ini dapat menyatakan sebagai sebuah keunggulan tersendiri dari estimator Bayes bahwa estimator Bayes menghasilkan estimator yang baik untuk parameter θ jika MSE dan Variansi yang menjadi ukuran kebaikanya.

DAFTAR PUSTAKA

Bain, L.J and Engelhardt, M. 1992. *Introduction to Probability and Mathematical Statistics.* Second Edition. Duxbury Press; California

Berger,C, 1990. *Statistical Inference*. Pasific Grove; New York

Bolstad, W.M. 2007. *Introduction to Bayesian Statistics Second Edition*. A John Wiley & Sons. Inc; America

Box, G.E.P and Tiao, G.C. 1973. *Bayesian Inference In Statistical Analysis.* Addision-Wesley Publishing Company, Inc; Philippines

Elfa, P.D.S 2009. Skripsi. *Penentuan Estimasi Interval dari Distribusi Normal dengan Metode Bayes*. Program Studi Statistika Jurusan Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Diponegoro; Semarang

Freund, J.E 1992. *Mathematical Statistics*. Fifth Edition. A Simon & Schuster Company; New Jersey.

Montgomery, D.C and Runger, G.C. 2003. *Applied Statistics and Probability for Engineers: Third Edition*. John Wiley & Sons, Inc.

Mustafid. 2003. *Statistika Elementer*. Universitas Diponegoro; Semarang

Soejoeti, Z dan Soebanar. 1988. *Inferensi Bayesian.* Karunika Universitas Terbuka; Jakarta

Spiegel, M.R, Schiller, J.J dan Srinivasan, R.A. 2004. *Probabilitas dan Statistik.* Alih bahasa oleh Wiwit, K dan Irzam H. Jakarta; Erlangga.

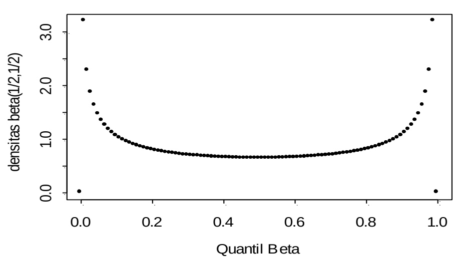
Walpole, R .E dan Myers, R. H. 1995. *Ilmu Peluang dan Statistika untuk Insinyur dan Ilmuwa Edisi ke - 4*. Alih bahasa oleh Sembiring, R.K. Penerbit ITB; Bandung.

Widiharih T dan Suparti. 2003. *Statistika Matematika II*. Universitas Diponegoro; Semarang

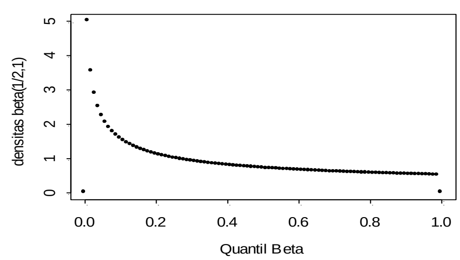
_______. 2006. *Binomial Proportion Confidence Interval.* www.wikipedia.org, (Diakses pada tanggal 10 Maret 2011).

LAMPIRAN 1

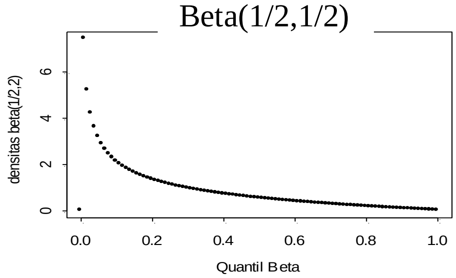
Tabel grafik distribusi Beta(a,b)



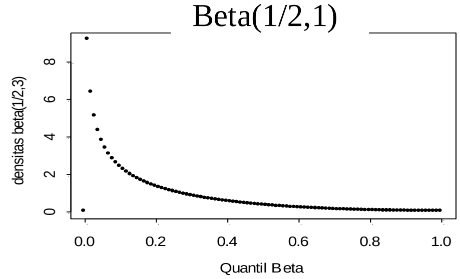
Beta(1/2,1/2)



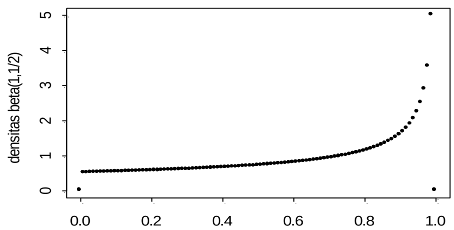
Beta(1/2,1)



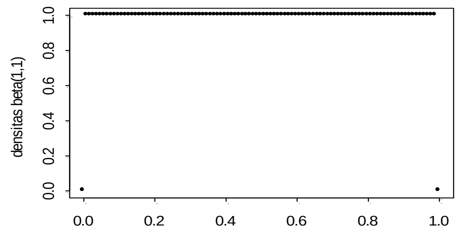
Beta(1/2,2)



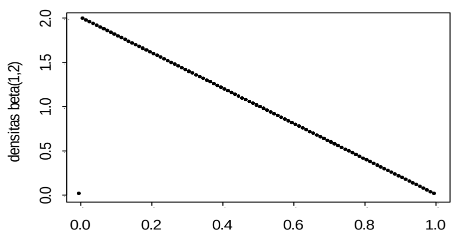
Beta(1/2,3)



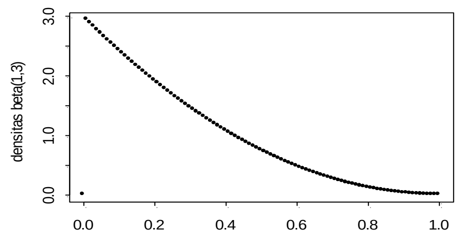
Beta(1,1/



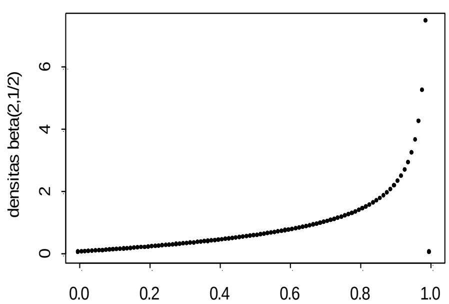
Beta(1,1



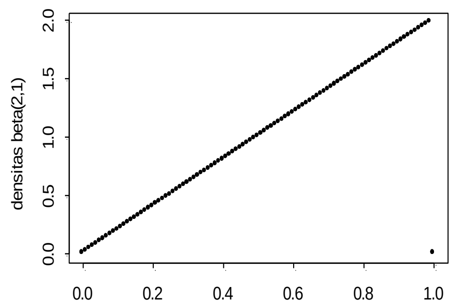
Beta(1,2)



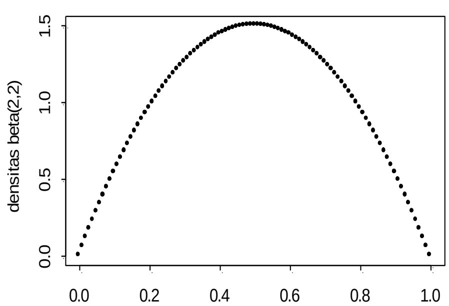
Beta(1,3)



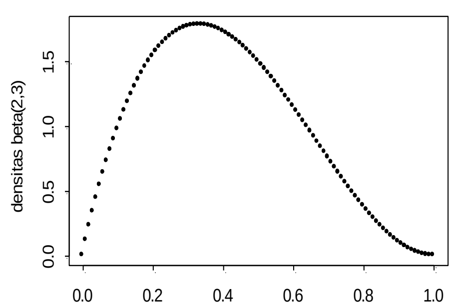
Beta
(2,1/2)



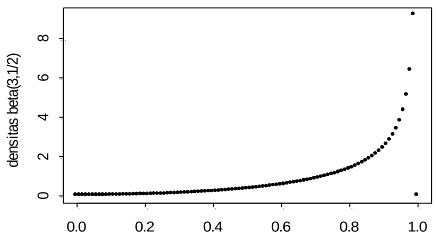
Beta
(2,1)



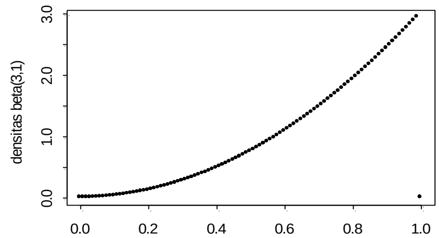
Beta(2,2
)



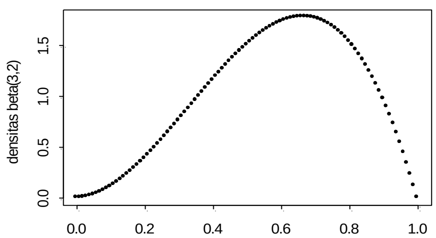
Beta(2,3
)



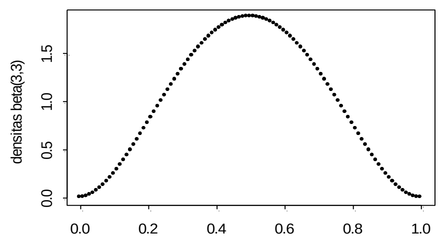
Beta(3,1/2



Beta(3,1)



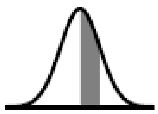
Beta(3,2)



Beta(3,3)

LAMPIRAN 2

Tabel Normal Standar $N(\mu = 0, \sigma^2 = 1)$



z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0.0	0.0000	0.0040	0.0080	0.0120	0.0160	0.0199	0.0239	0.0279	0.0319	0.0359
0.1	0.0398	0.0438	0.0478	0.0517	0.0557	0.0596	0.0636	0.0675	0.0714	0.0753
0.2	0.0793	0.0832	0.0871	0.0910	0.0948	0.0987	0.1026	0.1064	0.1103	0.1141
0.3	0.1179	0.1217	0.1255	0.1293	0.1331	0.1368	0.1406	0.1443	0.1480	0.1517
0.4	0.1554	0.1591	0.1628	0.1664	0.1700	0.1736	0.1772	0.1808	0.1844	0.1879
0.5	0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088	0.2123	0.2157	0.2190	0.2224
0.6	0.2257	0.2291	0.2324	0.2357	0.2389	0.2422	0.2454	0.2486	0.2517	0.2549
0.7	0.2580	0.2611	0.2642	0.2673	0.2704	0.2734	0.2764	0.2794	0.2823	0.2852
0.8	0.2881	0.2910	0.2939	0.2967	0.2995	0.3023	0.3051	0.3078	0.3106	0.3133
0.9	0.3159	0.3186	0.3212	0.3238	0.3264	0.3289	0.3315	0.3340	0.3365	0.3389
1.0	0.3413	0.3438	0.3461	0.3485	0.3508	0.3531	0.3554	0.3577	0.3599	0.3621
1.1	0.3643	0.3665	0.3686	0.3708	0.3729	0.3749	0.3770	0.3790	0.3810	0.3830
1.2	0.3849	0.3869	0.3888	0.3907	0.3925	0.3944	0.3962	0.3980	0.3997	0.4015
1.3	0.4032	0.4049	0.4066	0.4082	0.4099	0.4115	0.4131	0.4147	0.4162	0.4177
1.4	0.4192	0.4207	0.4222	0.4236	0.4251	0.4265	0.4279	0.4292	0.4306	0.4319
1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394	0.4406	0.4418	0.4429	0.4441
1.6	0.4452	0.4463	0.4474	0.4484	0.4495	0.4505	0.4515	0.4525	0.4535	0.4545
1.7	0.4554	0.4564	0.4573	0.4582	0.4591	0.4599	0.4608	0.4616	0.4625	0.4633
1.8	0.4641	0.4649	0.4656	0.4664	0.4671	0.4678	0.4686	0.4693	0.4699	0.4706
1.9	0.4713	0.4719	0.4726	0.4732	0.4738	0.4744	0.4750	0.4756	0.4761	0.4767
2.0	0.4772	0.4778	0.4783	0.4788	0.4793	0.4798	0.4803	0.4808	0.4812	0.4817
2.1	0.4821	0.4826	0.4830	0.4834	0.4838	0.4842	0.4846	0.4850	0.4854	0.4857
2.2	0.4861	0.4864	0.4868	0.4871	0.4875	0.4878	0.4881	0.4884	0.4887	0.4890
2.3	0.4893	0.4896	0.4898	0.4901	0.4904	0.4906	0.4909	0.4911	0.4913	0.4916
2.4	0.4918	0.4920	0.4922	0.4925	0.4927	0.4929	0.4931	0.4932	0.4934	0.4936
2.5	0.4938	0.4940	0.4941	0.4943	0.4945	0.4946	0.4948	0.4949	0.4951	0.4952
2.6	0.4953	0.4955	0.4956	0.4957	0.4959	0.4960	0.4961	0.4962	0.4963	0.4964
2.7	0.4965	0.4966	0.4967	0.4968	0.4969	0.4970	0.4971	0.4972	0.4973	0.4974
2.8	0.4974	0.4975	0.4976	0.4977	0.4977	0.4978	0.4979	0.4979	0.4980	0.4981
2.9	0.4981	0.4982	0.4982	0.4983	0.4984	0.4984	0.4985	0.4985	0.4986	0.4986
3.0	0.4987	0.4987	0.4987	0.4988	0.4988	0.4989	0.4989	0.4989	0.4990	0.4990
3.1	0.4990	0.4991	0.4991	0.4991	0.4992	0.4992	0.4992	0.4992	0.4993	0.4993
3.2	0.4993	0.4993	0.4994	0.4994	0.4994	0.4994	0.4994	0.4995	0.4995	0.4995
3.3	0.4995	0.4995	0.4995	0.4996	0.4996	0.4996	0.4996	0.4996	0.4996	0.4997
3.4	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4998