JURNAL MATEMATIKA DAN KOMPUTER
Vol. 4. No. 3, 160 - 166, Desember 2001, ISSN : 1410-8518

EFEK DISKRITASI METODE GALERKIN SEMI DISKRET TERHADAP AKURASI DARI SOLUSI MODEL RAMBATAN PANAS TANPA SUKU KONVEKSI

Kushartantya dan Awalina Kurniastuti
Jurusan Matematika F.MIPA UNDIP

Abstrak

Penelitian ini bertujuan menyelidiki efek diskretisasi terhadap akurasi dari solusi model rambatan panas tanpa suku konveksi menggunakan diskretisasi perubah ruang metode Galerkin Semi Diskret. Dalam penelitian ini sebagai indicator akurasi diambil nilai error (error maksimum). Untuk menentukan akurasi tersebut sebagai pembanding digunakan diskretisasi perubah ruang metode Beda Hingga. Permasalahan yang akan diteliti disini adalah bagaimana mentransformasikan model rambatan panas tanpa suku konveksi kebentuk sistem persamaan diferensial ordiner dengan melakukan diskretisasi pada perubah ruang dengan menggunakan metode Galerkin Semi Diskret. Selanjutnya system persamaan diferensial ordiner yang diperoleh dari diskretisasi tersebut diintegrasikan dengan menggunakan metode Runge Kutta Implisit Diagonal (RKID). Error diperoleh dari selisih solusi persamaan diferensial ordiner dengan solusi sebenarnya yang dihitung pada titik yang sesuai. Hasil pengukuran menunjukkan bahwa solusi model rambatan panas tanpa suku konveksi yang diperoleh berdasarkan diskretisasi, perubah ruang menggunakan metode Galerkin Semi Diskret relatif lebih akurat dibandingkan dengan solusi yang diperoleh dengan diskretisasi perubah ruang menggunakan metode Beda Hingga.

Kata Kunci : Diskretisasi, Metode Galerkin Semi Diskret, model rambatan panas, error, akurasi.

1. PENDAHULUAN

Model rambatan panas secara matematis dapat dinyatakan dalam bentuk persamaan diferensial parsial. Model tersebut sering digunakan dalam berbagai disiplin ilmu, misalnya fisika, kimia, biologi dan lain sebagainya.

Penyelesaian model rambatan panas dapat dilakukan dengan secara analitik maupun secara numerik dengan bantuan komputer. Penyelesaian secara analitik sering lebih sulit disbanding penyelesaian secara numeric, oleh karena itu penyelesaian model rambatan panas ini dilakukan secara numeric

Secara numeric, salah satu metode untuk menyelesaikan model rambatan panas tanpa suku konveksi yang ingin digunakan dalam kajian ini adalah dengan diskretisasi perubah ruang yang dilajutkan dengan integrasi terhadap waktu. Salah satu metode diskretisasi perubah ruang yang digunakan dalam kajian ini adalah metode Galerkin Semi diskret (Mitchell A. R,1985), sedangkan untuk integrasi hasil diskretisasi digunakan metode Runge Kutta Implisit Diagonal (disingkat dengan RKID), komputasi dilakukan dengan perubahan ukuran langkah (*step-size*). Ukuran langkah adalah panjang langkah yang digunakan oleh suatu program untuk melakukan suatu komputasi.

Permaslahan yang akan diteliti disini adalah bagaimana mentransformasikan model rambatan panas dalam bentuk persamaan parabolic ke bentuk system persamaan diferensial ordiner dengan melakukan diskretisasi perubah ruang dengan metode Galerkin Semi Diskret. Selanjutnya dilakukan integrasi system persamaan diferensial ordiner yang diperoleh dari diskretisasi model rambatan panas tanpa suku konveksi menggunakan metode RKID dengan perubahan ukuran langkah. Untuk mendapatkan error dapat diperoleh dengan melakukan pengurangan solusi system persamaan diferensial ordiner dengan solusi sebenarnya yang diambil pada titik yang sesuai.

Tujuan penelitian adalah menyelidiki akurasi dari solusi model rambatan panas tanpa suku konveksi yang diperoleh berdasarkan diskretisasi perubah ruang metode Galerkin Semi Diskret.

2. LANDASAN TEORI

2.1 Metode Galerkin Semi Diskret

Metode Galerkin Semi Diskret adalah suatu metode diskretisasi perubah ruang dari suatu persamaan diferensial parsial, disini persamaan parabolik. Dengan

JURNAL MATEMATIKA DAN KOMPUTER
Vol. 4. No. 3, 160 - 166, Desember 2001, ISSN : 1410-8518

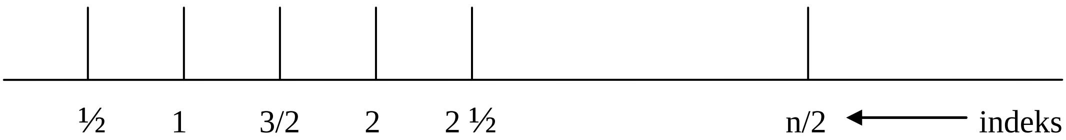
metode Galerkin Semi Diskret, persamaan parabolic dapat ditransformasikan ke system persamaan diferensial ordiner. Dalam penelitian ini dikaji salah satu model rambatan panas tanpa suku konveksi yang disajikan dalam bentuk persamaan parabolic. Berikut akan dibahas mengenai diskretisasi model rambatan panas tanpa suku konveksi dengan menggunakan metode Galerkin Semi Diskret.

Pandang model rambatan panas tanpa suku konveksi dalam bentuk :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

dengan syarat batas, Dirichlet (Farlow,1982),

Persamaan (1) terdefinisi pada interval [0,1]. Jika h adalah langkah ruang yang membagi interval [0,1] menjadi (n+1)/2 sub-interval bagian yang sama dengan h = 2/(n+1), dan jika setiap sub-interval dibagi 2 dan titik ini diberi indeks tengahan maka dalam interval [0,1] terdapat n titik interior.



Gambar 1 : n titik interior dalam interval [0,1] dengan indeks tengahan dan indeks bilangan bulat.

Jika U(x,t) adalah pendekatan Galerkin untuk u(x,t), u(x,t) adalah solusi sebenarnya dari model rambatan panas maka U(x,t) dapat ditulis sebagai :

$$U(x,t) = \sum_{i=0}^{n+1} U_i\,(t)\; Q_i\,(x) \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (2)$$

Dengan $Q_i\ (x)$ merupakan fungsi basis dalam bentuk kuadratik (Mitchell A.R, 1985)

Dari persamaan (1) dan (2) diperoleh :

$$\sum_{i=0}^{n+1} U_t\,(Q_i, Q_{,i}\,) = \sum_{i=0}^{n+1} U_t\,(\,Q_i\;Q_j\,) \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots..(3)$$

dengan

$(Q_i, Q_{,i})$ adalah inner product dari Q_i dan Q_j

$Q`_j$ adalah turunan Q_j terhadap perubah x

U_t adalah turunan dari U terhadap perubah t

Jika M dan S adalah matriks yang elemen ke ij nya masing-masing adalah $(Q_i, Q_{,i})$ dan $(Q`_i, Q`_{,i})$ maka persamaan (3) dapat dinyatakan sebagai

$M\,\underline{U} = S\,\underline{U} + \underline{b}$ ……………………….(4)

dengan

$\underline{U} = [\,U_1, U_2, U_3, \ldots U_n\,]^T$

$\underline{b}$ adalah vector yang memuat syarat batas

Jika diberikan 3 fungsi basis kuadratik yaitu $Q_1 = X(X-1)/2$, $Q_2 = -X^2 + 1$, $Q_3 = X(X+1)/2$

Maka diperoleh :

$$M = h\ /\ 30 \begin{bmatrix} 16 & 2 & 0 & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 0 \\ 2 & 8 & 2 & -1 & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & 2 & 16 & 2 & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 8 & 16 & 2 & -1 & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & \ldots & \ldots & 0 & 2 & 16 & 2 & 0 \\ 0 & \ldots & \ldots & \ldots & 0 & -1 & 2 & 8 & 2 \\ 0 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 0 & 2 & 16 \end{bmatrix}$$

$$S = 1\ /\ 3\ h \begin{bmatrix} -16 & 8 & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 0 \\ 8 & -14 & 8 & -1 & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & 8 & -16 & 8 & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & -1 & 8 & -14 & 8 & -1 & \ldots & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 0 & 0 & 8 & -16 \end{bmatrix}$$

2.2 Metode Runge Kutta Implisit Diagonal

Persamaan (4) yang merupakan system persamaan diferensial ordiner dapat diselesaikan dengan RKID yang memiliki notasi Butcher berikut :

JURNAL MATEMATIKA DAN KOMPUTER
Vol. 4. No. 3, 160 - 166, Desember 2001, ISSN : 1410-8518

½	½			
1	0	1		
½	3/2	-3/2	½	
0	-3	2	0	
	1/6	1/3	1/6	1/3

Dengan perhitungan :

$$k_i = f(t + c_i\ h, u + h \sum_{j=1}^{i} a_{ij}\ k_j\ )$$

Untuk mencari solusi

$$U_{n+1} = U_n + h \sum_{i=1}^{4} b_i\ k_j\ )$$

U_{n+1} adalah solusi pada t ke m+1 (Conte SD, 1980)

Untuk menyelesaikan persamaan (4) dapat digunakan algoritma berikut :

1. Inisialisasi
2. Panggil RKID 4 tahap untuk mendapatkan solusi dengan langkah h, namakan U_1
3. Panggil RKID 4 tahap untuk mendapatkan solusi dengan langkah h/2, namakan U_2
4. Jika $\| U_1 - U_2 \| > tol$

   Jika h > 2 * h_{min} maka $h_{baru} = h_{lama}/2$

   Kembali ke langkah 2 dengan hbaru sampai t tertentu tercapai

   Jika h < 2 * h_{min} maka program dihentikan
5. Jika $\| U_1 - U_2 \| > tolmin$

   Jika 2 *h < h_{min} maka $h_{baru} = h_{lama} * 2$

   Kembali ke langkah 2 dengan h_{baru} sampai t tertentu tercapai
6. Jika tolmin < $\| U_1 - U_2 \|$ < tol, maka kembali ke langkah 2 dengan $h_{baru} = h_{lama}$ sampai t tertentu tercapai
7. Stop jika t_{akhir} tercapai.

Algoritma tersebut di atas diimplementasikan menggunakan perangkat lunak Matlab dan perangkat keras Pentium 166 MMX

3. HASIL PENGUKURAN DAN PEMBAHASAN

Dalam penelitian ini dikaji akurasi dari solusi model rambatan panas tanpa suku konveksi, dengan melakukan integrasi system persamaan diferensial ordiner yang diperoleh dari diskretisasi perubah ruang metode Galerkin Semi Diskret terhadap model rambatan panas tanpa suku konveksi, dengan syarat awal $U(x,0) = \exp(x/\sqrt{6})$ dan syarat batas Dirichlet, yaitu :

Nilai error diperoleh dari selisih solusi rambatan panas yang didiskretisasi berdasar Metode Galerkin Semi Diskret dengan solusi sebenarnya dari model rambatan panas.

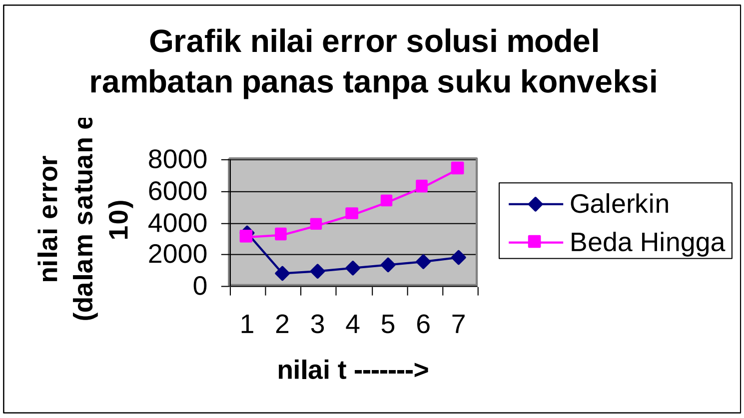
Pengukuran dilakukan dengan mengambil banyak diskretisasi yaitu n = 39 dengan toleransi 10^4. Pengamatan dilakukan pada t = 1, 2, 3,…..,7. Hasil pengukuran dapat ditunjukkan pada tabel 1 berikut :

t_{satuan}	Nilai error	
	Galerkin	Beda Hingga
1	$0{,}32620e^{-6}$	$0{,}30000e^{-6}$
2	$0{,}7660\ e^{-7}$	$0{,}3180\ e^{-6}$
3	$0{,}9050\ e^{-7}$	$0{,}3750\ e^{-6}$
4	$0{,}1069\ e^{-6}$	$0{,}4430\ e^{-6}$
5	$0{,}1263\ e^{-6}$	$0{,}5240\ e^{-6}$
6	$0{,}1492\ e^{-6}$	$0{,}6190\ e^{-6}$
7	$0{,}1763\ e^{-6}$	$0{,}7310\ e^{-6}$

Hasil pengukuran pada tabel 1 dapat ditunjukkan bahwa : error disetiap t dari solusi model rambnatan panas yang diakibatkan oleh distkretisasi perubah ruang metode Galerkin Semi Diskret lebih kecil dibandingkan dengan error disetiap t dari solusi model rambatan panas tanpa suku konveksi yang diakibatkan oleh

JURNAL MATEMATIKA DAN KOMPUTER
Vol. 4. No. 3, 160 - 166, Desember 2001, ISSN : 1410-8518

perubah ruang metode Beda Hingga. Untuk lebih menjelaskan hal tersebut dapat disajikan gambar berikut :



Gambar 1: Grafik Nilai Error Solusi Model Rambatan Panas

4. KESIMPULAN

Dari hasil pengukuran dan pembahasan dapat disimpulkan bahwa solusi model rambatan panas tanpa suku konveksi yang diperoleh berdasarkan diskretisasi perubah ruang menggunakan metode Galerkin Semi Diskret relatif akurat jika dibandingkan dengan solusi model rambatan panas tanpa suku konveksi yang diperoleh dengan diskretisasi perubah ruang menggunakan metode Beda Hingga. Hal tersebut dapat ditunjukkan berdasarkan nilai error disetiap t baik pada tabel 1 maupun pada gambar 1.

DAFTAR PUSTAKA

1. Conte S. D, Carl D B, *Elementary Numerical Analysis*, Third edition, Mc Graw-Hill, 1980.

2. Farlow S J, *Partial Differential Equations*, John Wiley & Son, New York, 1982.

3. Mitchell A. R, Griffiths DF, *The Finite Difference Methods in Partial Differential Equation*, John Willey and Son, New York, 1985.