

**APLIKASI METODE BESARAN PIVOTAL DALAM PENENTUAN
SELANG KEYAKINAN TAKSIRAN PARAMETER POPULASI.**

Agus Rusgiyono

Jurusan Matematika FMIPA UNDIP

Abstraks

Diberikan populasi dengan densitas $f(\bullet; \theta)$ dengan parameter θ , dan dari padanya diambil sample acak x_1, \dots, x_n . Selanjutnya taksiran titik $\tau(\theta)$ adalah suatu fungsi dari θ bernilai riil. Interval taksiran terhadap $\tau(\theta)$ berdasarkan taraf keyakinan $100\gamma\%$, dengan $0 < \gamma < 1$, ditentukan berdasarkan bantuan besaran pivotal $Q = \zeta(X_1, \dots, X_n; \theta)$ yang mempunyai distribusi tidak bergantung pada θ . Diketahui $T_1 = t_1(X_1, \dots, X_n)$ dan $T_2 = t_2(X_1, \dots, X_n)$ adalah dua statistik yang memenuhi $T_1 \leq T_2$ untuk mana $P_\theta(T_1 < \tau(\theta) < T_2) = \gamma$ dengan γ tidak bergantung pada θ , maka interval acak (T_1, T_2) adalah interval keyakinan $100\gamma\%$ untuk $\tau(\theta)$.

1. PENDAHULUAN

Sebuah masalah mendasar yang terkait dalam pengambilan sampel suatu populasi adalah membuat taksiran terhadap parameter baik taksiran titik maupun taksiran selang. Barangkali pula sering dipertanyakan berapa ukuran sampel agar diperoleh taksiran yang paling akurat, tentunya dengan panjang selang taksiran minimal (S.Nasution, 2001). Lebih-lebih dengan tidak diketahuinya nilai parameter populasi. Dari kondisi ini biasanya peneliti akan berusaha menaksir nilai parameter berdasarkan statistik dan berusaha mendapatkan selang kepercayaan terhadap taksiran tersebut dengan menggunakan suatu sampel minimal yang cukup.

Sering dipertanyakan oleh para peneliti pemula berapa ukuran sampel minimal yang cukup untuk dapat membuat selang keyakinan taksiran berdasarkan koefisien keyakinan γ . Demikian pula seberapa besar pengaruh bertambahnya

ukuran sampel terhadap berkurangnya panjang interval keyakinan (Scheffler, 1979).

Dalam membuat interval keyakinan taksiran parameter, salah satu cara yang dapat ditempuh adalah dengan bantuan besaran pivotal $Q = \zeta(X_1, \dots, X_n; \theta)$, di mana besaran ini mempunyai distribusi yang tidak bergantung pada parameter θ (Mood, 1974).

Sebagai contoh, misalkan x_1, \dots, x_n sample acak dari $f(x; \theta) = \Phi_{0,9}(x)$ maka $x - \theta$ adalah besaran pivotal karena

$\bar{x} - \theta \sim N(0, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$, demikian juga $\frac{(\bar{x} - \theta)}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ adalah besaran pivotal karena

berdistribusi $N(0,1)$. Di lain pihak $\frac{\bar{x}}{\theta}$ bukan besaran pivotal karena berdistribusi $N(0, \frac{\sigma}{\theta^2 \sqrt{n}})$ yang masih bergantung pada θ .

2. PEMBAHASAN

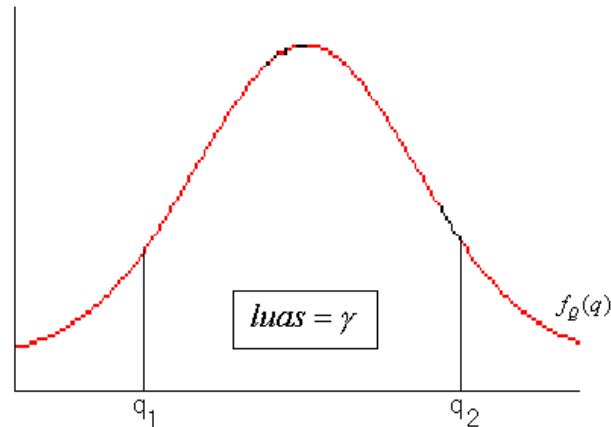
Jika diketahui x_1, \dots, x_n sample acak dari $N(\mu, \sigma^2)$ dengan σ^2 tidak diketahui. Selanjutnya $Q = \zeta(X_1, \dots, X_n; \theta)$, kuantitas pivotal dan mempunyai fungsi kepadatan probabilitas, maka untuk suatu $0 < \gamma < 1$ yang ditentukan, dapat ditemukan q_1 dan q_2 yang bergantung pada γ sedemikian hingga $P(q_1 < Q < q_2) = \gamma$.

Jika dari setiap nilai sampel x_1, \dots, x_n memungkinkan untuk mendapatkan $q_1 < \zeta(X_1, \dots, X_n; \theta) < q_2$, bila dan hanya bila $t_1(X_1, \dots, X_n) < \tau(\theta) < t_2(X_1, \dots, X_n)$ untuk suatu fungsi t_1 dan t_2 (yang tidak bergantung pada θ), maka (T_1, T_2) adalah selang kepercayaan $100\gamma\%$ untuk $\tau(\theta)$. Dimana $T_i = t_i(X_1, \dots, X_n), i = 1, 2, 3, \dots$ (Mood, 1974)

Berkenaan dengan ini ada tiga hal yang perlu di perhatikan :

Pertama, q_1 dan q_2 adalah tidak bergantung pada θ karena distribusi dari Q .

Kedua, untuk sembarang $0 < \gamma < 1$ yang ditetapkan, terdapat banyak kemungkinan pasangan bilangan q_1 dan q_2 yang dapat dipilih sehingga $P(q_1 < Q < q_2) = \gamma$.



Gambar 1.

Pasangan yang berbeda dari q_1 dan q_2 menghasilkan t_1 dan t_2 yang berbeda pula. Sehingga sebaiknya dipilih pasangan q_1 dan q_2 yang membuat pasangan t_1 dan t_2 tertutup satu sama lain secara bersama.

Untuk lebih jelasnya jika $t_2(X_1, \dots, X_n) - t_1(X_1, \dots, X_n)$ menyatakan panjang interval kepercayaan yang tidak acak, maka dipilih pasangan q_1 dan q_2 yang membuat panjang interval menjadi minimal. Atau jika panjang interval kepercayaan bersifat acak maka dipilih pasangan q_1 dan q_2 yang membuat rata-rata hitung dari panjang interval menjadi terkecil.

Ketiga, secara esensial bentuk metode kuantitas pivotal adalah bahwa ketidaksamaan $q_1 < \zeta(X_1, \dots, X_n; \theta) < q_2$ dapat ditulis kembali atau dapat diinversikan atau di "pivot" sebagai $t_1(X_1, \dots, X_n) < \tau(\theta) < t_2(X_1, \dots, X_n)$ untuk sembarang nilai sample x_1, \dots, x_n yang diperoleh. Pernyataan terakhir ini mengindikasikan bahwa "kuantitas pivotal" dapat saja tidak bermanfaat secara langsung, karena menurut definisi $Q = \zeta(X_1, \dots, X_n; \theta)$ dapat saja berupa besaran pivotal yang tidak mungkin dipivot terhadapnya.

Sebagai gambaran :

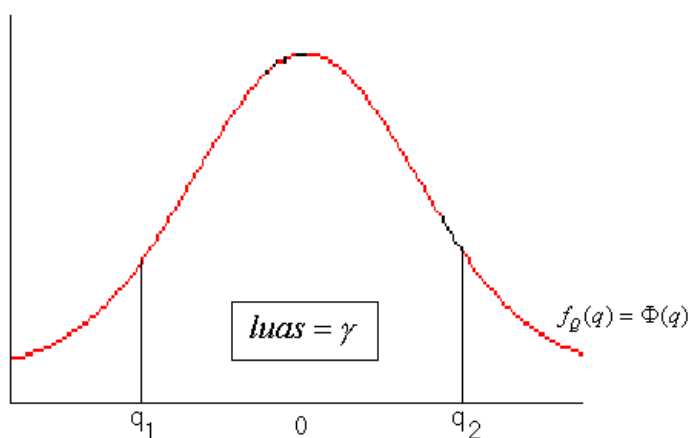
Misalkan x_1, \dots, x_n sample acak dari $f(x; \theta) = \Phi_{0,1}(x)$, untuk mengestimasi

$\tau(\theta) = \theta$, $Q = \zeta(X_1, \dots, X_n; \theta) = \frac{\bar{X} - \theta}{\sqrt{Y_n}} \sim N(0,1)$ sehingga merupakan besaran

pivotal $f_Q(q) = \Phi(q)$.

Untuk γ yang ditetapkan ada q_1 dan q_2 sedemikian sehingga

$$P(q_1 < Q < q_2) = \gamma.$$



Gambar 2.

selanjutnya :

$$\left\{ q_1 < \frac{\bar{X} - \theta}{\sqrt{Y_n}} < q_2 \right\} \Leftrightarrow \left\{ \bar{X} - q_2 \sqrt{Y_n} < \theta < \bar{X} - q_1 \sqrt{Y_n} \right\}$$

sehingga :

$(\bar{X} - q_2 \sqrt{Y_n}; \bar{X} - q_1 \sqrt{Y_n})$ adalah suatu interval keyakinan $100\gamma\%$ untuk θ .

Panjang interval ini adalah $(\bar{X} - q_1 \sqrt{Y_n}) - (\bar{X} - q_2 \sqrt{Y_n}) = (q_2 - q_1) \sqrt{Y_n}$

Sehingga panjang dapat dibuat menjadi minimal dengan memilih q_1 dan q_2

sehingga $q_2 - q_1$ menjadi minimal dibawah batasan syarat :

$$\gamma = P(q_1 < Q < q_2) = \Phi(q_2) - \Phi(q_1)$$

Selanjutnya dinyatakan bahwa $q_2 - q_1$ menjadi minimum jika $q_1 = -q_2$. (Sumargo, 1984).

2.1 EXISTENSI BESARAN PIVOTAL

Apakah besaran pivotal senantiasa ada untuk setiap kasus?

Jika x_1, \dots, x_n sample acak dari $f(\bullet; \theta)$, yang berkorespondensi dengan fungsi distribusi kumulatif $F(x; \theta)$ yang kontinu pada X maka dengan transformasi integral probabilitas, $F(x; \theta)$ mempunyai distribusi uniform pada interval (0,1).

Jadi $-\log F(x; \theta)$ mempunyai $e^{-u} I_{(0,1)}(u)$ karena

$$P[-\log F(X_i; \theta) \geq \mu] = P[-\log F(X_i; \theta) < -\mu]$$

$$= P[F(X_i; \theta) \leq e^{-\mu}] = e^{-\mu}, \quad u > 0$$

Akhirnya $-\sum \log F(X_i; \theta)$ mempunyai sebuah distribusi gamma dengan parameter n dimana :

$$P\left[-\log q_2 < -\sum_{i=1}^n \log F(X_i; \theta) < -\log q_1\right]$$

$$= \int_{-\log q_2}^{-\log q_1} \frac{1}{\Gamma(n)} z^{n-1} e^{-z} dz$$

$$= P\left[q_1 < \prod_{i=1}^n F(X_i; \theta) < q_2\right] \text{ untuk } 0 < q_1 < q_2 < 1 \dots \dots \dots (2.1.1)$$

Sehingga ;

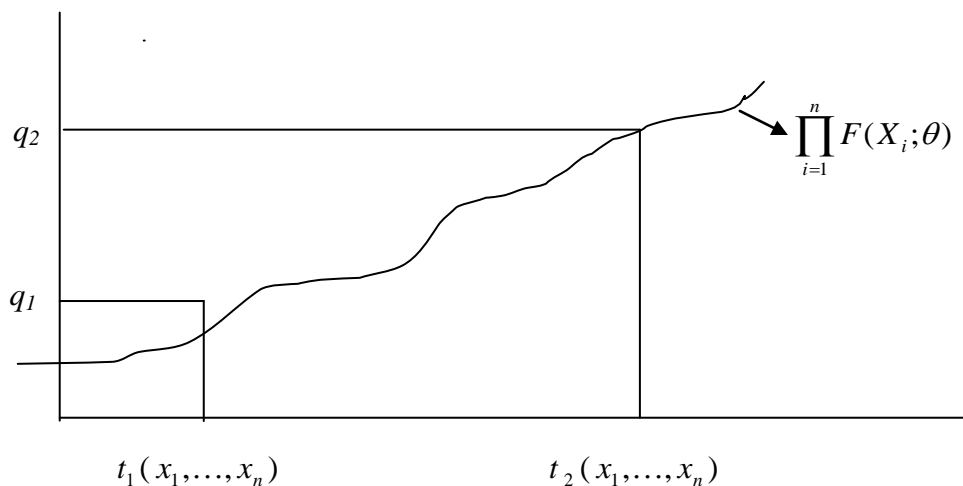
$$\prod_{i=1}^n F(X_i; \theta) \text{ atau } -\sum_{i=1}^n \log F(X_i; \theta) \text{ adalah besaran pivotal.}$$

Hasil ini menunjukkan bahwa pada sembarang waktu dimana sample dari suatu populasi mempunyai fungsi distribusi kumulatif kontinu maka besaran pivotal senantiasa ada.

Tetapi ini tidak memberi jaminan apakah besaran pivotal ini berguna bagi penyusunan interval.

2.2 JAMINAN DAPAT DIGUNAKANNYA BESARAN PIVOTAL

Selanjutnya jika $F(x; \theta)$ monoton dalam θ untuk setiap X maka $\prod_{i=1}^n F(X_i; \theta)$ juga monoton dalam θ untuk setiap x_1, \dots, x_n dan dengan sifat kemonotonan ini memungkinkan untuk mendapatkan interval keyakinan bagi θ .



Gambar : 3

Dapat dilihat bahwa $q_1 < \prod_{i=1}^n F(X_i; \theta) < q_2 \Leftrightarrow t_1(x_1, \dots, x_n) < \theta < t_2(x_1, \dots, x_n)$

dimana t_1 dan t_2 fungsi yang tidak bergantung pada θ .

2.3 INTERVAL KEYAKINAN UNTUK RATA-RATA PADA DISTRIBUSI NORMAL

Jika diketahui x_1, \dots, x_n sample acak dari $N(\mu, \sigma^2)$ dengan σ^2 tidak diketahui. Dalam kasus ini $\theta = (\mu, \sigma)$

Dan $\tau(\theta) = \mu$. Sedangkan kuantitas pivotal yang kita perlukan adalah

$$Q = \zeta(X_1, \dots, X_n; \theta) = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} \sim N(0, 1)$$

Tetapi $\{q_1 < \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} < q_2\}$ tidak dapat diinversikan untuk mendapatkan

$t_1(x_1, \dots, x_n) < \mu < t_2(x_1, \dots, x_n)$ untuk suatu statistik t_1 dan t_2 . Masalah ini muncul karena besaran $\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$ masih bergantung pada σ . Jadi diperlukan

besaran pivotal yang hanya bergantung μ saja. Seperti diketahui bersama bahwa $\frac{\bar{X} - \mu}{s/\sqrt{n}}$ berdistribusi student dengan derajat kebebasan $n-1$

Sehingga $\frac{\bar{X} - \mu}{s/\sqrt{n}}$ mempunyai densitas yang independen terhadap μ dan σ ,

maka juga merupakan besaran pivotal.

Sehingga sekarang diperoleh

$$\{q_1 < \frac{\bar{X} - \mu}{s/\sqrt{n}} < q_2\} \Leftrightarrow \left\{ \bar{X} - q_2 \frac{s}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} - q_1 \frac{s}{\sqrt{n}} \right\}$$

Dimana q_1 dan q_2 memenuhi persamaan $P\{q_1 < \frac{\bar{X} - \mu}{s/\sqrt{n}} < q_2\} = \gamma$ akibatnya

$\left\{ \bar{X} - q_2 \frac{s}{\sqrt{n}} ; \bar{X} - q_1 \frac{s}{\sqrt{n}} \right\}$ adalah interval kepercayaan $100\gamma\%$ untuk μ .

Panjang interval kepercayaan adalah $\frac{(q_2 - q_1)s}{\sqrt{n}}$ dan bersifat acak. Untuk

sembarang sampel yang diperoleh panjangnya dapat diminimalkan jika q_1 dan q_2 dipilih sehingga $q_2 - q_1$ minimal, dalam bentuk lain masalah ini dapat dinyatakan dalam :

Peminimalan fungsi $L = \frac{(q_2 - q_1)s}{\sqrt{n}}$ di bawah syarat

$$\int_{q_1}^{q_2} f_T(t) dt = \gamma \dots \dots \dots (2.3.1)$$

dimana $f_T(t)$ adalah densitas distribusi t dengan derajat kebebasan $n-1$.

Persamaan (2.3.1) memberikan q_2 sebagai suatu fungsi dari q_1 dan

pendiferensialannya terhadap q_1 menghasilkan $f_T(q_2) \frac{dq_2}{dq_1} - f_T(q_1) = 0$. Untuk

meminimalkan L diperlukan syarat $\frac{dL}{dq_1} = 0$ sehingga diperoleh

$$\frac{dL}{dq_1} = \frac{s}{\sqrt{n}} \left(\frac{dq_2}{dq_1} - 1 \right) = 0. \text{ Tetapi } \frac{s}{\sqrt{n}} \left(\frac{dq_2}{dq_1} - 1 \right) = \frac{s}{\sqrt{n}} \left(\frac{f_T(q_1)}{f_T(q_2)} - 1 \right) = 0$$

maka $f_T(q_1) = f_T(q_2) \Leftrightarrow q_1 = q_2$ atau $q_1 = -q_2$.

Jika $q_1 = q_2$ maka $\int_{q_1}^{q_2} f_T(t) dt \neq \gamma$. Jadi $q_1 = -q_2$ dipandang sebagai suatu solusi

dengan q_1 dan q_2 dapat diperoleh dari tabel distribusi student.

Kalau diperhatikan rumusan interval kepercayaan di atas bertalian dengan akar dari n berarti ada keuntungan yang menurun dalam usaha terus memperbesar ukuran sampel (Scheffler, 1979). Untuk menjelaskan ini andaikan ingin ditaksir rata-rata suatu populasi dengan kepercayaan 95 %. Untuk ini diambil tiga sampel, berturut-turut sebesar $n = 100, 1000$ dan 10.000 . Misalkan setiap sampel menghasilkan rata-rata sebesar 50 dengan simpangan baku 10. Jika dihitung selang kepercayaan 95 % untuk masing-masing sampel itu diperoleh :

$$48,04 < \mu < 51,96 \quad (n = 100)$$

$$49,37 < \mu < 50,63 \quad (n = 1000)$$

$$49,80 < \mu < 50,20 \quad (n = 10.000)$$

Jika diperhatikan ketiga taksiran memang memberikan taksiran yang lebih seksama. Misal peningkatan sampel dari 100 menjadi 1000 menghasilkan taksiran yang lebih pendek 2,66 selanjutnya peningkatan sampel menjadi dari 1000 menjadi 10.000 memperpendek taksiran 0,86 saja. Di sini perlu dipertanyakan apakah peningkatan keseksamaan ini ada keuntungannya dibanding pengelolaan sampel sebesar itu yang memerlukan tambahan biaya, waktu dan tenaga.

3. KESIMPULAN

Pada berbagai penelitian ukuran sampel yang makin besar justru menimbulkan banyak beban baik dari segi biaya, pengelolaan sampel yang membutuhkan banyak tenaga dan ketidaktelitian dalam pengamatan yang menjadi sumber bias yang justru akan menyesatkan kesimpulan. Sebaliknya pada setiap ukuran sampel yang diambil, interval taksiran parameter dengan koefisien kepercayaan yang ditetapkan dapat dibuat minimal. Interval kepercayaan sendiri dapat dibuat dengan bantuan besaran pivotal yang dijamin ada pada berbagai kasus asalkan x_1, \dots, x_n sample acak dari $f(\bullet; \theta)$, yang berkorespondensi dengan fungsi distribusi kumulatif $F(x; \theta)$ yang kontinu pada X dan besaran pivotal ini dapat digunakan untuk menyusun interval kepercayaan taksiran jika $F(x; \theta)$ monoton dalam θ untuk setiap X. Jadi dalam meningkatkan kualitas penelitian disarankan untuk berkonsentrasi pada setiap sampel yang diperoleh dan usaha menambah ukuran sampel perlu dipertimbangkan dengan efisiensi waktu, biaya, tenaga dan tujuan penelitian.

DAFTAR PUSTAKA

1. Mood, Alexander M, *Introduction to The Theory of Statistics*, Third Edition, Mc-Graw Hill, 1974.
2. Nasution S, *Metode Research*, PT. Bumi Aksara, 2001.
3. Scheffler, William C, *Statistics for the Biological Sciences*, Second edition, Addison - Wesley Publishing Company, 1979.
4. Sumargo Chr H, *Pendahuluan Teori Kemungkinan dan Statistika*, ITB, 1984.