BEBERAPA SIFAT SMALL RIEMANN SUMS FUNGSI TERINTEGRAL HENSTOCK-KURZWEIL DARI RUANG EUCLID $\mathfrak{R}^n$ KE RUANG BANACH $\mathcal{X}$

Siti Khabibah[1] dan Soeparna Darmawijaya[2]
[1]Program Studi Matematika FMIPA, Universitas Diponegoro
Jl. Prof. Soedarto, Tembalang-Semarang, 50275.
[2]Program Studi Matematika FMIPA, Universitas Gadjah Mada
Jl. Sekip Utara, Yogyakarta

Abstract : In this paper we discussed some properties of Henstock-Kurzweil integrable functions from the Euclidean Spaces $\mathfrak{R}^n$into Banach space $\mathcal{X}$, Locally Small Riemann Sums dan Globally Small Riemann Sums.

Keywords : Euclidean Spaces, Globally Small Riemann Sums, Henstock-Kurzweil, Locally Small Riemann Sums,.

1. PENDAHULUAN

Untuk memudahkan pembahasan selanjutnya, pada bagian ini terlebih dahulu diberikan beberapa definisi dan sifat-sifat untuk fungsi terintegral Henstock-Kurzweil yang bernilai Banach dan terdefinisi di ruang Euclide $\mathfrak{R}^n$.

Diberikan fungsi volume α pada $\mathfrak{R}^n$ dan sel $E \subset \mathfrak{R}^n$. Fungsi $\overline{f} : \mathfrak{R}^n \to \mathcal{X}$ dikatakan *terintegral-* α *Henstock* pada *E,* ditulis dengan $\bar{f} \in R^*(E, \mathcal{X}, \alpha)$, jika terdapat $\overline{a} \in \mathcal{X}$ dengan sifat untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ terdapat fungsi positif δ pada E sehingga untuk setiap partisi Perron δ-fine $\mathcal{D} = \{(D, \bar{x})\} = \{(D_i, \overline{x_i}) : i = 1,2, \dots r\}$
Pada E benar bahwa
$\|(\mathcal{D}) \sum \bar{f}(\bar{x})\alpha(D) - \bar{a}\| = \|\sum_{i=1}^{r} \bar{f}(\overline{x_i})\alpha(D_i) - \bar{a}\| < \varepsilon.$

Jika $\overline{f} \in R^*(E, \mathcal{X}, \alpha)$ dan $\mathcal{J}(E)$ koleksisemua sel di dalam E maka fungsi sel $\overline{F} : \mathcal{J}(E) \to \mathcal{X}$ dengan rumus $\overline{F}(I) = (R^*) \int_I \bar{f} \, d\, \alpha$ untuk setiap sel $I \in \mathcal{J}(E)$ disebut *Primitif Henstock-* α fungsi $\overline{f}$ pada *E.* Fungsi $\overline{f} \in R^*(E, \mathcal{X}, \alpha)$ jika dan hanya jika terdapat fungsi sel aditif $\bar{F} : \mathcal{J}(E) \to \mathcal{X}$ sehingga untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ terdapat fungsi positif δ pada E berlaku
$\|(\mathcal{D}) \sum \bar{f}(\bar{x})\alpha(D) - \bar{F}(E)\| = \|(\mathcal{D})\{\sum \bar{f}(\bar{x})\alpha(D) - \bar{F}(D)\}\| < \varepsilon$
untuk setiap partisi Perron δ-fine $\mathcal{D} = \{(D, \bar{x})\}$ pada E.

Selanjutnya untuk beberapa teorema dan definisi dalam tulisan ini dirujuk dari pustaka yang ada kemudian digeneralisasikan.

Untuk membuktikan ekuivalensi antara fungsi terintegral Henstock-Kurzweil dengan fungsi yang mempunyai sifat Small Riemann Sums diperlukan suatu criteria dan teorema berikut ini

Teorema 1.1 (Kriteria Cauchy) *Diberikan fungsi volume* α *pada* $\mathfrak{R}^n$ *, sel E* $\subset \mathfrak{R}^n$ *dan* $\mathcal{X}$ *ruang Banach.Fungsi* $\bar{f} \in R^*(E, \mathcal{X}, \alpha)$ *jika dan hanya jika untuk setiap bilangan* $\varepsilon > 0$ *terdapat fungsi positif* δ *pada E sehingga untuk setiap dua partisi* $\mathcal{D}_1 = \{(D, \bar{x})\}$ *dan* $\mathcal{D}_2 = \{(D, \bar{x})\}$ *pada E berlaku*
$$\left\|(\mathcal{D}_1) \sum \bar{f}(\bar{x})\alpha(D) - (\mathcal{D}_2) \sum \bar{f}(\bar{x})\alpha(D)\right\| < \varepsilon.$$

Teorema 1.2 *Diberikan fungsi volume* α *pada* $\mathfrak{R}^n$ *dan sel* $E \subset \mathfrak{R}^n$ *.Jika* $\bar{f} \in R^*(E, \mathcal{X}, \alpha)$ *dengan* $\bar{F}$ *sebagai primitifnya, maka untuk setiap bilangan* $\varepsilon > 0$ *terdapat fungsi positif* $\eta > 0$ *sehingga jika sel* $J \subset E$ *dengan* $\alpha(J) < \eta$ *berakibat*

$$\|\bar{F}(J)\| = \left\|(R^*)\int_J \bar{f}\, d\alpha\right\| < \varepsilon.$$

2. LOCALLY SMALL RIEMANN SUMS (LSRS)

Berikut diberikan definisi fungsi dari ruang Euclide $\Re^n$ keruang Banach $\mathcal{X}$ yang memiliki sifat Locally Small Riemann Sums dan beberapa teorema yang terkait dengan sifat Locally Small Riemann Sums.

Definisi 2.1 *Diberikan fungsi volume α pada $\Re^n$, sel $E \subset \Re^n$,dan fungsi $\bar{f} : \Re^n \to \mathcal{X}$. Fungsi $\bar{f}$dikatakan mempunyai sifat Locally Small Riemann Sums (LSRS) terhadap α pada sel E ditulis dengan $\bar{f} \in LSRS(E, \mathcal{X}, \alpha)$ jika$\bar{f}$ terukur-α dan untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$terdapat fungsi positif δpada E sehingga untuk setiap $\bar{y} \in E$ berlaku*

$$\left\|(\mathcal{D})\sum \bar{f}(\bar{x})\alpha(D)\right\| < \varepsilon$$

untuk setiap partisi Perron δ-fine $\mathcal{D} = \{(D, \bar{x})\}$ pada sel $C \subset B(\bar{y}, \delta(\bar{y}))$.

Teorema 2.2 *Diberikan fungsi volume α pada $\Re^n$, sel $E \subset \Re^n$, dan fungsi $\bar{f} : \Re^n \to \mathcal{X}$. Jika $\bar{f} \in R^*(E, \mathcal{X}, \alpha)$ maka $\bar{f} \in LSRS(E, \mathcal{X}, \alpha)$*

Bukti :

Diketahui $\bar{f} \in R^*(E, \mathcal{X}, \alpha)$ berarti untuk sebarang bilangan $\varepsilon > 0$ terdapat fungsi positif δ_1 pada E sehingga jika $\mathcal{D} = \{(D, \bar{x})\}$ partisi Perron δ_1-fine pada E berlaku

$$\left\|(\mathcal{D})\sum \bar{f}(\bar{x})\alpha(D) - \bar{F}(E)\right\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

dengan $\bar{F}$ menyatakan primitifnya pada sel E. Menurut teorema 1.2, berarti terdapat bilangan $\eta > 0$ sehingga untuk setiap sel $J \subseteq E$dengan $\alpha(J) < \eta$ berlaku

$$\|\bar{F}(J)\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Selanjutnya dibentuk fungsi positif δ pada sel E dengan$\delta(x) = \min\left\{\delta_1(x), \eta, \frac{\varepsilon}{2}\right\}$. Diperoleh $\alpha(C) < \delta(\bar{x})$ untuk $C \in \left(\bar{x}, \delta(\bar{x})\right)$. Lebih lanjut, diperoleh bahwa $\alpha(C) < \delta(\bar{x}) < \eta$. Dengan demikian untuk sebarang $\bar{y} \in E$ dan sebarang partisi Perron δ-fine $\mathcal{P}$ pada sel $C \subset B(\bar{y}, \delta(\bar{y}))$ berlaku

$$\left\|(\mathcal{P})\sum \bar{f}(\bar{x})\alpha(D)\right\| < \left\|(\mathcal{P})\sum \bar{f}(\bar{x})\alpha(D) - \bar{F}(C)\right\| + \|\bar{F}(C)\|$$
$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \quad \blacksquare$$

Teorema2.3 *Diberikan fungsi volume α pada $\Re^n$, sel $E \subset \Re^n$, dan fungsi $\bar{f} : \Re^n \to \mathcal{X}$. Jika $\bar{f} \in LSRS(E, \mathcal{X}, \alpha)$ maka $\bar{f} \in R^*(E, \mathcal{X}, \alpha)$*

Bukti :

Diberikan sebarang $\varepsilon > 0$ dan $\mathcal{D} = \{(D, \bar{x})\} = \{(D_1, \bar{x}_1), \ldots, (D_n, \bar{x}_n)\}$ partisi Perron δ-fine pada sel E. Untuk setiap $i (i = 1,2, \ldots, n)$ terdapat fungsi positif δ_i dengan $\mathcal{D}_i = \{(I, \bar{x})\}$ partisi Perron δ_i-fine pada D_i. Menurut yang diketahui diperoleh

$$\left\|(\mathcal{D}_i)\sum \bar{f}(\bar{x})\alpha(I)\right\| < \frac{\varepsilon}{2n}.$$

Diambil $\eta = maks\,\{\delta(\bar{x});\ \bar{x} \in E\}$, menurut teorema 1.2 didapat

$$\|\bar{F}(D_i)\| = \left\|(R^*)\int_{D_i} \bar{f}\, d\alpha\right\| < \frac{\varepsilon}{2n}.$$

Oleh karena itu untuk sebarang partisi Perron δ_i-fine $\mathcal{D}_i = \{(I, \bar{x})\}$pada D_i diperoleh

$$\left\|(\mathcal{D}_i)\sum \bar{f}(\bar{x})\alpha(I) - \bar{F}(D_i)\right\| \leq$$
$$\left\|(\mathcal{D}_i)\sum \bar{f}(\bar{x})\alpha(I)\right\| + \|\bar{F}(D_i)\|$$
$$< \frac{\varepsilon}{2n} + \frac{\varepsilon}{2n} = \frac{\varepsilon}{n}$$ untuk setiap *i*.

Selanjutnyadiambil $\delta^*(\bar{x}) = min\{\delta(\bar{x}), \delta_i(\bar{x})\}$ maka $\mathcal{D} = \bigcup_{i=1}^n \mathcal{D}_i$ merupakan partisi Perron δ^*-fine pada E . Oleh karena itu diperoleh

$$\left\|(\mathcal{D})\sum \bar{f}(\bar{x})\alpha(I) - \bar{F}(E)\right\| =$$
$$\left\|\sum_{i=1}^n \left((\mathcal{D}_i)\sum \bar{f}(\bar{x})\alpha(I) - \bar{F}(D_i)\right)\right\|$$
$$\leq \sum_{i=1}^n \left\|(\mathcal{D}_i)\sum \bar{f}(\bar{x})\alpha(I) - \bar{F}(D_i)\right\|$$
$$< n.\frac{\varepsilon}{n} = \varepsilon$$

Jadi terbukti $\bar{f} \in R^*(E, \mathcal{X}, \alpha)$. ■

Dengan demikian menurut teorema 2.2 dan teorema 2.3 diperoleh adanya ekuivalensi antara fungsi terintegral Henstock dan fungsi yang mempunyai sifat LSRS pada sel *E*.

3. GLOBALLY SMALL RIEMANN SUMS (GSRS)

Selanjutnya GSRS dikembangkan berdasarkan pengertian dan sifat fungsi terpancung. Diberikan sel $E \subset \Re^n$ dan $\bar{f} : \Re^n \to \mathcal{X}$, fungsi $\bar{f}_k$ dengan rumus sebagai berikut:

$$\bar{f}_k(x) = \begin{cases} \bar{f}(\bar{x}), untuk \left\| \bar{f}(\bar{x}) \right\| \le k \\ \quad \bar{0}, untukyanglain \end{cases}$$

disebut **fungsi terpancung.**

Selanjutnya diberikan definisi fungsi dari ruang Euclide $\Re^n$ keruang Banach $\mathcal{X}$ yang memiliki sifat Globally Small Riemann Sums.

Definisi 3.1 *Diberikan fungsi volume α pada $\Re^n$, sel $E \subset \Re^n$, dan fungsi $\bar{f} : \Re^n \to \mathcal{X}$ terukur-α pada sel E. Fungsi $\bar{f}$ dikatakan mempunyai sifat Globally Small Riemann Sums (GSRS) pada sel E ditulis dengan $\bar{f} \in GSRS(E, \mathcal{X}, \alpha)$ jika untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan bulat positif K dengan sifat untuk setiap k $\ge$ K terdapat fungsi positif δ_k pada E dengan sifat untuk setiap Perron δ_k-fine $\mathcal{D} = \{(D, \bar{x})\}$ pada sel E berlaku*

$$\left\| (\mathcal{D}) \sum_{\|\bar{f}(\bar{x})\| > k} \bar{f}(\bar{x}) \alpha(D) \right\| < \varepsilon.$$

Dengan demikian sesuai dengan definisi, setiap fungsi terukur dan terbatas pada sel $E \subset \Re^n$ bersifat GSRS pada sel E.

Teorema 3.2 *Fungsi $\bar{f}$ terdefinisi pada sel $E \subset \Re^n$, didefinisikan fungsi $\bar{f}_k$ dengan rumus*

$$\bar{f}_k(x) = \begin{cases} \bar{f}(\bar{x}), untuk \left\| \bar{f}(\bar{x}) \right\| \le k \\ \quad \bar{0}, untukyanglain. \end{cases}$$

Fungsi $\bar{f}$ terintegral Henstock pada sel E ke $\bar{F}(E)$ dan $\bar{F}_k(E) \to \bar{F}(E)$ untuk $k \to \infty$ jika dan hanya jika $\bar{f}$ merupakan fungsi terukur-α bersifat GSRS pada sel E.

Bukti :

(Syarat perlu) Diketahui $\bar{f} \in R^*(E, \mathcal{X}, \alpha)$. Oleh karena itu untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ terdapat fungsi positif δ^* pada sel E sehingga untuk setiap partisi Perron δ^*-fine $\mathcal{D}^*$ pada E berlaku

$$\left\| (\mathcal{D}^*) \sum \bar{f}(\bar{x}) \alpha(D) - \bar{F}(E) \right\| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Menurut definisi fungsi $\bar{f}_k$ diperoleh $\bar{f}_k \in R^*(E, \mathcal{X}, \alpha)$ untuk setiap k, jadi terdapat fungsi positif δ_k pada sel E sehingga untuk setiap partisi Perron δ_k-fine $\mathcal{D}_k{}^*$ pada sel E berlaku

$$\left\| (\mathcal{D}_k{}^*) \sum \bar{f}_k(\bar{x}) \alpha(D) - \bar{F}_k(E) \right\| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Diketahui $\{\bar{F}_k(E)\}$ konvergen ke $\bar{F}(E)$ pada sel E sehingga terdapatlah bilangan asli K dengan sifat untuk setiap $k \ge K$ berlaku

$$\|\bar{F}_k(E) - \bar{F}(E)\| < \frac{\varepsilon}{3}$$

untuk setiap $k \ge K$ didefinisikan fungsi positif δ pada sel E dengan $\delta(\bar{x}) = \min\{\delta^*(\bar{x}), \delta_k(\bar{x})\}$ untuk setiap $\bar{x} \in E$. Jadi untuk setiap partisi Perron δ--fine $\mathcal{D}$ pada sel E berlaku

$$\begin{aligned} &\left\| (\mathcal{D}) \sum_{\|\bar{f}(\bar{x})\| > k} \bar{f}(\bar{x}) \alpha(D) \right\| = \\ &\left\| (\mathcal{D}) \sum (\bar{f}(\bar{x}) \alpha(D) - \bar{f}_k(\bar{x}) \alpha(D)) \right\| \\ &\le \left\| (\mathcal{D}) \sum \bar{f}(\bar{x}) \alpha(D) - \bar{F}(E) \right\| + \|\bar{F}_k(E) - \bar{F}(E)\| \\ &\qquad + \left\| (\mathcal{D}) \sum \bar{f}_k(\bar{x}) \alpha(D) - \bar{F}_k(E) \right\| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

(Syarat cukup): Diketahui fungsi $\bar{f}$ merupakan fungsi terukur bersifat GSRS pada sel E maka untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan bulat positif K_0 dengan sifat untuk setiap $k \ge K_0$ terdapat fungsi positif δ_k pada sel E dengan sifat untuk setiap partisi Perron δ_k-fine $\mathcal{D}_k$ pada sel E berlaku

$$\left\| (\mathcal{D}_k) \sum_{\|\bar{f}(\bar{x})\| > k} \bar{f}(\bar{x}) \alpha(D) \right\| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Lebih lanjut fungsi $\bar{f}_k$ terintegral Henstock pada sel E untuk setiap k, sehingga untuk setiap m, $k \ge K_0$ terdapat fungsi positif δ_m dan δ_k pada sel E dengan sifat untuk setiap partisi Perron δ_m-fine $\mathcal{D}_m$ dan partisi Perron δ_k −fine $\mathcal{D}_k$ pada sel E berlaku

$$\left\| (\mathcal{D}_m) \sum \bar{f}_m(\bar{x}) \alpha(D) - \bar{F}_m(E) \right\| < \frac{\varepsilon}{4}$$

dan

$$\left\| (\mathcal{D}_k) \sum \bar{f}_k(\bar{x}) \alpha(D) - \bar{F}_k(E) \right\| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Untuk $m, k \ge K_0$ diambil fungsi positif δ dengan rumus $\delta(\bar{x}) = \min\{\delta_m(\bar{x}), \delta_k(\bar{x})\}$ sehingga untuk setiap partisi Perron δ-fine $\mathcal{D}$ pada sel E berlaku

$\|\bar{F}_k(E) - \bar{F}_m(E)\| \leq$
$\left\|\bar{F}_k(E) - (\mathcal{D}_k)\sum_{\|\bar{f}(\bar{x})\|\leq k}\bar{f}(\bar{x})\alpha(D)\right\| +$
$\left\|(\mathcal{D})\sum_{\|\bar{f}(\bar{x})\|>k}\bar{f}(\bar{x})\alpha(D)\right\| + \left\|(\mathcal{D})\sum_{\|\bar{f}(\bar{x})\|>m}\bar{f}(\bar{x})\alpha(D)\right\|$
$+ \left\|\bar{F}_m(E) - (\mathcal{D})\sum_{\|\bar{f}(\bar{x})\|\leq m}\bar{f}(\bar{x})\alpha(D)\right\|$
$< \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon.$

Jadi $\{\bar{F}_k(E)\}$ merupakan barisan Cauchy di dalam . Karena $\mathcal{X}$ merupakan ruang lengkap maka $\{\bar{F}_k(E)\}$ konvergen, katakan ke $\bar{F}(E)$. Dengan demikian terdapat bilangan bulat k_0 dengan sifat untuk setiap $k \geq k_0$ berlaku

$$\|\bar{F}_k(E) - \bar{F}(E)\| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Diambil $K = maks\,\{K_0, k_0\}$,sehingga untuk setiap $k \geq K$ dan untuk setiap partisi Perron δ-fine pada sel E berlaku

$\left\|(\mathcal{D})\sum\bar{f}(\bar{x})\alpha(D) - \bar{F}(E)\right\| \leq$
$\left\|(\mathcal{D})\sum\bar{f}(\bar{x})\alpha(D) - \bar{F}_k(E)\right\| + \|\bar{F}_k(E) - \bar{F}(E)\| \leq$
$\left\|\bar{F}_k(E) - (\mathcal{D})\sum_{\|\bar{f}(\bar{x})\|\leq k}\bar{f}(\bar{x})\alpha(D)\right\| +$
$\left\|(\mathcal{D})\sum_{\|\bar{f}(\bar{x})\|>k}\bar{f}(\bar{x})\alpha(D)\right\| + \|\bar{F}_k(E) - \bar{F}(E)\|$
$< \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} < \varepsilon$. ■

4. DAFTAR PUSTAKA

[1] Lee, P. Y., (1989), *Lanzhou Lectures on Henstock Integration*, Word Scientific, Singapore.

[2] Lee, P.Y., Vyborny, R., (2000), *Integral: An Easy Approach After Kurzweil and Henstock*, Cambridge University Press, UK.

[3] Darmawijaya, S., 1996, Some Small Riemann Sums Properties, *MIHMI*, no 1, Vol 2.

[4] Gordon, R. A., (1994), *The Integral of Lebesgue, Denjoy, Perron, dan Henstock*, American Mathematical Society, USA.

[5] Royden,, H. L., (1989), *Real Analysis*, third edition, Macmillan Publishing Company, New York, USA.