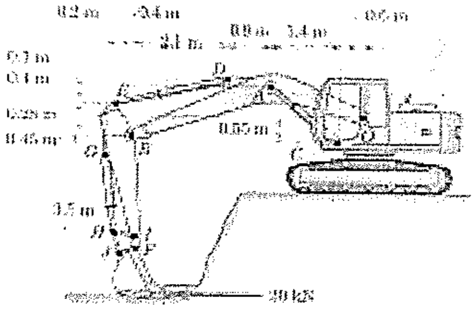
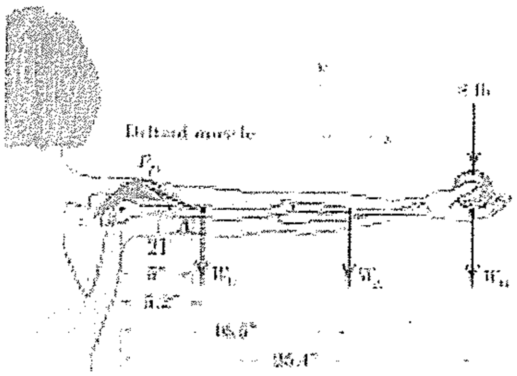
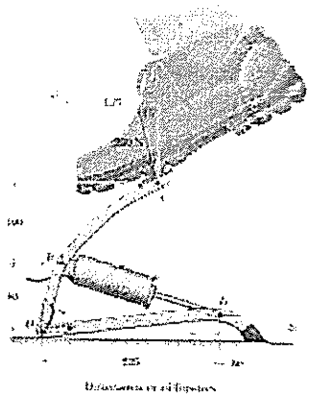
BAHAN AJAR

MEKANIKA TEKNIK STATIKA







Disusun oleh:

Agus Suprihanto, MT

PENGANTAR

Mekanika teknik statika merupakan salah satu matakuliah yang umumnya diberikan kepada mahasiswa jurusan teknik. Matakuliah ini merupakan cabang dari ilmu mekanika. Mekanika adalah ilmu Fisika yang mempelajari keadaan status benda, baik dalam keadaan diam atau bergerak akibat pengaruh gaya-gaya yang bekerja. Ilmu ini sangat penting perannya dalam sistem analisis kerekayasaan, dan seringkali orang menyebut bahwa awal dari rekayasa adalah mekanika.

Fokus utama materi matakuliah ini adalah memberikan pemahaman kepada mahasiswa jurusan teknik bagaimana menganalisis kesetimbangan benda-benda kaku atau gabungannya dalam keadaan diam. Contoh-contoh persoalan dalam bahan ajar ini dipilihkan untuk persoalan-persoalan yang mudah ditemui sehari-hari.

Tujuan instruksional umum matakuliah ini adalah **setelah mengikuti kuliah ini mahasiswa diharapkan mengetahui dan memahami konsep dasar gaya dan kondisi keseimbangan serta cara-cara perhitungannya.** Adapun tujuan instruksional khusus pembelajaran matakuliah staitika struktur ini adalah :

1. Mahasiswa mengenal cara menghitung resultan gaya, penguraian dan penjumlahan gaya baik secara aljabar dan vektor, definisi momen, kopel, momen lentur dan momen puntir, operasi vector momen serta mampu menyelesaikan soal-soal sistim gaya dan momen dalam dua dimensi
2. Mahasiswa memahami persamaan/ syarat kesetimbangan static dalam dua dan tiga dimensi, macam-macam tumpuan dan gaya-gaya reaksi tumpuan, diagram benda bebas dan mampu menyelesaikan soal-soal kesetimbangan dalam dua dan tiga dimensi
3. Mahasiswa memahami pembuatan diagram benda bebas truss dua dan tiga dimensi, analisis truss dengan metode joint; potongan; kombinasi joint dan potongan; mampu menyelesaikan soal-soal truss dalam dua dan tiga dimensi dan mampu mengembangkannya untuk menganalisis struktur

Penyajian materi dalam bahan ajar ini diawali dari penjelasan mengenai perkembangan ilmu mekanika, sistem satuan, hukum Newton, operasi vektor, sistem gaya, kesetimbangan dan aplikasinya dalam memecahkan persoalan-persoalan struktur yaitu trus, rangka dan mesin. Materi bahan ajar ini dibagi menjadi 4 bab yaitu Bab 1. Pendahuluan, Bab2. Sistem Gaya, Bab 3. Kesetimbangan dan Bab 4. Analisa Struktur. Tiap-tiap bab dibagi menjadi beberapa sub bab yang disertai contoh penyelesaian soal-soal. Diakhir setiap bab diberikan soal-soal latihan yang disertai dengan kunci jawabannya. Kunci jawaban ini diharapkan membantu mahasiswa yang berlatih mengerjakan soal-soal latihan dalam mencocokkan hasil perhitungannya. Pada bagian akhir dari bahan ajar ini disertakan lampiran beberapa formula matematika yang sangat membantu dalam pemahaman materi yang ada.

Mahasiswa yang menggunakan bahan ajar ini diharapkan mempelajari materi sesuai urutan penyajian yang ada. Materi tiap-tiap bab saling terkait dengan bab-bab sebelumnya. Oleh karena itu pemahaman yang kurang dalam suatu bab akan menghambat pemahaman dalam memelajari bab-bab berikutnya. Dianjurkan mahasiswa mempelajari contoh-contoh soal yang ada dan selanjutnya mencoba mengerjakannya kembali secara terpisah. Untuk mengukur seberapa-jauh pemahaman materi yang telah dikuasai, mahasiswa dianjurkan untuk mengerjakan soal-soal yang ada disetiap akhir bab dan soal-soal yang ada di buku-buku yang tercantum di daftar pustaka.

Penyusun menyadari apabila bahan ajar ini masih jauh dari sempurna. Penyusun menunggu dan memberikan penghargaan yang sebesar-besar untuk setiap masukan yang membawa perbaikan bahan ajar ini. Semoga bahan ajar ini dapat memberikan tambahan manfaat bagi penggunanya.

Semarang, 8 Januari 2008
Penyusun

Agus Suprihanto
Jurusan Teknik Mesin Universitas Diponegoro

DAFTAR ISI

BAB I

PENDAHULUAN

Mekanika adalah ilmu Fisika yang mempelajari keadaan status benda, baik dalam keadaan diam atau bergerak akibat pengaruh gaya-gaya yang bekerja. Ilmu ini sangat penting perannya dalam sistem analisis kerekayasaan, dan seringkali orang menyebut bahwa awal dari rekayasa adalah mekanika. Dalam riset dan pengembangan yang modernpun ilmu mekanika juga masih diserapkan, misalnya dalam bidang-bidang getaran, stabilitas, kekuatan dari struktur dan mesin, performansi engine, aliran fluida, mesin-mesin listrik dan peralatannya, perilaku molekul, atom dan sub atom. Disamping itu ilmu mekanika tergolong imu fisika yang paling tua dibandingkan ilmu-ilmu fisika yang lain.

1.1 Lingkup Ilmu Pengetahuan dan Rekayasa (Engineering)

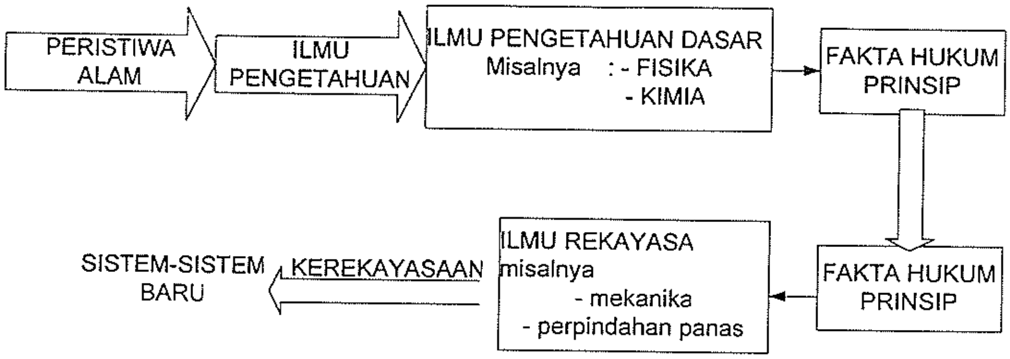
Kerekayasaan adalah suatu aktivitas yang berhubungan dengan ciptakan dari sistem-sistem yang baru untuk memanfaatkan umat manusia. Proses dari penciptaan dapat ditempuh mealui berbagai cara, misalnya riset merancang, dan membangun serta mengembangkan.

Dari kamus The Living Webster Encyclopedic, Engineering didefiniskan sebagai : *"the art of executing a partial application of scientific knowledge"*.

Perlu diketahui bahwa perkembangan suatu teknologi bergantung dari tiga hal, yaitu : tuntutan jaman, perkembangan ilmu pengetahuan, dan perkembangan ilmu rekayasa. Jadi sangatlah penting untuk mengerti perbedaan antara ilmu rekayasa dan ilmu pengetahuan.

Ilmu pengetahuan ialah sesuatu yang berkenaan dengan paham yang terstruktur dan kumpulan dari berbagai fakta, hukum, dan prinsip tentang penguasaan fenomena (gejala) alam. Sedangkan ilmu rekayasa adalah sebaliknya yaitu suatu seni yang berdasarkan dari penerapan berbagai fakta, hukum, dan prinsip untuk mencipta fenomena tertentu yang diinginkan, hal ini dapat dilihat pada gambar 1.1.

Jadi kegiatan dari ilmu pengetahuan dan ilmu rekayasa adalah dua kegiatan yang saling berlawanan arah, tetapi hasilnya saling mendukung, walaupun caranya hampir sama, yaitu dengan cara anlisis dan sintesis.



Gambar 1.1. Peranan Ilmu Pengetahuan dan Ilmu Rekayasa.

1.2. Perkembangan Ilmu Mekanika

Dari sub Bab 1.1 telah disebutkan bahwa mekanika merupakan ilmu fisika yang tertua, maka jelaslah dengan perjalanan waktu ilmu ini mengalami perkembangan sehingga melahirkan cabang-cabang ilmu yang baru dalam bidang rekayasa.

Pada dasarnya ilmu mekanika dibagi menjadi tiga kelompok dan pengelompokan ini berdasarkan sifat materi pembangun bendanya, yaitu :

1. Mekanika benda padat *(solid body)*
2. Mekanika kontinum
3. Mekanika fluida (gas atau cairan)

Mekanika benda padat dibagi menjadi dua yaitu statika benda kaku dimana benda dianggap kaku sempurna (rigid) dan pengaruh gaya-gaya luar yang bekerja pada benda tidak menyebabkan timbulnya percepatan tanslasi atau percepatan sudut, jadi benda masih dalam keadaan diam(kalau awalnya diam) atau bergerak translasi dengan kecepatan konstan (kalau awalnya bergerak). Tetapi bila gaya-gaya luar yang bekerja pada benda menyebabkan timbulnya percepatan translasi atau percepatan sudut maka keadaan ini disebut dengan keadaan dinamis, ilmunya disebut dinamika benda kaku. Jadi mekanika benda padat dibagi menjadi dua yaitu statika dan dinamikan, sedangkan pada dinamika benda kaku bisa dibagi menjadi dua cabang ilmu yaitu kinematika dan kinetika. Kinematika adalah ilmu yang mempelajari tentang seluk beluk gerak benda (kecepatan dan percepatan) tanpa memperdulikan gaya-gaya penyebab timbulnya gerak. Bila gaya penyebab timbulnya gerak diperhatikan maka ilmunya disebut kinetika.

Perkembangan lanjut dari ilmu dinamika benda kaku adalah ilmu mekanika ruang dan mekanika giroskop.

Mekanika kontinum menganggap benda sebagai kontinum. Bila peninjauan hanya ditujukan pada salah satu partikel pembangun benda maka disebut mekanika partikel, tetapi bila peninjauannya secara curah *(bulk)* maka disebut mekanika benda yang mudah berubah bentuk *(deformable bodies)* yang bila ilmu ini dikawinkan dengan statika maka menjadi **ilmu kekuatan material**. Adapun bila ditinjau dari sifat perubahan bentuk yang terjadi terhadap gaya-gaya yang bekerja maka dapat dibagi lagi menjadi dua, yaitu bila gaya-gaya bekerja pada benda ditiadakan dan benda kembali ke bentuk semula maka topiknya menjadi **elastisitas**, sebaliknya bila bentuk benda tidak kembali ke bentuk semula (deformasi kekal abadi) maka topiknya disebut **plastisitas**. Topik elastisitas hanya dipakai dalam rancang bangun dari suatu struktur, sedangkan plastisitas banyak dipakai dalam **proses-proses pembentukan** misalnya proses tempa dan ekstrusi. Bila topik dari elastisistas dan dinamika dikawinkan maka timbullah ilmu **mekanika getaran**.

Mekanika fluida merupakan cabang lanjut dari ilmu mekanika kontinum untuk benda yang mudah berubah bentuk, tetapi disini proses perubahan bentuk yang terjadi akibat gaya-gaya luar berupa gaya geser mengakibatkan perubahan bentuk yang kontinyu(terus menerus) dan biasa disebut dengan aliran. Bila fluida dianggap tidak berviskos, dan sifatnya tidak berubah terhadap perubahan tekanan *(inkompresibel)* maka disebut dengan **aliran fluida ideal (newtonian)**, sebaliknya apabila viskositas dan faktor kompresibilitas diperhitungkan maka disebut dengan **aliran fluida non-Newtonian**. Apabila fluida yang ditinjau berwujud gas, misalnya udara maka topiknya disebut **aeromechanics**, topik ini akan berkembang menjadi hypersonics bila kecepatan udara yang mengalir jauh lebih besar dari kecepatan rambat gelombang suara pada keadaan termodinamis yang sama dalam medium udara. Sebaliknya bila fluida memiliki sifat antara padat dan cair maka topik lanjutnya berupa **viskoelastisitas** dan ilmu tersebut banyak dikembangkan misalnya pada perkembangan dari teknologi cat, adapun secara khusus biasa disebut dengan **ilmu reologi**.

1.3. Beda Formulasi Pada Mekanika

Ilmu mekanika telah dikembangkan oleh berbagai ilmuwan mulai dari Archimides (287 – 212 SM) sampai Albert Einstein (1878-1955). Pemisahan dari perkembangan sejarah terhadap mekanika mengakibatkan pengklasifikasian dalam mekanika. Hal ini disebabkan oleh perbedaan aksioma an prinsip yang dipakai, sehingga mekanika diklasifikasikan menjadi tiga, yaitu :

1. Mekanika klasik
2. Mekanika kuantum atau mekanika gelombang
3. Mekanika relatvitas

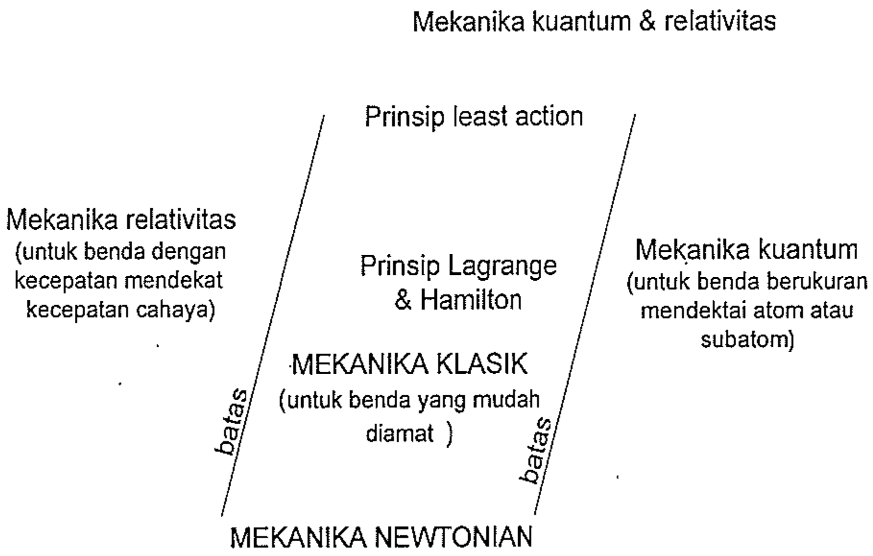
Mekanika klasik bertumpu pada landasan yang diletakkan oleh Galilleo, Kepler, Newton dan Euler. Hukum gerak linear oleh Newton dan Hukum gerak angular oleh Euler telah dipahami dan teruji dengan baik, tetapi kedua hukum tersebut hanya berlaku untuk perilaku dinamis dari benda-benda yang mudah diamati. Landasan lain dari mekanika klasik juga ditetapkan oleh Lagrange yang populer dengan sebutkan persamaan Lagrange dan oleh Hamilton yang sering disebut persamaan kanonik. Kemudian, prinsip least action yang berdasarkan konsep variational diusulkan sebagai prinsip tungga untuk menguasai perilaku dari benda-benda dalam berbagai keadaan.

Pola keberlakuan dari mekanika klasik tidak berlaku lagi bila benda bergerak dengan kecepatan mendekati kecepatan cahaya dan bila ukuran partikel mendekati ukuran atom. Hal inilah yang menyebabkan misteri pada struktur atom dan benda-benda yang berkecepatan tinggi sebelum prinsip mekanika kuantum dan mekanika relativitas dikemukakan. Mekanika relativitas dilandasi konsep baru dari ruang, waktu, massa dan energi, serta kerangka acuan. Topik-topik lanjut dalam bidang mekanika disajikan pada gambar 1.2 berikut dan rejim-rejim pada ilmu mekanika ditunjukkan pada gambar 1.3..

<table>
<tr><td>Aliran fluida non-Newtonian
Hypersonics (kecepatan diatas kecepatan suara)
Viskoelastisitas (viscoelasticity)</td><td>Getaran (Vibrations)
Elastisitas (Elasticity)
Plastisitas (plasticity)</td><td>Mekanika Ruang (Space Mechanics)
Mekanika Giroskop (Gyromecanics)</td></tr>
<tr><td colspan="3">TOPIK LANJUTAN DALAM MEKANIKA</td></tr>
<tr><td>Aliran fluida Newtonian (ideal) :
non Viscous, inkompresibel
Aliran fluida viskos
Aliran fluida kompresibel
Aeromechanics
Viscoelastic fluids</td><td>Mekanika benda yang mudah berubah bentuk (ilmu kekuatan material)
Mekanika partikel</td><td>Dinamika benda kaku (kinematika&kinetika)
Statika benda kaku</td></tr>
<tr><td>MEKANIKA FLUIDA</td><td>MEKANIKA KONTINUM</td><td>MEKANIKA BENDA PADAT</td></tr>
<tr><td colspan="3">LANDASAN MEKANIKA TERAPAN
AKSIOMA, HUKUM,PRINSIP</td></tr>
</table>

Gambar 1.2 Perkembangan Ilmu Mekanika Daam Ilmu Rekayasa.

Perlu diingat bahwa kegunaan dari mekanika klasik sampai saat ini masih mutlak diperlukan dalam bidang rekayasa, karena itu mutlah ilmu ini harus dikuasai dengan baik dan benar.



Gambar 1.3 Regim dari Ilmu Mekanika

1.4. Daftar Istilah Pada Mekanika

A. Prinsip Dasar Mekanika

Ruang : Daerah yang dapat diperluas ke segala arah. Posisi dalam ruang dapat dinyatakan dalam sistem referensi linear atau sistem refensi angular.

Waktu : Ukuran dari segala kejadian-kejadian yang saling berurutan.

Gaya : Aksi dari suatu benda ke benda yang lain, atau suatu aksi yang cenderung mengubah keadaan diam dari suatu benda yang dikenainya.

Materi : Zat yang menempati ruang.

Inersia : Sifat atau perilaku dari materi yang menyebabkan tahanan atau hambatan terhadap perubahan gerak.

Massa : Ukuran kuantitatif dari inersia.

Benda : Materi yang dibatasi oleh suatu permukaan yang tertutup.

Benda dalam mekanika dapat diidealisasikan sebagai beriku :

1. Partikel : Bila dimensi atau ukuran dari benda diabaikan , jadi dianggap sebagai titik bermassa.
2. Sistem partikel : Bila dua benda atau lebih dipresentasikan dalam bentuk partikel-partikel, jadi dianggap sebagai gabungan dari titik-titik yang bermassa, gabungannya dapat membentuk gabungan yang rigid/kaku atau gabungan yang mudah berubah bentuk.
3. Kontinum : Bila sifat mikroskopik dari materi tidak diperhatikan dan perilaku (sifat) dari zat didefinisikan sebagai perilaku curah *(bulk)* yang terdistribusi kontinyu.
4. Benda kaku : Bila dimensi dari benda, baik linear dan angular tidak berubah selama pengamatan berlangsung. Atau benda dianggap kaku bila perubahan bentuk relatif antara bagian-bagian yang dianalisa dapat diabaikan selama pengamatan.
5. Benda Mudah Berubah Bentuk *(Deformable Bodies)* : Bila dimensi dari benda, baik linear dan angular berubah selama pengamatan perubahan bentuk karena suatu gaya yang bekerja, sifatnya dapat sementara (elastis), kekal (plastis), sesaat, dan bisa juga kontinyu (aliran).
6. Fluida : Suatu zat yang berubah bentuk secara kontinyu karena pengaru tegangan geser, walaupun kecil. Perubahan bentuk yang kontinyu disebut aliran. Bila teganan geser tidak ada maka fluida dapat diperlakukan sebagai benda kaku dalam gerak.
7. Padat : Suatu zat yang memiliki sifat bentuk dan volumenya tertentu.

Diagram Benda Bebas adalah penggambaran dari suatu benda yang diisolasi dengan mengikutsertakan semua gaya luar (gaya aksi maupun reaksi) yang bekerja padanya.

Skalar adalah suatu kuantitas yang hanya memiliki besar, tanpa punya arah, misalnya: massa , waktu, volume, laju *(speed)*, dan energi.

Vektor adalah suatu kuantitas yang memiliki besar dan arah. Misalnya: gaya , momen, kopel, kecepatan *(velocity)*, percepatan dan momentum.

Vektor bebas adalah vektor yang dapat dipresentasikan dalam ruang dimanapun berada dengan besar dan arah yang tetap, tanpa memperhatikan titik tangkap dan garis kerja vektornya.

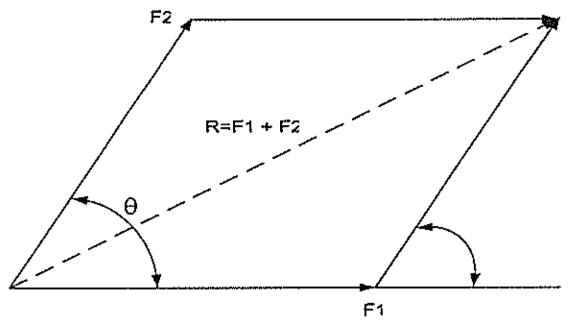
Vektor geser adalah vektor yang harus dipresentasikan pada garis kerjanya dengan arah dan besar yang tetap, tanpa memperhatikan letak titik tangkapnya. Misalnya : gaya yang bekerja pada benda kaku, torsi pada benda kaku dimana semuanya hanya memberikan pengaruh luar saja (lihat prinsip transmisibitias).

Vektor tetap adalah vektor yang harus dipresentasikan pada titik tangkapnya dengan arah dan besar yang tetap. Misalnya gaya atau momen, torsi pada benda yang mudah berubah bentuk, dimana vektor yang bekerja memberikan pengaruh dalam (lihat pada ilmu kekuatan material).

1.5. Prinsip-Prisip Dasar Mekanika Benda Kaku

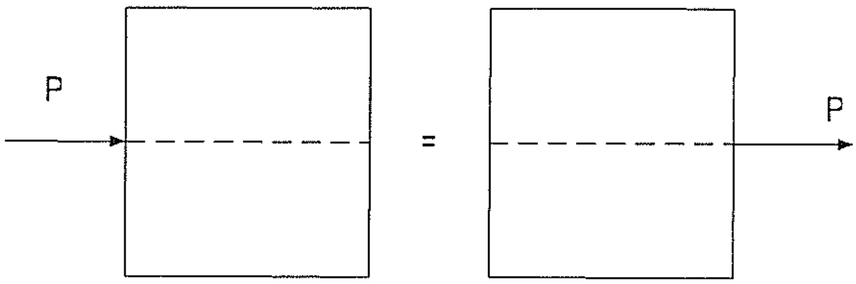
Dalam mekanika benda kaku ada enam prinsip dasar yang dapat melandasi dalam proses pemecahan masalah , yaitu :

1. Hukum Paralellogram atau Jajaran Genjang : yaitu resultan gaya-gaya luar yang bekerja pada benda merupakan jumlah vektor yang mengikuti prinsip jajaran genjang (lihat Gambar 1.4)



Gambar 1.4 Operasi Penjumlahan Vektor

2. Prinsip Transmibilitas : yaitu gaya-gaya yang bekerja pada benda kaku dapat dipindahkan titik tangkapnya dengan besar dan arah yang sama sepanjang garis kerjanya, tanpa berpengaruuh terhadap keadaan benda semula. (lihat gambar 1.5).



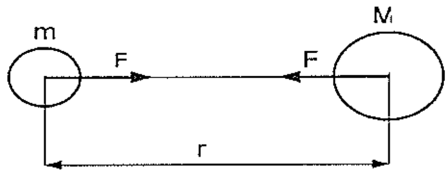
Gambar 1.5 Prinsip Transmibilitas

3. Hukum Newton I : Jika resultante gaya yang bekerja pada partikel = 0, partikel akan diam (jika awalnya diam), atau akan bergerak lurus dengan kecepatan konstan (jika awalnya bergerak). Hukum inilah yang melandasi **mekanika statika**.
4. Hukum Newton II : jika resultante gaya yang bekerja pada partikel $\neq 0$, maka partikel akan mengalami percepatan yang searah dan sebanding dengan resultante gayanya. Hukum ini yang mendasari dalam persamaan **mekanika dinamika**.
5. Hukum Newton III : gaya-gaya aksi dan reaksi antara benda-benda yang berkontak akan sama besar, segaris kerja dan berlawanan arah. Hukum ini merupakan dasar bagi kita untuk memahami tentang **konsep gaya**.
6. Hukum Gravitasi Newton : bila dua partikel masing-masing bermassa M dan m, keduanya terpisah sejauh r, maka akan timbul gaya tarik menarik yang arahnya saling berlawanan, segaris kerja dan sama besar, dimana besarnya berbanding lurus terhadap perkalian antar massa, dan berbanding terbalik terhadap kuadara jaraknya. Hukum inilah yang menjabarkan tentang **berat benda**.

$$F = \frac{G.M.m}{r^2}$$

dimana : G = konstanta gravitasi

F = gaya tarik menarik



Gambar 1.6 Gaya Gravitasi Newton

1.6. Langkah - Langkah Penyelesaian Soal Pada Mekanika Benda Kaku

Supaya tidak terjadi kekacauan dalam pemecahan soal pada mekanika benda kaku, maka sebaiknya diperhatikan langkah – langkah berikut ini :

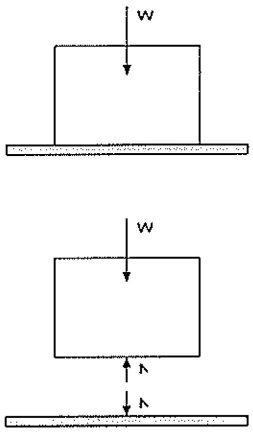
1. Persoalan yang ada harus dinyatakan dengan jelas dan teliti, terutama pada saat pengambilan asumsi (anggapan).
2. Solusi harus berpijak pada enam prinsip dasar mekanika atau teorema – teorema yang diturunkan dari keenam prinsip dasar mekanika (lihat sub bab 1.5).
3. Buatlah model – model fisik dari persoalan yang ada, misal membuat diagram benda bebas dari sistem yang menjadi pusat perhatian kita.
4. Susun persamaan matematik dari model fisik yang ada (berdasarkan point 2 dan point 3).
5. Periksa apakah jumlah persamaan matematik yang tersedia sudah mencukupi dengan jumlah variabel yang dicari, apabila belum mencukupi bangunlah persamaan matematik yang baru dan persamaan tersebut harus berpangkal dari hukum-hukum fisika yang ada hubungannya dengan asumsi dalam persoalan kita. Persoalan akan mengalami jalan buntu bila asumsi yang diambil tidak tepat. Bila jumlah persamaan matematikanya lebih besar dari jumlah variabel yang dicari, maka persoalan akan terjawab bila diberi syarat batas, dimana jumlah syarat batasnya harus sama dengan selisih antara jumlah persamaan matematik yang tersedia terhadap jumlah variabel yang dicari.

Contoh Soal 1.1 :

Tentukanla reaksi gaya normal (gaya yang tegak lurus terhadap permukaan kontak) antara lantai dan blok !

Jawab : benda diam dalam arah y, $\sum F_y = 0$

Dari DBB (diagram benda bebas) $\sum F_y = 0 \rightarrow N - W = 0, N = W$



Gambar 1.7 Contoh soal 1.1

1.7. Sistem Satuan

Ilmu mekanika banyak melibatkan empat besaran dasar, yaitu panjang, massa, gaya, dan waktu. Satuan yang digunakan untuk mengukur besaran tersebut tidak dapat dipilih secara bebas karena semuanya harus taat asas (konsisten) dengan hukum Newton II ($\sum F = m.a$) . Sistem satuan yang ada pada saat ini ada beberapa, diantaranya sistem satuan Inggris atau U.S. Customary, dan sistem Metrik (SI).

Tabel 1. Sistem Satuan

Besaran	Dimensi Simbol	Satuan SI		Satuan Inggris	
		Satuan	Simbol	Satuan	Simbol
Massa	M	kilogram	kg	slug	--
Panjang	L	meter	m	foot	ft
Waktu	T	detik	s	second	sec
Gaya	F	newton	N	pound	lb

Satuan SI : Sistem Satuan Internasional, disingkat SI (dari bahasa Perancis, *SISTEME INTERNATIOANL D'UNITES*), telah diterima diseluruh dunia dan merupakan versi terbaru dari sistem metrik.

Berdasarkan perjanjian internasional satuan SI akan menggantikan sistem-sistem satuan yang lain. Pada tabel 1 dalam SI satuan massa dalam kilogram (kg), panjang dalam meter (m), dan waktu dalam detik(s) dipilih sebagai satuan dasar, dan gaya dalam Newton (N) diturunkan dari ketiga satuan sebelumnya. Jadi, gaya (N) = massa (kg) x percepatan (m/s^2) atau

$$N = kg.\ m/s^2$$

Sehingga kita tahu bahwa 1 newton adalah gaya yang diperlukan untuk memberikan percepatan sebesar 1 m/s^2 pada massa 1 kg. Dari percobaan gravitasi dimana berat (W) dan g adalah percepatan akibat gravitasi, maka berdasarkan hukum Newton II (F = m.a),

$$W\ (N) = m\ (kg) \times g\ (m/s^2)$$

Satuan Inggris : Sistem Satuan Inggris, juga disebut sistem foot-pound-second (FPS), sistem ini sudah lazim dipakai dalam berbagai urusan dan industri di negara-negara yang berbahasa Inggris. Walaupun sistem ini akan digantikan dengan satuan SI, namun bukan berarti bahwa sistem FPS tidak digunakan lagi dalam bidang reakayasa, karena itu para rekayasawan harus mampu bekerja dengan kedua sistem satuan tersebut. Seperti pada tabel 1 satuan panjang dalam feet (ft), waktu dalam second (sec), dan gaya dalam pound (lb) semuanya dipilih sebagai satuan dasar, dan massa dalam slug adalah diturunkan dari hukum Newton II. Jadi gaya (lb) = massa (slug) x percepatan (ft/sec^2), atau

$$Slug = lb\text{-}sec^2/ft$$

Pernyataan tersebut memberikan arti bahwa 1 slug adalah massa yang mengalami percepatan sebesar 1 ft/sec^2 bila bekerja gaya 1 lb. Dari percobaan gravitasi dimana berat (W) adalah gaya gravitasi dan g adalah percepatan gravitasi.

$$m(slug) = \frac{W(lb)}{g(ft/\sec^2)}$$

Dalam satuan amerika pound juga dipakai sebagai satuan dari massa terutama bila menyatakan properti panas dari cairan, dan gas. Bila satuan gaya dan massa perlu dibedakan maka satuan gaya ditulis lbf dan satuan massa lbm. Satuan gaya yang lain dalam sistem satuan Amerika misalnya kilopound (kip) yang sama dengan 1000 lb, dan ton yang sama dengan 2000 lb.

Sistem Satuan Internasional (SI) diistilahkan sebagai sistem absolut karena pengukuran dari besaran dasar (baku) dalam hal ini adalah massa yang tidak bergantung dari sekelilingnya.

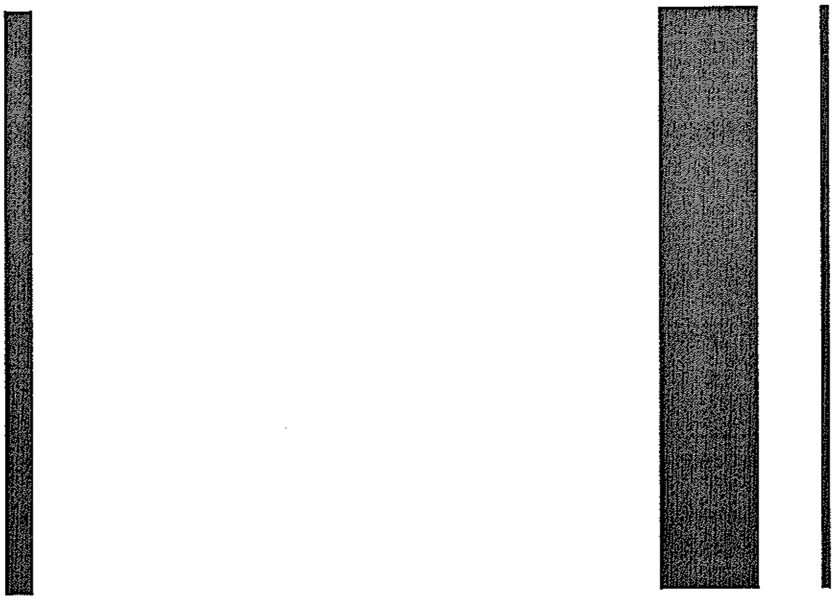
Sebaliknya sistem Amerika (FPS) diistilahkan sebagai sistem gravitasi karena pengukuran besaran bakunya dalam hal ini adalah gaya yang didefinisikan sebagai tarikan gravitasi (berat) yang beraksi pada massa standar pada keadaan tertentu (permukaan laut dengan garis lintang 45°). Pound standar adalah gaya yang diperlukan untuk mempercepat satu-pound massa dengan percepatan sebesar 32,1740 ft/sec^2.

Dalam satuan SI kilogram digunakan tersendiri sebagai satuan massa, tidak pernah sebagai gaya. Perlu ditekankan bahwa dalam sistem MKS gravitasi (meter, kilogram, detik) yang biasa digunakan di negara-negara yang tidak berbahasa Inggris, kilogram seperti pound, dimana kedua-duanya telah digunakan sebagai satuan gaya dan sebagai satuan massa.

Standar Primer untuk pengukuran dari massa, panjang, dan waktu telah ditetapkan oleh perjanjian internasional sebagai berikut : Massa satu kilogram didefinisikan sebagai massa dari suatu silinder platina-iridium yang disimpan pada **"International Bureau of Weights and Measures"** dekat Paris, Perancis. Salinan /tiruan yang akurat dari silinder tersebut disimpan pada Biro Standar Nasional di negara-negara yang sudah menganut sistem SI, sebagai standar massa bagi negara penganutnya (dalam hal ini termasuk Indonesia).

Panjang satu meter awalnya didefinikan sebagai seper sepuluh juta dari jarak kutub ke ekuator sepanjang garis meridian yang melalui Paris, kemudian didefinisikan sebagai panjang dari suatu batang patina-iridium yang disimpan pada "International Bureau of Weights and Measures". Standar ini juga mengalami kesulitan dalam pembuatan tiruannya, terutama masalah ketepatan, ketelitian, dan pengkalibrasiannya. Untuk menghindari persoalan tersebut saat ini didefinisikan sebagai 1.650.736,73 kali panjang gelombang dari suatu radiasi atom Kripton-86. Perbandingan antara sistem SI dan US untuk berat dan panjang diilustrasikan pada gambar 1.7.

Waktu satu detik mulanya didefinisikan sebagai fraksi 1/86.400 dari suatu hari. Karena ketidakteraturan dalam rotasi bumi maka definisi tersebut menimbulkan kesulitan, sehingga sulit juga dalam menetapkan standar tiruannya. Sekarang satu detik didefinisikan sebagai 9.192.631.770 kali periode dari radiasi suatu atom Cesium-133.



Gambar 1.7 Contoh Perbandingan Sistem Satuan
SI dan US untuk Gaya, Massa , dan Panjang

Dari uraian di atas maka untuk persoalan-persoalan bidang rekayasa, dan untuk tujuan kita dalam mempelajari ilmu mekanika, ketelitian dari standar-standar tersebut benar-benar melebihi dari keperluan kita.

Harga standar untuk percepatan gravitasi g pada permukaan laut pada garis lintang 45^{o}. Pada dua sistem (SI dan US) harganya adalah :

Satuan SI $\quad g = 9{,}80665 \text{ m/s}^2$

Satuan US $\quad g = 32{,}1740 \text{ ft/sec}^2$

Dalam prakteknya harga-harga tersebut didekati dengan harga $9{,}81 \text{ m/s}^2$ dan $32{,}2 \text{ ft/sec}^2$, dan harga tersebut biasanya dalam bidang rekayasa sudah dianggap cukup teliti.

Contoh Soal 1.2 :

Berapa newton berat dari 200 lb ?

Pemecahan masalah :

Tiap 1 lb setara 4,4482 N, jadi 200 lb = 200 lb x 4,4482 N/lb, sehingga berat

W = 890 N.

Contoh Soal 1.3 :

Hitunglah kerja yang diperlukan untuk mengangkat 1000 kg satelit dari permukaan bumi ke suatu orbit yang jaraknya dari permukaan bumi 100 mil (aturan Amerika) dan kecepatan saat masuk ke orbit 17500 mil/jam. Bila engine yang dipakai berdaya 30 hp berapa lama waktu yang diperlukan untuk mencapai orbit tersebut ? Seandainya engine tersebut digantikan dengan accu mobil yang kapasitasnya 600 Wh, berapakan jumlah accu yang dibutuhkan ?

Pemecahan masalah :

Perhatikan bahwa sistem satuan yang diberikan pada soal adalah campuran antara sistem SI dan US, agar dalam perhitungan tidak terjadi kesalahan maka sistem satuannya harus kita seragamkan dahulu, misal kita pilih dengan sistem SI.

Kerja yang dibutuhkan

$$W = \int F dx + \int mVdV$$

$F = G\,M\,m/x^2$, dimana :

F= gaya tarik gravitasi (N)

M= massa Bumi = 5,976(10^{24})

M= massa satelit= 1000 Kg

G= konstanta gravitasi universal = 6,673 (10^{-11}) $m^3/(kg.s^2)$

V= kecepatan satelit

X= jarak antara pusat bumi terhadap pusat satelit

Rb= jari-jari bumi = 6371(10^3) m , Rs = Rb + h

$$W = G\,M\,m \int_{R_b}^{R_s} \frac{1}{x} dx + m \int_0^V VdV$$

$W = G\,M\,m\,\{ (1/R_b) - (1/R_s)\} + mV^2/2$

$= 1000\,[\,6,673\,(10^{-11}) x 5,976(10^{24})\{1/6371(10^3) - (1/7,9803(10^6)\}+$

$0,5x(7823,0)^2]$

$= 4{,}322\ (10^{10})$ J

waktu yang diperlukan untuk menghasilkan kerja:

T = kerja / daya

$= 4{,}322\ (10^{10})/(30 \times 7{,}4570 \times 10^{2})$

$= 1932057{,}7$ s

$= 536{,}7$ jam

Jumlah accu yang bisa menggantikan engine :

= kerja total / kapasitas accu

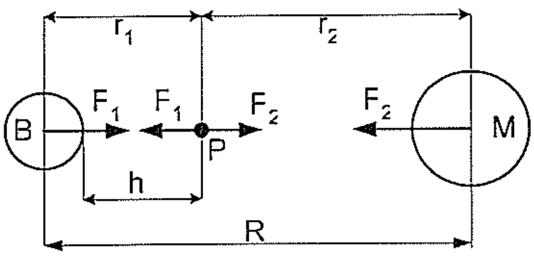
$= 4{,}322\ (10^{10})/(600 \times 3600)$

$= 20\,010$ accu

Contoh Soal 1.4 :

Jika sebuah pesawat ruang angkasa sedang berada di sebuah titik, yang mana titik tersebut terletak pada garis yang melalui titik pusat matahari dan bumi, dimana gaya tarik gravitasi dari bumi maupun dari matahari terhadap pesawat saling menghilangkan. Hitunglah jarak h dari titik tersebut terhadap permukaan bumi. Perbandingan antara massa matahari terhadap massa bumi 333000, jarak antara matahari terhadap bumi $149{,}6(10^{6})$ km, jari-jari matahari dan bumi 6,96 (10^{5}) km dan 6371 km.

Pemecahan Masalah :



$F_1 = G\, m_b m_p / r^2_1$ .... (1)

$F_2 = G\, m_m m_p / r^2_2$ .... (1)

Karena gaya tarik tersebut saling menghilangkan maka $F_1 = F_2$

Sehingga diperoleh bentuk persamaan

$m_b / m_p = r^2_2 / r^2_1$ .... (3)

dimana :

F_1 = gaya tarik gravitasi dari bumi terhadap pesawat

F_2 = gaya tarik gravitasi dari matahari terhadap pesawat

m_p = massa pesawat ruang angkasa

m_b = massa bumi

m_m = massa matahari

r_1 = jarak dari pusat bumi ke pesawat = $r_b + h$

r_2 = jarak dari pusat matahari ke pesawat = $R - r_1$

dengan memodifikasi persamaan (3) diperoleh

$$m_m / m_p = (R - r_1)^2 / r^2_1$$

$$332999\, r^2_1 + 299{,}2\,(10^6)\, r_1 - 22380{,}16\,(10^{12}) = 0$$

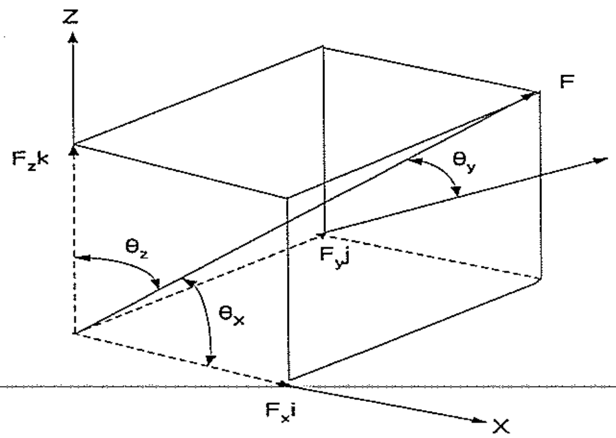
$$r_1 = 258796 \text{ km}$$

jadi $h = r_1 - r_b$ = 252 425 km.

Contoh Soal 1.5 :

Diketahui sebuah gaya F yang ditulis dalam bentuk vektor F, dimana F = (2i + 6j + 3k) N. Tentukan besarnya gaya F, kemudian hitunglah sudut yang terjadi antara vektor F terhadap arah X, Y, dan Z.

Pemecahan Masalah :



$$F = (2^2 + 6^2 + 3^2)^{½ss}$$

$$F = 7 \text{ N}$$

$$\theta_x = \arccos (2/7) = 73{,}4^{\circ}$$

θ_y = arc cos (6/7) = 31,0°

θ_z = arc cos (3/7) = 64,4°

SOAL-SOAL LATIHAN

1 . Sebuah benda dengan berat 3000 ton pada permukaan laut dengan garis lintang 45°. Tentukan massa benda tersebut dalam satuan SI dan U.S.

2. Hitunglah berat Wrench dari sebuah benda yang terletak pada puncak gunung Semeru (ketinggian 6466 m di atas permukaan laut), bila benda bermassa 100 kg. Gunakan gaya = 9,80665 m/s^2 pada permukaan laut.

3. Sebuah lokomotif diesel pada rodanya menghasilkan daya 2000 hp, bila lokomotif tersebut bergerak dengan kecepatan 60 km/jam, hitunglah gaya tarik pada perangkai lok tersebut.
   Bila gaya tarik yang diperlukan untuk menarik sebuah gerbong sebesar 200 N, berapa gerbong yang bisa ditarik oleh lok tersebut.

4. Perkirakan energi kinetik pada seorang yang sedang berlari dengan kecepatan 10 mil/jam dalam satuan J,Btu, dan eV.
   Perhitungan disesuaikan dengan massa badan anda.
   1 eV =1,602 (10^{-19}) J.

5. 100-mega ton hidrogen melepaskan energi sebesar 10^{18} J.
   Bandingkan ledakan tersebut dengan energi kinetik yang dimiliki sebuah steroid (dari besi) yang berdiameter 10 km sedang mendekati bumi dengan kecepatan 50000 km /jam. Rapat massa besi = 450 lbm/ft^2.

6. Sebuah roda yang berjari-jari 16,0 in. Mengalami slip di atas permukaan jalan yang koefisien geseknya 0,4 . Pada saat slip roda tidak menggerakkan kendaraan. Kalau roda pada saat itu berputar 120 rpm (putaran tiap menit), berapa Joule panas yang ditimbulkan selama 1 menit. Beban yang diterima roda 0,5 ton.

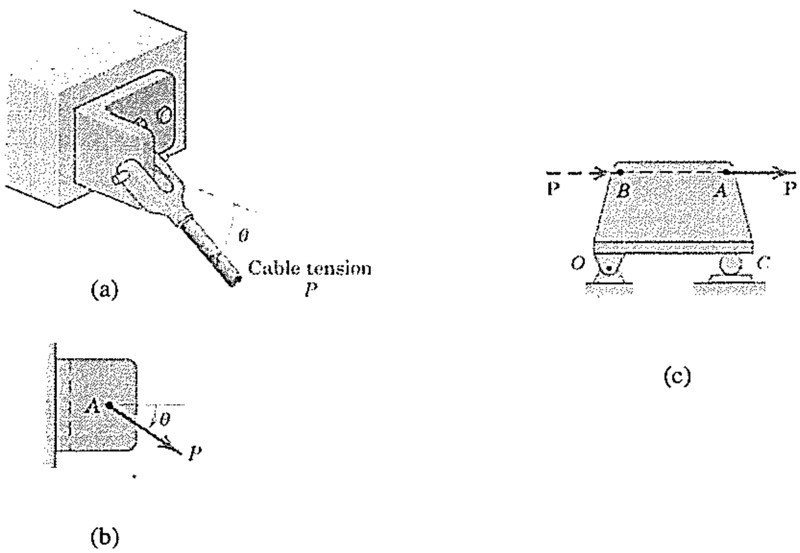
BAB 2

SISTEM – SISTEM GAYA

2.1. Pendahuluan

Sistem ialah suatu yang menjadi pusat perhatian kita dalam pengkajian suatu masalah, jadi sistem - sistem gaya yang menjadi pusat perhatian kita adalah gaya. Gaya telah didefinisikan sebagai aksi dari satu benda pada benda yang lain.

Marilah kita tinjau suatu sistem gaya yang terdiri dari tali, bracket, dan baut (lihat gambar 2.1). Gaya tarik yang bekerja pada kabel terhadap bracket dapat digambarkan seperti pada gambar 2.1.b yaitu dengan vektor gaya P. Pengaruh dari aksi ini akan bergantung pada besarnya P, sudut θ , dan lokasi titik tangkap A. Perubahan salah satu dari tiga spesifikasi yang ada akan berubah pengaruhnya pada bracket tersebut . Jadi untuk mempresentasikan gaya diperlukan tiga spesifikasi, yaitu : besar , arah, dan titik tangkap.



Gambar 2.1 Sistim gaya

Gaya ditimbukan melalui dua cara yang berbeda yaitu melalui kontak mekanis secara langsung atau melalui aksi dari jauh, misalnya gaya akibat medan listrik, gaya tarik bumi (gravitasi). Gaya-gaya sebenarnya yang lain adalah timbul karena kontak phisik secara langsung.

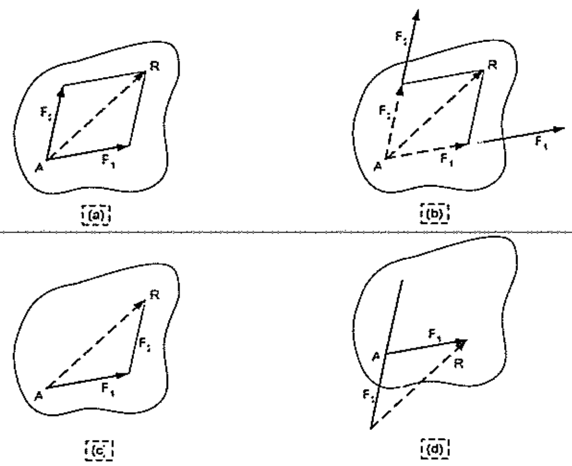
Aksi dari suatu gaya pada benda dapat dipisahkan menjadi dua pengaruh luar dan dalam. Untuk Gambar 2.1 pengaruh luar P terhadap bracket adalah gaya-gaya reaksi yang bekerja ke bracket akibat aksi dari baut dan pondasi yang menahan gaya P. Jadi gaya luar yang bekerja pada benda dapat dibedakan menjadi dua jenis, gaya kerja (aksi) dan gaya hasil (reaksi). Pengaruh dalam P terhadap bracket mengakibatkan gerakan-gerakan dalam dan distribusi gaya melalui material pembangun bracket. Hubungan gaya-gaya dalam dan gerakan-gerakan dalam yang melibatkan sifat material dari benda merupakan cabang ilmu tersendiri dalam mekanika, yaitu ilmu kekuatan material , elastisitas, dan plastisitas.

Dalam pengkajian mekanika benda kaku dimana perhatian hanya ditujukan pada pengaruh netto dari gaya-gaya luar saja, maka dari pengalaman menunjukkan bahwa tidaklah perlu membatasi aksi dari gaya yang bekerja hanya pada titik tangkapnya saja. Jadi gaya P yang bekerja pada bracket (Gambar 2.1.c) akan sama pengaruhnya bila P terletak di A atau di B asalkan masih terletak pada garis kerja vektor P. Prinsip ini dikenal dengan *prinsip transmibilitas*, akibatnya gaya yang bekerja pada benda kaku dapat diperlakukan sebagai *vektor geser.*

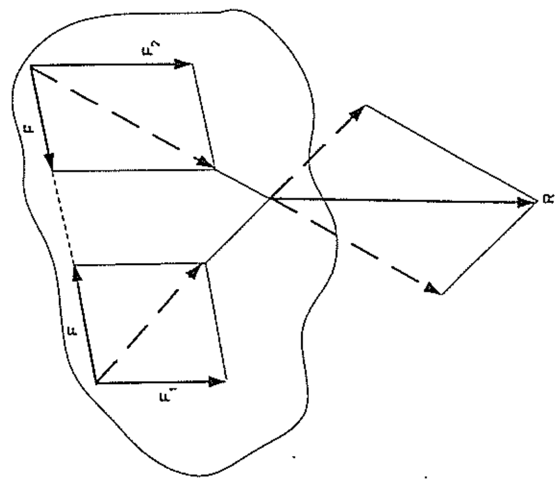
2.2. Sifat – Sifat Gaya pada Benda Kaku

2.2.1. Penjumlahan

Bila ada dua buah gaya F_1 dan F_2 yang sebidang maka penjumlahannya mengikuti hukum jajaran genjang, dimana garis kerja dari hasil penjumlahan dua gaya harus melalui titik sekutu dari garis kerja vektor F_1 dan F_2. Apabila gaya F_1 dan F_2 garis kerjanya sejajar maka agar diperoleh titik sekutu dari dua vektro tersebut, masing – masing vektor (F_1 dan F_2) harus ditambahkan gaya semu yang sama besar segaris kerja dan berlawanan arah. Dan perlu diingat jangan menjumlahkan dua vektor dari ujungnya, mulailah penjumlahan dari pangkalnya (lihat Gambar 2.2.d) karena hasil penjumlahannya tidak akan melalui titik sekutu vektor F_1 dan F_2.



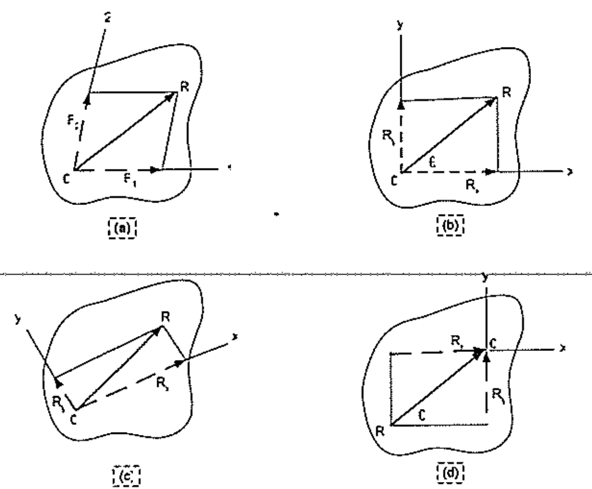
Gambar 2.2 Contoh-contoh Penjumalah Gaya Dalam Bidang.



Gambar 2.3 Contoh-contoh Penjumalah Gaya Dalam Bidang.

2.2.2. Penguraian Gaya (Resolution)

Gaya R pada gambar 2.4.a dapat diuraikan dalam arah 0 – 1 yaitu komponen F_1 dan arah 0 – 2 komponen F_2, adapun orientasi yang dipakai adalah sembarang tergantung keperluan dari kita. Jika komponen-komponen gaya saling tegak lurus maka berlaku Hukum Phitagoras (lihat gambar 2.4.b, c, d). Aksi dari sebuah gaya dan komponen-komponennya pada titik tangkapnya dapat juga dinyatakan seperti pada gambar 2.4.d.

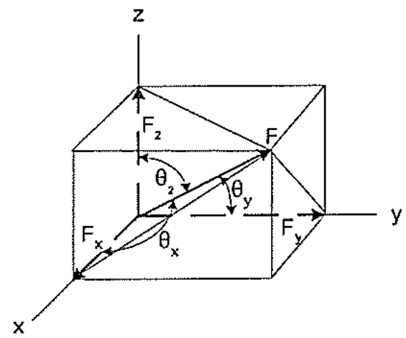


Gambar 2.4 Contoh – Contoh Penguraian Gaya

Perlu diingat apabila suatu gaya telah diuraikan, maka gaya luar yang beraksi pada benda adalah gaya – gaya komponennya saja. Sedangkan gaya resultannya sudah tidak diperhitungkan lagi.

Suatu gaya dalam ruang dapat diuraikan menjadi tiga komponen – komponen gaya yang saling tegak lurus (lihat Gambar 2.5), sehingga dapat diperoleh hubungan :

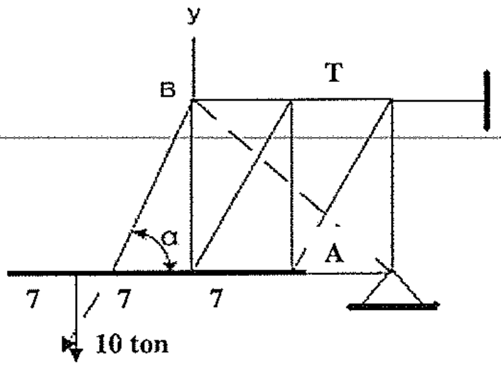
$$F_z = F\cos\theta_x$$
$$F_y = F\cos\theta_y \quad \text{dan} \quad F = \sqrt{F^2{}_x + F^2{}_y + F^2{}_z} \quad \text{.......(2.1)}$$
$$Fz = F\cos\theta z$$



Gambar 2.5 Contoh Penguraian Gaya Dalam Ruang

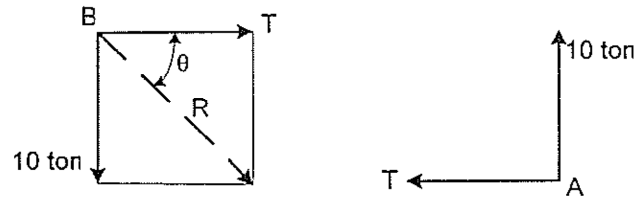
Contoh Soal 2.1 :

Jika berat dari truss diabaikan , gaya pada pin yang bekerja di A sama besar dan berlawanan arah terhadap gaya resultante dari beban 10 ton dan gaya tegang tali T. Seandainya beban 10 ton digantikan dengan gaya P yang terletak di ujung sebelah kiri (garis putus-putus), maka tentukanlah besarnya gaya P dan penambahan gaya tegang tali (T) bila gaya yang bekerja pada pin di A tetap seperti semula.



Gambar 2.6. Gambar contoh soal 2.1. (Dimensi dalam feet.)

Pemecahan Masalah :



Resultante gaya tegang tali dan beban 10 ton

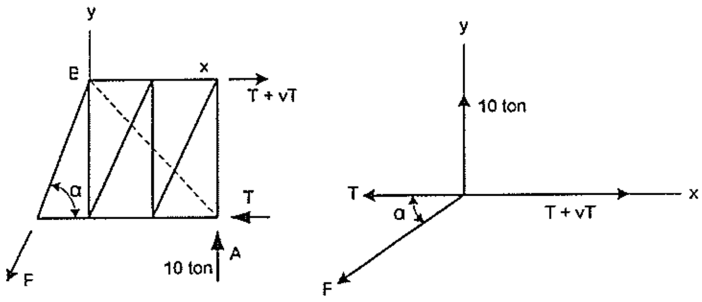
$R = (10^2 + T^2)^{1/2}$ ....(1)

$\theta = \text{arc tg } (10/T)$ .... (1.a)

Gaya di A = - R .... (1.b)

Resultante gaya pada truss saat dibebani P :

Dengan prinsip transmibilitas gaya A, P , dan (T + ΔT) dapat ditarik ke titik Bidang, sehingga diperoleh persamaan:



Arah y, P sin α = 10 ton .... (2.a)

Arah x, P cos α + T = T + T .... (2.b)

Dimana α = arc cos (7/14) .... (3)

A = 60°

Dengan mensubstitusikan persamaan (3) ke 2.a & 2.b diperoleh hasil P =11,55 ton , T = 5,77 ton.

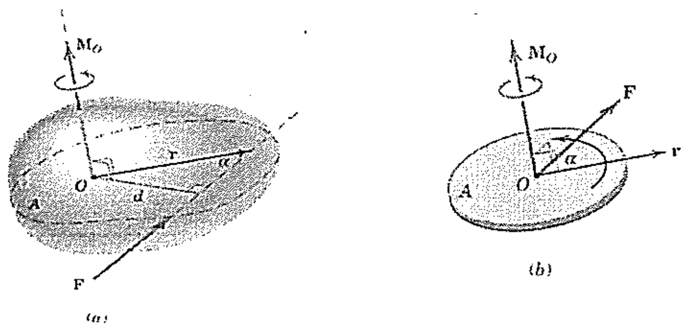
2.2.3. Momen

Kecenderungan gaya untuk memutar benda terhadap suatu sumbu disebut momen dari gaya terhadap sumbu putarnya. Pada Gambar 2.6.a perhatikan momen M terhadap sumbu 0 – 0 akibat gaya R yang diterapkan di titik A pada benda. Momen ini diakibatkan sepenuhnya oleh komponen dari R dalam bidang normal terhadap sumbu (bidang yang tegak lurus terhadap sumbu 0-0) yaitu komponen F yang dikalikan terhadap jarak yang tegak lurus antar garis kerja F ke sumbu 0-0,d. Sehingga besar momennya adalah :

$$M = F\,d \quad \text{...(2.2)}$$

Sedangkan komponen dari R yang tegak lurus terhadap F adalah sejajar dengan sumbu 0-0 sehingga tidak cenderung memutar benda pada sumbu 0-0.

Momen adalah besaran vektor, dimana garis kerjanya terletak sepanjang sumbu putarnya, sedangkan arahnya mengikuti aturan tangan kanan (lihat Gambar 2.6.b). Vektor momen mengikuti semua aturan kombinasi vektor dan juga diperlukan sebagai vektor geser dengan garis kerja selalu berhimpit dengan sumbu momennya (sumbu putarnya).



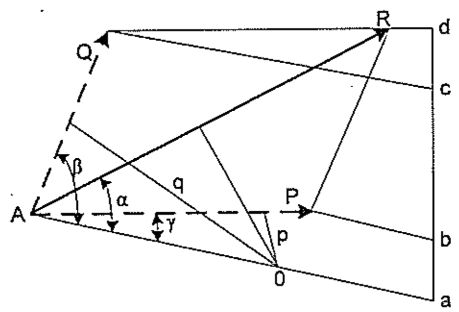
Gambar 2.6 Momen dan Cara Penggambarannya

Bila pengkajian yang dihadapi hanya melibatkan sistem gaya dalam dua dimensi (gaya-gaya yang sebidang) maka momen yang bekerja pada suatu bidang biasanya disebut sebagai momen terhadap suatu titik. Hal ini terjadi karena penggambaran momen pada sistem gaya dua dimensi sumbu momennya selalu tegak lurus dengan bidang gambar, sehingga vektor momennya selalu tegak lurus dengan bidang gambar, sehingga vektor momennya hanya tampak sebagai titik saja (karena menembus tegak lurus bidang gambar). Adapun pengoperasian vektornya dapat dilakukan secara aljabar skalar, dimana tanda positif atau negatifnya tergantung selera kita masing-masing. Tetapi perlu diingat bahwa pada saat menerapkannya dalam penyelesaian suatu masalah kita harus konsisten, artinya kalau menurut perjanjian dalam benak kita bahwa positif bila searah dengan putaran jarum jam (clockwise) maka bila arah momen berlawanan dengan putaran jarum jam harus negatif.

Salah satu dari prinsip mekanika yang cukup penting adalah Teorema Varignon, atau prinsip penjumlahan momen, yang menyatakan bahwa :

" Momen dari sebuah gaya terhadap suatu titik adalah sama dengan jumlah momen dari komponen-komponen gayanya terhadap titik yang sama".

Untuk membuktikan pernyataan di atas maka marilah kita lihat Gambar 2.7. Dimana gaya R yang bekerja pada titik A diuraikan menjadi dua komponen P dan Q. Titik 0 dipilih sembarang sebagai pusat momen, kemudian tarik gari AO dan proyeksikan vektor P, R, Q ke garis yang tegak lurus garis AO, berikutnya tariklah masing-masing garis dari titik O ke garis kerja dari masing-masing vektor (P,R,Q) sehingga diperoleh lengan momen P, r, q dari masing-masing gaya ke titik O dan berilah tanda sudut dari masing-masing vektor ke garis AO dengan notasi α,γ,β.



Gambar 2.7 Pembuktian Teorema Varignon

Karena prinsip parallelogram untuk sisi-sisi P dan Q , maka ac = bd, sehingga :

ad = ab + bd = ab + ac, atau

$R \sin \gamma = P \sin \alpha + Q \sin \beta$,

dimana $\sin \alpha = p/AO$, $\sin \gamma = r/AO$, $\sin \beta = q/AO$,

sehingga apabila persamaan di atas dikalikan dengan AO maka akan diperoleh persamaan :

$Rr = Pp + Qq$

Yang membuktikàn bahwa momen dari sebuah gaya terhadap suatu titik sama dengan jumlah momen dari dua komponen gayanya terhadap titik yang sama. Teorema Varignon tidak hanya dibatasi untuk kasus dua komponen saja melainkan dapat juga dipakai untuk menjumlahkan momen dari tiga gaya atau lebih terhadap suatu titik. Teorema ini dapat juga diterapkan pada momen dari vektor tetap atau vektor geser.

2.2.4. Kopel

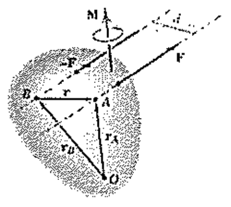
Dua gaya yang sejajar, sama besar, dan tidak segaris kerja disebut kopel. Misal aksi dari dua buah gaya seperti pada Gambar 2.8.. Dua gaya tersebut tidak dapat dikombinasikan menjadi gaya tunggal karena jumlahnya dalam setiap arah sama dengan nol. Efek dari gaya-gaya tersebut adalah satu yaitu kecenderungan untuk memutar benda. Kombinasi momen dari dua gaya terhadap sebuah sumbu normal dari bidang yang melalui titik O adalah :

$$M = F\,(a + d) - Fa$$

$$M = Fd$$

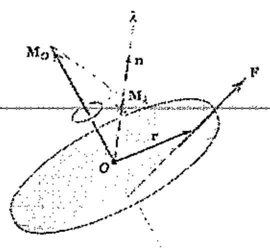
Dalam arah berlawanan arah putaran jarum jam. Ekspresi ini menunjukkan bahwa besarnya kopel M tidak tergantung pada pusat momennya. Dengan kata lain besarnya kopel akan sama untuk semua pusat momen.

Dari pernyataan di atas maka kopel dapat diperlakukan sebagai vektor bebas M, seperti pada Gambar 2.8. Dimana arah M adalah tegak lurus terhadap bidang kopel dan arah putarannya mengikuti aturan tangan kanan.



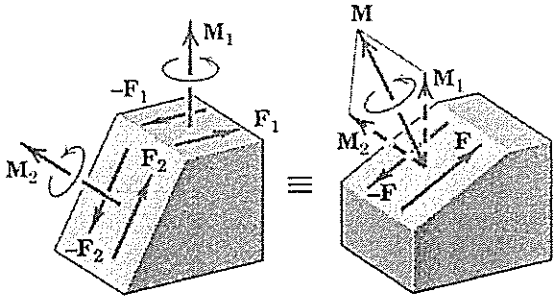
Gambar 2.8 Kopel dan Cara Penggambarannya

Kopel tidak berubah selama besar dan arah vektornya tidak berubah. Suatu kopel tidak akan berubah oleh pergantian harga dari F dan d selama produknya tetap sama. Hal ini bisa dilihat pada Gambar 2.9 yang menunjukkan empat konfigurasi kopel yang berbeda dengan hasil kopel yang sama M = Fd. Apabila ada sejumlah kopel yang bekerja pada sebuah bidang atau pada bidang-bidang yang saling sejajar maka pengoperasian vektornya dapat dilakukan secara aljabar skalar, adapun perjanjian positif atau negatifnya tergantung kita.



Gambar 2.9 Contoh Perbedaan Konfigurasi dengan Kopel yang Tetap

Kopel-kopel yang bekerja dalam bidang-bidang yang tidak sejajar dapat dijumlahkan secara vektoris dengan menerapkan hukum-hukum kombinasi vektor . Jadi kopel M_1 dan M_2 pada Gambar 2.10.a dapat digantikan oleh vektor M (lihat gambar 2.10.b) yang menyatakan kopel akibat gaya-gaya pada bidang yang tegak lurus terhadap vektor M.

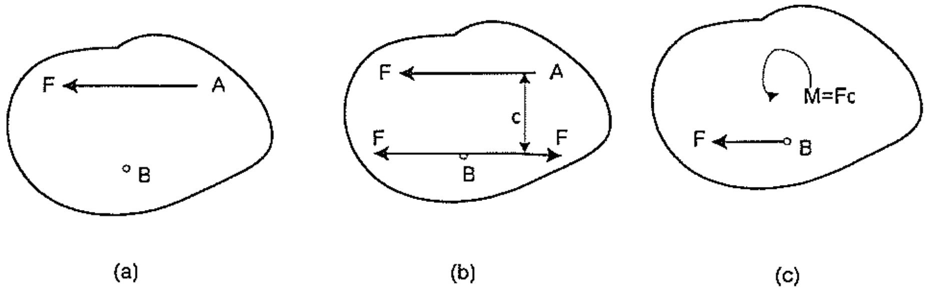


a. b.

Gambar 2.10 Contoh Penjumlahan Vektor kopel.

2.2.5. Penguraian Gaya ke Dalam Gaya dan Kopel

Pengaruh dari gaya pada benda pada umumnya ada dua , yaitu kecenderungan untuk mendorong atau menarik benda searah dengan arah gayanya, dan kecenderungan gaya untuk memutar benda terhadap sembarang sumbu asalkan tidak berhimpit atau sejajar terhadap garis kerja gayanya. Analisis dari pengaruh ganda tersebut seringkali dimudahkan dengan penggantian gaya oleh gaya yang sama besar dan searah tetapi tidak segaris kerja dengan gaya semua (sejajar) dan sebuah kopel untuk menghindari perubahan momen akibat perubahan posisi gaya yang baru. Misalkan pada sebuah benda bekerja gaya F di A seperti pada Gambar 2.11.a, kemudian gaya di A ingin kita pindahkan di B. Agar tidak terjadi perubahan pengaruh luar pada benda maka di Bidang dipasangkan dua buah gaya F yang berlawanan arah (Gambar 2.11.b), akibatnya gaya F di A arah ke kiri dan gaya F di B arah ke kanan akan menimbulkan kopel M = Fd yang berlawanan arah putaran jarum jam, sehingga gaya di A menjadi 0 dan di Bidang ada gaya F yang garis kerjanya sejajar dengan garis kerja gaya di titik A dan arahnya searah dengan arah gaya semula serta ada kopel M (lihat Gambar 2.11.c) yang arahnya sama dengan arah momen yang diakibatkan oleh gaya mula terhadap titik yang terletak pada garis kerja yang baru.



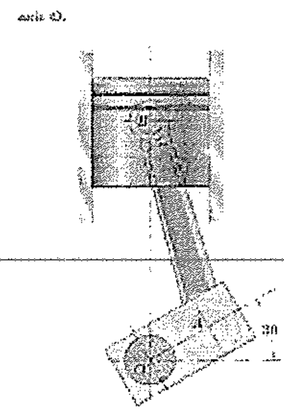
Gambar 2.11 Penguraian Gaya ke Dalam Gaya dan Kopel

Jadi sebuah gaya selalu dapat digantikan oleh sebuah gaya yang sama (arah dan besar) dan sejajar garis kerjanya serta kopel yang besarnya bergantung dari jarak antara garis kerja gaya-gaya yang lama dan gaya yang baru. Hal ini juga menyatakan bahwa bila ada kopel dan gaya yang terletak d bidang kopel dapat dikobinasikan menjadi gaya tunggal yang sama terhadap gaya semula, tapi garis kerjanya sejajar.

Penguraian sebuah gaya menjadi gaya dan kopel dalam bidang rekayasa sangat banyak digunakan.

<u>Contoh Soal 2.2</u> :

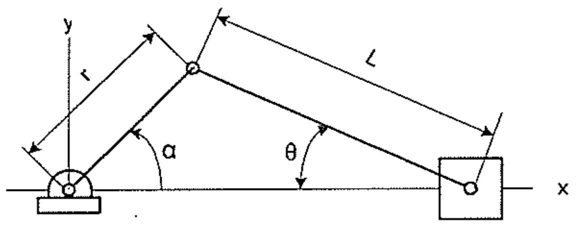
Sebuah motor bakar torak dengan silinder tunggal mempunyai panjang langkah torak 200 mm, dan panjang batang penghubung 350 mm (yaitu jarak antara pusat pena torak dan pusat pena engkol). Bila pada posisi seperti pada gambar batang penghubung dikenai beban kompresi P sebesar 22,5 kN, hitunglah Momen M akibat gaya P terhadap pusat poros engkol.



Gambar 2.11. Gambar contoh soal 2.2

Pemecahan Masalah :

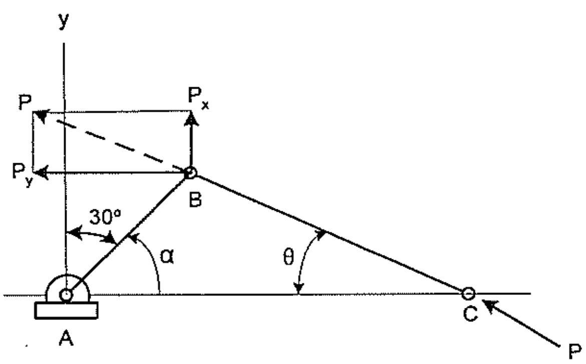
Langkah torak ialah panjang lintasan torak yang diukur pada saat engkol pada posisi 0° dan 180° (α).



$2r = 200$ mm , $r = 100$ mm

$L = 350$ mm

P segaris dengan sumbu batang penghubung.



Beban P segaris dengan garis CB dengan prinsip transmibilitas gaya P digeser ke B dan diuraikan dalam arah x dan y.

$P_x = P \cos\theta$, $P_y = P \sin\theta$

$AB = r$, $CB = L$, $\alpha = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$

Lihat ABC :

$\sin\theta = (r \sin\alpha)/L$, $\theta = \arcsin((r \sin\alpha)/L)$

$\theta = \arcsin((100 \sin 60^\circ)/350) = 14^\circ 19'$

$M_A = P_x\, r \sin\theta + P_y\, r \cos\theta$

$P_x = 22{,}5 \cos 14^\circ 19' = 21{,}8$ kN

$P_y = 22{,}5 \sin 14^\circ 19' = 5{,}6$ kN

$M_A = 2168$ kN.mm $= 2168$ N.m

2.3. Resultante Dari Sistem-Sistem Gaya

Resultante gaya-gaya dari suatu sistem gaya adalah gaya tunggal pada sistem gaya yang mana dapat menggantikan gaya-gaya asli dari suatu sistem gaya tanpa merubah pengaruh luar pada suatu benda kaku. Keseimbangan pada sebuah benda adalah keadaan dimana resultante dari semua gayanya sama dengan nol, dan percepatan pada sebuah benda dinyatakan dengan kesamaan gaya resultante terhadap perkalian antara massa dan percepatan.

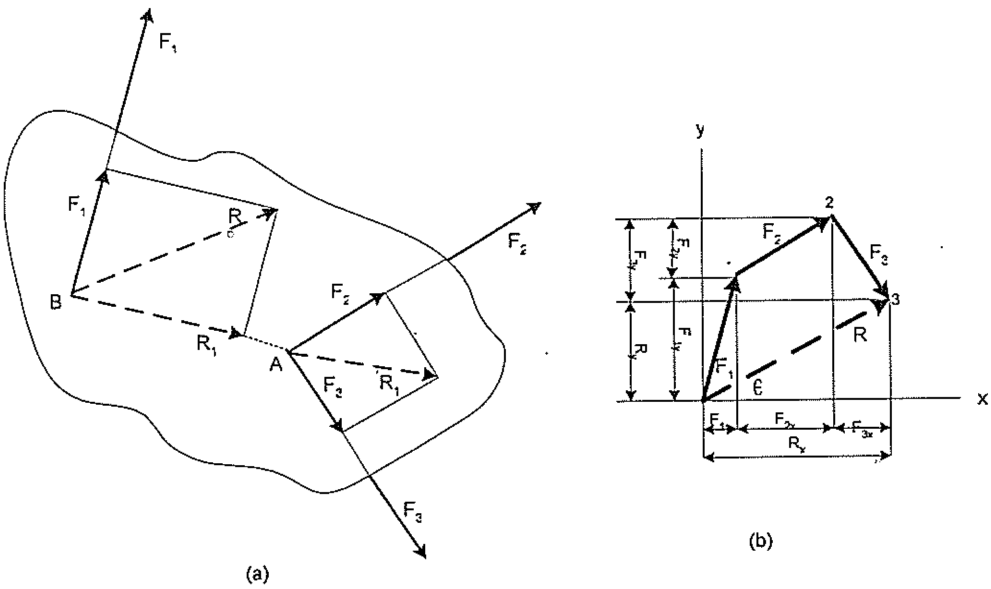
Jadi penentuan dari resultante merupakan landasan untuk pengkajian dalam statika maupun dinamika. Sifat-sifat gaya, momen, dan kopel yang telah dibahas dalam sub bab terdahulu sekarang akan dipakai dalam menentukan resultante dari sistem-sistem gaya yang sebidang.

Resultante dari sistem gaya-gaya yang sebidang dapat meliputi penjumlahan dua gaya yang kemudian hasil kombinasinya dapat dikombinasikan dengan gaya-gaya yang lain. Hal ini bisa dilihat pada Gambar 2.12.a yang menggambarkan tiga buah gaya yang sebidang bekerja pada subah benda. Untuk menentukan resultante gayanya mula-mula ditentukan terlebih dahulu titik temu dari dua buah garis kerja gaya yang saling berpotongan, misal kita tarik dua buah garis yang melalu F_2 dan F_3 sehingga diperoleh titik A (ingat prinsip transmibilitas), kemudian F_2 dan F_3 kita pindahkan ke titik A (pemindahan tidak terjadi kopel karena dilakukan sepanjang garis kerja dari masing-masing gaya), lalu F_2 dan F_3 dijumlahkan sehingga diperoleh gaya R_1 (ingat prinsip jajaran genjang). Kita tarik garis yang melalui R_1 dan F_1 sehingga bertemu di titik B, kemudian kita pindahkan R_1 dan F_1 di titik Bidang dan keduanya dijumlahkan sehingga diperoleh gaya R. Gaya R merupakan gaya resultante dari gaya-gaya F_1, F_2, dan F_3 yang garis kerjanya melalui titik B. Jadi pengaruh luar pada benda akibat gaya-gaya F_1, F_2, F_3 dipasangkan sebuah gaya yang besaranya sama dengan R dan arahnya berlawanan, garis kerjanya tetap melalui titik Bidang maka keadaan dari benda dikatakan seimbang, atau resultantenya sama dengan nol.

Penentuan besar dan arah dari R dapat juga diperoleh dengan cara penjumlahan segitiga seprti pada Gambar 2.12.b.

Di sini gaya-gaya diperlakukan sebagai vektor-vektor bebas dan dijumlahkan dari ujung terhadap pangkal (head-to-tail).

Resultante dari F_1dan F_2 adalah sebuah vektor yang arahnya dari 0 ke 2 dan bila dikombinasikan dengan F_3 diperoleh besar dan arah dari R. Poligon 0-1-2-3 disebut poligon gaya. Secara aljabar hasil tersebut dapat juga diperoleh dengan membentuk komponen-komponen segiempat dalam dua arah yang tertentu dan saling tegak lurus dari masing-masing gaya.



Gambar 2.12 Resultante Dari Gaya-Gaya Yang Sebidang

Pada Gambar 2.12.b hasil penjumlahan aljabar dari komponen-komponen yang berasal dari penguraian gaya (F_1, F_2,F_3) dalam arah x dan y. Jadi komponen-komponen dari gaya resultante R untuk sistem gaya-gaya yang sebidang dapat dinyatakan sebagai :

$$Rx = \sum Fx \;,\; Ry = \sum Fy$$

Dimana

$$R = [\,(\sum Fx)^2 + (\sum Fy)^2\,]^{1/2} \quad \text{...(2.3)}$$

Sudut antara R dengan sumbu x adalah

$$\theta = \text{arc tg} (\sum Fy/\sum Fx) \quad \text{..(2.4)}$$

Lokasi dari garis kerja vektor R dapat dihitung dengan menerapkan teroema Varignon. Walaupun teorema ini terbukti untuk dua komponen dari sebuah gaya,, hal ini juga berlaku bagi sistem gaya-gaya yang sebidang.

Momen dari R (Gambar 2.13) terhadap suatu titik misal 0 harus sama dengan jumlah dari momen akibat komponen F_1 dan R_1 terhadap titik yang sama (0).

Momen dari R_1 juga harus sama dengan jumlah momen dari komponen F_2 dan F_3 terhadap titik yang sama (0). Hal ini berarti momen dari R terhadap suatu titik (misal 0) akan sama dengan jumlah momen dari F_1,F_2,F_3 terhadap titik yang sama (misal 0).

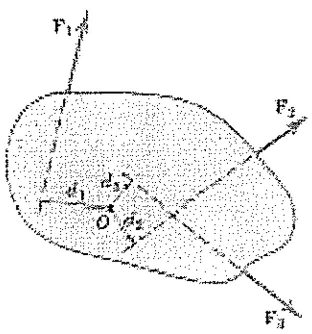
Pemakaian dari prinsip momen ini pada Gambar 2.13 terhadap titik 0 memberikan suatu persamaan :

$$Rd = F_1d_1 + F_3d_3 - F_2d_2$$

Dalam penulisan persamaan ini momen dalam arah searah jarum jam direferensikan positif. Jarak d dihitung berdasarkan persamaan di atas, dan R arah dan besarnya dapat dihitung dari persamaan 2.3 dan 2.4, sehingga besar, arah dan garis kerja vektor R sudah lengkap diketahui. Pada umumnya untuk menentukan lengan momen (moment arm) dan dituliskan persamaan :

$$Rd = \sum M_0 \quad \text{...} \quad (2.5)$$

Dimana M_0 adalah penjumlahan alajabar dari momen akibat gaya-gaya dari sistem pada suatu titik di 0.



Gambar 2.13 Lokasi Gaya Resultante

Untuk sistem yang semua gayanya sebidang dan terletak pada satu titik maka resultante gayanya dapat ditentukan dengan cara grafis (paralellogram atau segitiga) atau secara analistis yaitu dengan memakai persamaan 2.3 dan 2.4 dan grafis kerja gaya resultantenya akan melalui titik tersebut.

Untuk sistem yang semua gayanya sejajar maka besarnya resutlannya adalah sama dengan penjumlahan alajabar dari gaya-gaya yang bekerja, dan posisi dari garis kerjanya dapat ditentukan dari persamaan 2.5.

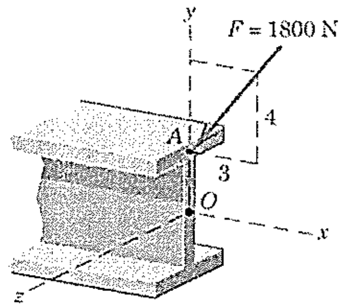
Besarnya kopel sama dengan jumlah momen terhadap sembarang titik.

Jadi jelaslah bahwa resultante dari sistem gaya-gaya yang sebidang dapat berupa sebidang dapat berupa sebuah gaya atau sebua kopel.

SOAL-SOAL LATIHAN

1. Sebuah gaya **F** 1800 N diterapkan pada ujung balok profil I. Nyatakan gaya **F** sebagai vektor dengan menggunakan vektor satuan **i** dan **j**.

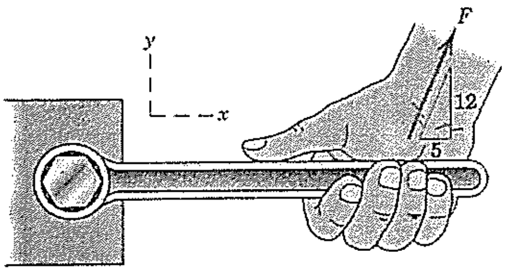
   Jawab : F = 1080**i** – 1440**j**



Gambar soal no 1.

2. Komponen gaya **F** dalam arah y dari tarikan tangan manusia pada handel sebesar 70 lb. Hitunglah komponen gaya dalam arah x serta besarnya gaya resultan **F.**

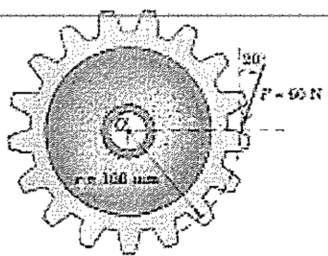
   Jawab : $\mathbf{F_x}$ = 29,2lb **&** **F** = 75,8lb



Gambar soal no 2

3. Gaya sebesar 40N bekerja pada roda gigi seperti pada gambar berikut. Tentukan besarnya momen terhadap pusatnya.

   Jawab : Mo = 5,64 Nm (CW)

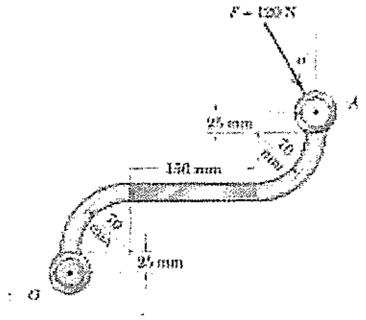


Gambar soal no 3.

4. Gaya 120N pada suatu kunci seperti pada gambar berikut. Hitunglah moment pada titik O dan carilah harga α yang menghasilkan momen terbesar.

   Jawab : a. $M_o = 41{,}5$ Nm (CW)

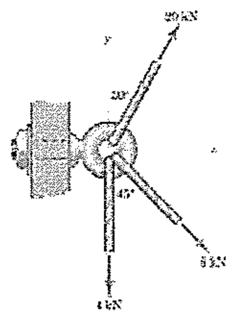
   b. $\alpha = 33{,}2^\circ$ & $M_{o_{max}} = 41{,}6$ Nm (CW)



Gambar soal no 4.

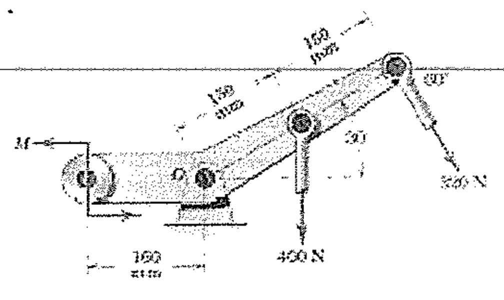
5. Tentukanlah resultante R dari ketiga gaya yang beraksi pada mata baut, dan hitunglah besarnya gaya resultante dan sudutnya.

   Jawab : $R = 17{,}43$kN & $\theta = 26{,}1^\circ$



Gambar soal no 5.

6. Jika resultan dari gaya dan momen pada pengungkit berikut melalui titik O, tentukan besarnya momen M. Jawab: M = 1480Nm CCW



Gambar soal no 6

BAB 3
KESEIMBANGAN (EQUILIBRUM)

3.1 Keseimbangan

Konsep keseimbangan diturunkan dari gaya-gaya yang seimbang, lebih khusus lagi keseimbangan adalah keadaan dari suatu benda dimana resultante dari semua gaya-gaya yang bekerja pada benda sama dengan nol. Pada bab terdahulu dijelaskan bahwa suatu sistem gaya dapat dinyatakan dalam bentuk resultante gaya R, dan resultante momen M. Jadi suatu sistem gaya dikatakan dalam kondisi seimbang bila :

$R = 0$ .... (3.1.a) dan

$M = 0$ ....(3.1.b)

Jadi pada persamaan 3.1 merupakan suatu syarat cukup yang minimal harus dipenuhi oleh suatu sistem gaya agar diperoleh keadaan seimbang. Lebih jauh lagi bila kita kaji arti kata dari syarat cukup itu berarti bila syarat dilebihi maka keadaan sistem gaya akan tetap seimbang, tetapi bila syarat tidak dipenuhi maka sistem gaya akan tidak seimbang, sehingga benda akan mengalami gerak translasi, rotasi atau kombinasi dari keduanya. Bila persamaan 3.1 dijabarkan dalam bentuk grafis maka poligon ruang dari gaya-gaya akan tertutup atau bertemu pada satu titik. Secara phisik persamaan 3.1 berarti gaya-gaya aksi yang bekerja pada benda akan diseimbangkan oleh gaya-gaya reaksi, demikian juga momen yang bekerja pada benda akan dilawan oleh momen-momen yang terjadi akibat gaya-gaya reaksi pada benda.

Persamaan-persamaan yang berhubungan dengan gaya dan percepatan untuk gerak benda kaku merupakan cabang mekanika dalam ilmu dinamika yang diturunkan dari hukum Newton II, kemudian dikembangkan oleh Euler, sehingga diperoleh pertanyaan sebagai berikut :

"bila resultante dari sistem gaya yang dinyatakan oleh gaya tunggal R dimana garis kerjanya melalui pusat massa suatu benda dan mengikutsertakan kopel M, maka percepatan linear pada pusat massa benda akan sebanding terhadap R, dan percepatan angularnya terhadap sumbu yang melalui pusat massa benda akan sebanding terhadap M".

Jadi persamaan 3.1.a penerapannya tidak hanya untuk benda dalam keadaan diam saja, tetapi juga untuk benda dimana pusat massanya bergerak lurus dengan kecepatan konstan (tanpa percepatan). Demikian juga pada persamaan 3.1.b juga berlaku untuk benda yang berotasi terhadap sumbu yang melalui pusat massa dengan kecepatan sudut yang konstan.

Kemungkinan-kemungkinan yang terjadi dalam sistem gaya:

I. Sistem Seimbang , bila R = 0 & M = 0

Keadaan benda : v = konstan & ω = konstan , a = 0 & α = 0

a. Diam, kecepatan translasi v = 0 , kecepatan sudut $\omega = 0$
b. Bertranslasi tetapi tidak berotasi ($v \neq 0$ & $\omega = 0$)
c. Berotasi tapi tidak bertranslasi (v = 0 & $\omega \neq 0$)
d. Bertranslasi dan berotasi ($v \neq 0$ & $\omega \neq 0$)

II. Sistem tak seimbang arah translasi , bila $R \neq 0$ & M = 0

Keadaan benda : $v \neq$ konstan & ω = konstan

a. Keadaan awal diam dan dipercepat linear, $a \neq 0$, v = 0 & $\omega = 0$
b. Keadaan awal bergerak tapi tidak berotasi, $a \neq 0$, $v \neq 0$ & $\omega = 0$
c. Bertranslasi dan berotasi, $a \neq 0$, $v \neq 0$ & $\omega \neq 0$
d. Awal tidak bertranslasi tapi berotasi, $a \neq 0$, v = 0 & $\omega \neq 0$

III. Sistem tidak seimbang arah rotasi, bila R = 0 & $M \neq 0$

Keadaan benda : v = konstan & $\omega \neq$ konstan, percepatan angular $\alpha \neq 0$

a. Keadaan awal diam dan dipercepat angular, $\alpha \neq 0$, v = 0 & $\omega = 0$
b. Berotasi tapi tidak bertranslasi , $\alpha \neq 0$, v = 0 & $\omega \neq 0$
c. Berotasi dan translasi, $\alpha \neq 0$, $v \neq 0$ & $\omega \neq 0$
d. Awal tidak berotasi tapi bertlanslasi, $\alpha \neq 0$, $v \neq 0$ & ω =0

IV. Sistem tidak seimbang arah translasi dan rotasi, bila $R \neq 0$ & $M \neq 0$

Keadaan benda : $v \neq$ konstan & ω = konstan dan ada percepatan angular $\alpha \neq 0$ dan percepatan linear $a \neq 0$

3.2 Diagram Benda Bebas (Free-Body Diagram)

Dalam mekanika statika yang menjadi permasalahan ialah mencari besar dan arah dari gaya-gaya reaksi yang timbul akibat gaya-gaya luar yang bekerja pada benda yang menjadi pusat perhatian kita.

Adapun gaya-gaya luar yang bekerja dapat berupa gaya berat dari bendanya sendiri, gaya-gaya aksi akibat suatu proses fisika dan kimia, atau gaya-gaya aksi yang timbul karena reaksi dari kontak phisik dari benda-benda yang lain ke benda yang menjadi pusat perhatian kita.

Untuk dapat menerapkan percepatan 3.1 dalam penganalisisan gaya-gaya yang bekerja pada suatu benda dengan benar dan teliti maka ditetapkanlah suatu cara penggambaran gaya-gaya pada suatu sistem gaya yang menjadi pusat perhatian kita yang disebut dengan DIAGRAM BENDA BEBAS (FREE BODY DIAGRAM). Diagram benda bebas fungsinya akan sama dengan neraca pembukuan pada ilmu tatabuku, massa atur dan volume atur pada mekanika fluida, termodinamika dan perpindahan panas.

Adapun cara membuat diagram benda bebas dari suatu benda adalah sebagai berikut :

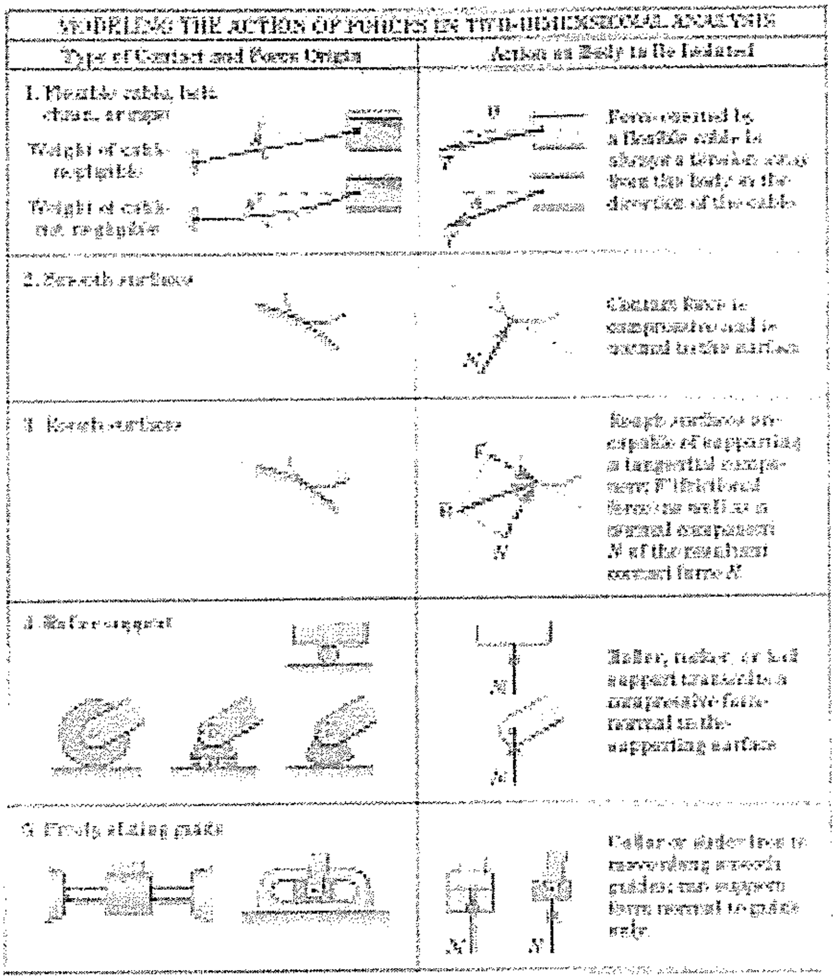
1. Pisahkan dan isolasi benda yang menjadi pusat perhatian kita dari benda-benda yang berhubungan kontak dengannya.
2. Gambarakan gaya-gaya aksi yang bekerja pada posisinya masing-masing sesuai dengan data yang ada pada benda yang diisolasi.
3. gambarakan gaya-gaya reaksi yang timbul akibat pemisahan kontak phisik dengan benda-benda yang lain (Hukum Newton II) dari benda yang diisolasi.
4. Dengan sistem gaya yang ada dari DIAGRAM BENDA BEBAS kita bangun dengan persamaan 3.1a &b, sehingga diperoleh persamaan matematik, kemudian pecahkan dengan operasi matematik sehingga diperoleh solusi yang dicari, atau hasil dari solusi tersebut merupakan gaya-gaya reaksi yang dicari.
5. Bila hasil diperhitungkan dari gaya-gaya reaksi yang kita hitung bertanda negatif (-) maka arah gaya yang sebenarnya adalah berlawanan arah dengan arah gaya yang kita gambar pada DIAGRAM BENDA BEBAS.

Perlu diingat bila saat menggambarkan DBB maka benda yang digambar merupakan suatu benda yang kaku dan kokoh, bila dalam penggambaran benda yang akan kita buat ternyata tidak kokoh maka ambillah dari komponen pembangun benda yang kokoh.

3.3 Macam-Macam Tumpuan dan Sifatnya

Sebelum melangkah lebih jauh tentang perhitungan gaya-gaya reaksi maka mutlak perlu dipahami arti dan fungsi dari tumpuan.

Tumpuan ialah suatu benda yang merupakan bagian dari suatu bangunan yang berfungsi sebagai sarana penahan atau penyangga dari bangunan agar bangunan tidak roboh bila dibebani, pembebanan dapat berupa beban akbiat berat sendiri, atau akibat beban dari luar. Pada dasarnya tumpuan dibagi menjadi tiga , yaitu :



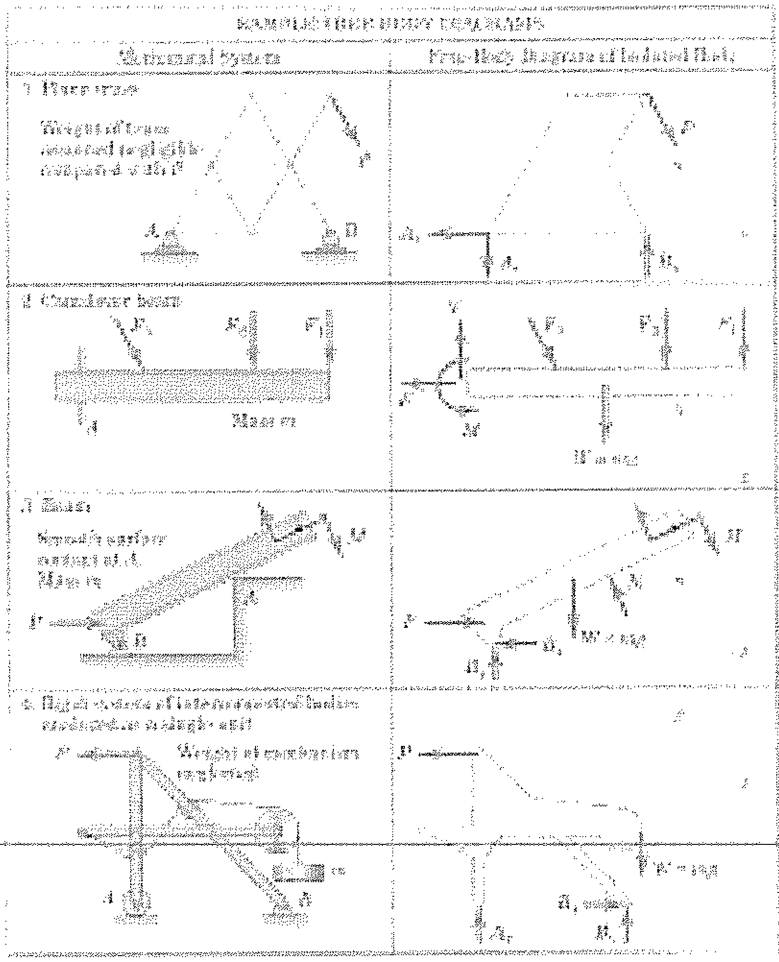
Gambar 3.1. Contoh macam-macam tumpuan

1. Tumpuan yang arah gaya reaksinya diketahui, tetapi besarnya tidak diketahui, tumpuan ini sifatnya hanya bisa menahan gerak translasi benda yang ditumpunya dalam arah tertentu, tetapi mutlah tidak bisa menahan gerak rotasi benda yang ditumpunya dalam segala arah sumbu benda. Misal pada : tumpuan roller, rocker, kontak antara permukaan yang licin, pegas, kabel, gerak pin pada alur yang licin, sambungan bola dan soket.
2. tumpuan yang arah dan besar reaksi tidak diketahui, tumpuan ini sifatnya dapat menahan gerak translasi benda yang ditumpunya dalam segala arah, tetapi tidak dapat menahan gerak rotasi benda dalam arah sumbu-sumbu yang tertentu dari benda yang ditumpunya. Misalnya: tumpuan engsel yang licin, sendi, bantalan luncur, roller bearing dan thrust bearing.

Perkecualian yaitu pada tumpuan kontak antar permukaan yang kasar, tumpuan ini bisa menahan gerak translasi sampai batas gaya gesek reaksinya tidak dilampaui,, tetapi sama sekali tidak bisa menahan gaya rotasi dalam segala arah.

3. Tumpuan yang arah,besar gaya reaksinya tidak diketahui, serta dapat menahan momen atau kopel dalam segala arah. Tumpuan ini sifatnya kokoh sempurnya, artinya dapat menahan gaya translasi dan rotasi dalam segala arah dari benda yang ditumpunya.

   Misalnya : tumpuan jepit (fixed), lasan, hubungan dua benda yang disambung dengan baut atau keling dengan elemen penyambungnya dua atau lebih, hubungan satu benda yang kontinyu, hubungan dua benda yang dilem.



Gambar 3.2. Contoh –contoh pembuatan Diagram Benda Bebas (DBB)

3.4 Keseimbangan dalam Dua Dimensi

Suatu benda dikatakan seimbang dalam dua dimensi bila semua gaya yang bekerja pada benda terletak pada suatu bidang tunggal , misal bidang x-y , dimana gaya resultantenya adalah nol dan momen resultantenya dari semua gaya yang bekerja pada benda terhadap sebuah sumbu yang sejajar garis normal bidang gayanya adalah nol. Pernyataan ini merupakan penjabaran lanjut dari persamaan 3.1 untuk keseimbangan dalam dua dimensi, dan persamaannya menjadi :

$$R = \sqrt{\left(\Sigma F^2{}_x + \Sigma F^2{}_y\right)} = 0$$

$$M = Mz = 0$$

Atau

$$\Sigma F_x = 0; \Sigma F_y = 0; \Sigma M_0 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3.2)$$

dimana ΣM_0 menyatakan jumlah aljabar dari momen-momen akibat semua gaya yang bekerja pada benda terhadap sebuah sumbu yang sejajar garis normal bidang gaya dan melalui suatu titik di 0 yang terletak pada benda atau di luar benda tapi masih terletak dalam bidangnya. Secara phisik ekspresi dalam persamaan 3.2 menyatakan bahwa suatu benda dalam keseimbangan di bawah pengaruh sistem gaya-gaya yang sebidang (coplanar) berarti ada sejumlah gaya yang bekerja dalam suatu arah yang saling berlawanan arahnya dan ada sejumlah momen terhadap suatu titik dalam suatu arah yang arahnya saling berlawanan. Secara grafis persamaan 3.2 menyatakan bahwa poligon gayanya harus tertutup karena gaya resultantenya nol, dan poligon talinya (funicular polygon) juga harus tertutup karena kopel resultantenya juga nol. Persamaan 3.2 merupakan syarat cukup yang harus dipenuhi untuk keseimbangan dalam dua dimensi, seperti yang telah dibahas pada sub bab 3.1, dan persamaan 3.2 merupakan suatu kondisi yang tidak saling bergantung. Salah satu hubungan dapat diperoleh tanpa dipengaruhi oleh hubungan yang lain bilamana keseimbangan tidak dipenuhi, misal $\Sigma F_x = 0$ tapi belum tentu $\Sigma F_y = 0$ dan $\Sigma M_0 = 0$ bila keadaan belum seimbang.

$$\Sigma F_x = 0; \Sigma M_A = 0; \Sigma M_B = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3.3)$$

dimana garis yang melalui titik A dan B tidak tegak lurus dengan arah x. Hal ini juga berlaku untuk arah yang lain, misah arah y, $\Sigma F_y = 0 ; \Sigma M_A = 0; \Sigma M_B = 0$, asalkan garis yang melalui titik A dan B tidak tegak lurus dengan arah y.

$$\Sigma M_A = 0; \Sigma M_B = 0; \Sigma M_C = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3.4)$$

dimana titik A , B , C tidak terletak pada satu garis lurus.

Untuk cara yang pertama pembuktiannya adalah sebagai berikut, misal pada suatu benda bekerja gaya R yang melalui titik A, dimana $\Sigma M_A = 0$, ingin dibuktikan bahwa $\Sigma M_B = 0$ dimana garis AB tidak tegak lurus arah x, dan $\Sigma F_x = 0$ maka R akan sama dengan nol.

Bila dalam keadaan seimbang di bawah pengaruh sistem gaya-gaya yang concurrent (bertemu di satu titik) maka jumlah momennya akan sama dengan nol, dan persamaan keseimbangannya menjadi

$\Sigma F_x = 0$; $\Sigma F_y = 0$

Untuk kasus keseimbangan akibat gaya-gaya yang sejajar, maka persamaannya ditulis dalam bentuk

$\Sigma F_x = 0$; $\Sigma M_0 = 0$

dimana x adalah arah dari gaya-gaya yang bekerja pada benda, dan titik 0 adalah suatu titik yang terletak pada bidang gaya.

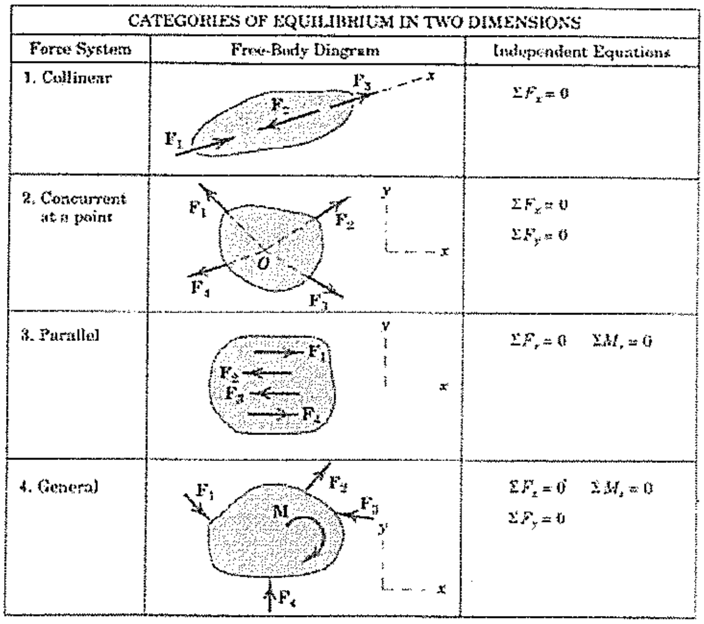
Cara lain yaitu dengan persamaan dua momen, dimana garis pertemuan antara pusat-pusat momennya tidak sejajar terhadap arah gayanya.

Kebanyakan sistem gaya-gaya sebidang yang seimbang hampir selalu dapat disederhanakan menjadi sistem tiga gaya yang concurrent, yang mana penyederhanaannya dapat dilakukan dengan mengkombinasikan secara langsung dari gaya-gaya yang ada. Prinsip ini sangat berguna untuk pemecahan secara aljabar maupun secara grafis dalam menentukan arah dari suatu gaya yang tidak diketahui. Perkecualian dari prinsip titik temu hanya ada pada kasus keseimbangan dari tiga gaya yang sejajar. Pada kasus ini titik temunya berada di suatu tempat yang jauh tak behingga. Keseimbangan dari gaya-gaya yang segaris (collinear) hanya diperlukan satu persamaan saja, dan hal ini tidak perlu dikombinasi lebih jauh lagi.

3.4.1 Kategori Persoalan Keseimbangan Dalam Dua Dimensi

Dari penerapan persamaan 3.2 dan beberapa contoh diatas maka persoalan keseimbangan dalam dua dimensi dapat digolongkan menjadi beberapa kasus seperti pada gambar 3.3.

Kasus 1, keseimbangan gaya-gaya yang segaris kerja (collinear forces), pada kasus ini hanya memerlukan satu persamaan gaya dalam arah garis kerjanya (misal : arah sumbu x), karena semua persamaan yang lain secara langsung dipenuhi.



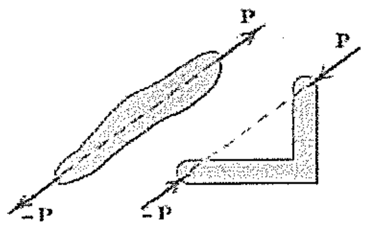
Gambar 3.3. kategori kesetimbangan

Kasus 2, keseimbangan gaya-gaya yang terletak dalam bidang x-y dan bertemu di satu titik 0, hanya memerlukan dua persamaan gaya , karena jumlah momen terhadap titik 0, yaitu terhadap sumbu z yang tegak lurus bidang x-y dan melalui titik 0 adalah nol.

Kasus 3, keseimbangan gaya-gaya sejajar (paralel) yang terletak pada satu bidang, hanya memerlukan satu persamaan gaya yang sejajar gaya dengan gaya-gaya nya (misal : x) dan satu persamaan momen terhadap sebuah sumbu (misal : z) yang tegak lurus terhadap bidang gaya dan melalui suatu titik sembarang yang terletak pada bidang gayanya.

Kasus 4, keseimbangan sistem sebarang yang terletak pada sebuah (misal : bidang x-y), memerlukan dua persamaan gaya dalam bidang dan satu persamaan momen terhadap sumbu (misal : sumbu) yang tegak lurus bidang gayanya.

Ada dua situasi keseimbangan yang seringkali membingungkan. Situasi yang pertama adalah keseimbangan dari satu benda yang mengalami aksi hanya dari dua buah gaya. Hal ini bisa saudara lihat pada gambar 3.4, dan kita tahu bahwa untuk sebarang batang dua gaya , gaya-gayanya harus menjadi sama besar, berlawanan arah, dan segaris kerja. Adapun bentuk dari bendanya tidaklah berpengaruh, karena dianggap benda tak bermassa. Anggapan ini cukup baik untuk kasus dimana gaya-gaya yang diterapkan pada benda jauh lebih besar dariapada berat bendanya.



Gambar 3.4 Batang Dua Gaya

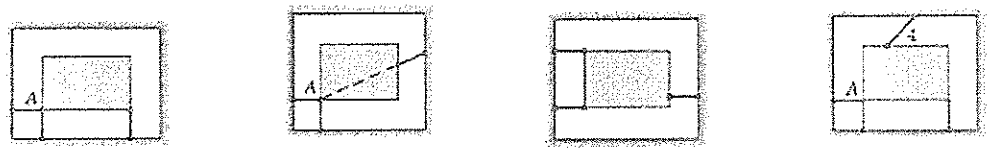
Situasi yang kedua adalah keseimbangan dari sebuah benda yang mengalami aksi dari tiga gaya. Kalau gaya-gaya tersebut tidak concurret, maka salah satu gaya yang memberikan momen resultante terhadap titik temu dari dua gaya yang lain, yang berarti menggagalkan keseimbangan momen terhadap setiap titik pada bidang. Perkecualian hanya berlaku bila tiga gaya sejajar. Pada kasus ini kita boleh menganggap titik temunya berada di jauh tak berhingga. Prinsip titik temu dari ketiga gaya dalam keseimbangan dapat dipakai dalam menyelesaikan persamaan gaya secara grafis. Dalam kasus ini poligon dari gaya-gayanya digambar dan dibuat tertutup, seperti pada gambar 3.8.b. Bila benda dalam keseimbangan mengalami aksi lebih dari tiga gaya, maka dapat disederhanakan menjadi batang tiga gaya dengan cara menggabungkan dua atau lebih dari gaya-gaya yang diketahui.

3.4.2 Ketentuan Statis dan Kekokohan

Sebuah benda atau kombinasi kaku dari berbagai elemen yang dianggap benda tunggal, yang mempunyai tumpuan luar atau kendala lebih dari "cukup" untuk menjaga posisi keseimbangannya disebut statis tak tentu. Tumpuan-tumpuan yang dapat dilepaskan tanpa merusak keadaan keseimbangan dari benda disebut sebagai lebihan (redundant). Jumlah kelebihan elemen tumpuan menyatakan tingkat ketidaktentuan statis dan besarnya sama dengan jumlah total dari gaya-gaya luar yang belum diketahui besarnya dikurangi jumlah persamaan yang tersedia dari persamaan keseimbangan yang tidak saling bergantung. Sebaliknya untuk benda-benda yang ditumpu oleh sejumlah tumpuan yang minimum cukup untuk menjamin konfigurasi keseimbangan disebut statis tertentu (statically determinate), dan sebutan statis tertentu juga berlaku untuk benda-benda yang jumlah persamaan keseimbangannya cukup untuk menentukan gaya-gaya luar yang besarnya belum diketahui.

Persoalan-persoalan dalam artikel keseimbangan ini dan juga untuk seluruh persoalan dalam mekanika teknik statika pada umumnya dibatasi sampai benda-benda statis tertentu dimana kendalanya sudah cukup untuk menjamin agar posisi seimbang dan jumlah gaya-gaya tumpuan yang belum diketahui besarnya dapat ditentukan secara lengkap oleh adanya persamaan keseimbangan yang tidak saling bergantungan. Hal ini perlu anda perhatikan pada saat akan menyelesaikan persoalan keseimbangan, sebab bila masalah yang saudara hadapi adalah benda statis tak tentu maka penggunaan persamaan keseimbangan yang tidak saling bergantungan saja belumlah mencukupi untuk menyelesaikan persoalan, dan bila anda tetap berkeras kepala dalam mencari jawabnya, maka usaha anda akan sia-sia saja. Supaya hal ini tidak terjadi sebaiknya anda hitung dahulu jumlah besaran yang akan saudara cari, kemudian bandingkan dengan jumlah persamaan keseimbangan yang tidak saling bergantungan yang tersedia dari sistem gaya yang saudara hadapi.

Dari pemaparan hubungan antara kendala (pembatas) terhadap keseimbangan , berikutnya kita lihat lebih jauh lagi tentang hubungan kendala terhadap perubahan bentuk bangunan. Keberadaan dari ketiga kendala untuk persoalan dua dimensi tidak selalu menjamin konfigurasi yang stabil. Pada gambar 3.5 menunjukkan empat perbedaan dari jenis-jenis kendala. Pada gambar tersebut menggambarkan sebuah plat yang ditumpu oleh beberapa link, hubungan link terhadap plat maupun terhadap landasan dilakukan oleh sebuah pin, dan masing-masing link dianggap mampu menahan gaya dalam arah sumbunya.



(a) Complete fixity Adequate constraints (b) Incomplete fixity Partial constraints (c) Incomplete fixity Partial constraints (d) Excessive fixity Redundant constraint

Gambar 3.5 Macam-macam kendala

Pada bagian a) dari gambar 3.5a, titik A dari plat (benda kaku) tidak dapat bergerak translasi karena ditahan oleh dua buah link, dan link yang ketiga menjaga gerak rotasi terhadap A. Jadi kedudukan plat tidak dapat berubah baik translasi, maupun rotasi, keadaan ini disebut kokoh sempurna dengan jumlah kendala yang mencukupi.

Pada bagian 3.5b link ketiga berada sedemikian rupa sehingga gaya yang ditransmisikan olehnya melalui titik A dimana kedua gaya pembatas yang lain beraksi. Jadi konfigurasi ini kendala-kendalanya tidak dapat melawan rotasi terhadap titik A, yang mana bisa terjadi saat benda menerima beban dari luar.

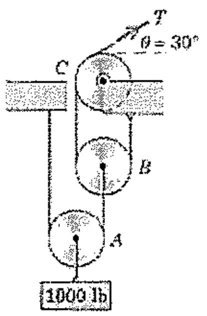
Konfigurasi 3.5c juga memberikan keadaan yang sama seperti pada bagian 3.5b karena ketiga link yang paralel tidak dapat menahan gerakan benda arah vertikal, keadaan 3.5b dan 3.5c disebut kokoh bersyarat, yang artinya konfigurasi disebut akan kokoh untuk suatu pembebanan yang tertentu, perlu saudara ingat untuk kasus 3.5b dan 3.5c walaupun jumlah kendalanya ada tiga, tetapi resultante dari kendalanya hanya ada dua.

Pada gambar 3.5d keadaan dari kendalanya kokoh sempurna walaupun link 4 dilepas, jadi dengan adanya link 4 berarti menambah jumlah kendala untuk menjaga agar posisi benda tidak berubah. Dalam hal ini link 4 sebagai kendala berlebih, dan keadaan benda sebagai statis tak tentu.

Dari keempat contoh pada gambar 3.5 dapat kita simpulkan bahwa kendala-kendala pada benda dalam keseimbangan dua dimensi dapat berupa cukup, bersyarat, atau berlebih. Dalam pelajaran mekanika teknik ini persoalan sebagaian besar adalah statis tertentu dengan jumlah kendala yang cukup.

<u>Contoh soal 3.1.</u> :

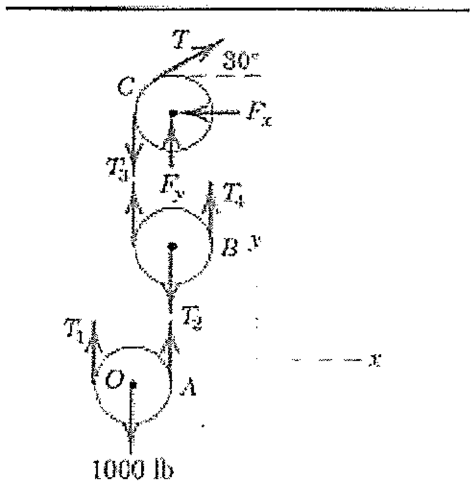
1. Tentukan besarnya tegangan tali T pada seutas kabel yang dibebani dengan 1000lb pada sistem puli seperti gambar.



Gambar 3.6. Gambar contoh soal 3.1

Jawab.

Langkah pertama yang dikerjakan adalah menggambarkan diagram benda bebas. DBB ditunjukkan pada gambar berikut.



Langkah selanjutnya adalah menyusun persamaan kesetimbangan. Pada langkah ini dimulai dari puli A.

$\Sigma Mo = 0$ $\quad$ $T_1r - T_2r = 0 \rightarrow T_1 = T_2$

$\Sigma Fy = 0$ $\quad$ $T_1 + T_2 - 1000 = 0 \rightarrow 2T_1 = 1000 \rightarrow T_1 = T_2 = 500lb$

Dari DBB pada puli B dapat diketahui bila:

$T_3 = T_4 = T_2/2 = 250lb$

Dari DBB pada puli C dapat diketahui apabila:

$T = T_3 = 250lb$

Gaya dukung F pada bantalan C dapat dihitung dengan cara menerapkan kesetimbangan gaya pada arah x dan y. Hal ini menghasilkan

$\Sigma Fx = 0 \rightarrow 250 \cos 30^o - Fx = 0 \rightarrow Fx = 217$ lb

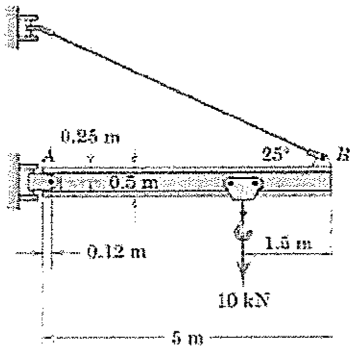
$\Sigma Fy = 0 \rightarrow Fy + 250 \sin 30^o - 250 = 0 \rightarrow Fy = 125$ lb

Dengan demikian diperoleh

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = \sqrt{(217)^2 + (125)^2} = 250 \text{ lb}$$

Contoh soal 3.2. :

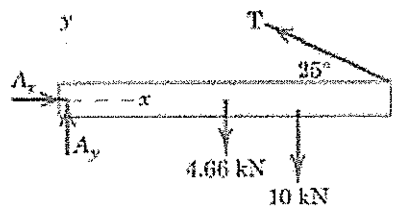
2. Carilah besarnya gaya T yang menyangga suatu batang I dan gaya-gaya reaksi di titik A seperti ditunjukkan pada gambar. I-beam standar 0,5m dan berat 95kg/m.



Gambar 3.7. Gambar contoh soal no 3.2

Jawab.

Langkah pertama yang dikerjakan adalah menggambarkan diagram benda bebas. DBB ditunjukkan pada gambar berikut.



Free-body diagram

Langkah selanjutnya adalah menyusun persamaan kesetimbangan momen dititik A.

$\Sigma M_A = 0$ ➔

(Tcos25°).0,25 + (Tsin25°)(5 – 0,12) – 10(5 – 1,5 – 0,12) – 4,66 (2,5 – 0,12) = 0

Sehingga dapat diperoleh T = 19,61 kN.

Gaya-gaya reaksi di titik A dapat dihitung dengan menyusun persamaan kesetimbangan pada arah x dan y sebagai berikut.

$\Sigma Fx = 0$ ➔ Ax – 19,61 cos25°= 0 ➔ Fx = 17,77kN

$\Sigma Fy = 0$ ➔ Ay + 19,61 sin 25° = 0 ➔ Fy = 6,37 kN

Dengan demikian diperoleh

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = \sqrt{(17,77)^2 + (6,37)^2} = 18,88 \text{ kN}$$

3.5 Keseimbangan dalam Tiga Dimensi

Sekarang kita perluas prinsip-prinsip dan metode-metode yang telah dikembangkan untuk keseimbangan dua dimensi kepada kasus keseimbangan tiga dimensi. Pada sub bab 3.1 kondisi umum untuk keseimbangan dari sebuah benda dinyatakan dalam persamaan 3.1, yang isinya adalah gaya resultante dan kopel resultante pada benda dalam keseimbangan haruslah sama dengan nol. Pernyataan tersebut bila ditulis dalam bentuk skalar tiga dimensi adalah sebagai berikut

$$\Sigma F = 0 \quad \text{atau} \quad \Sigma F_x = 0, \quad \Sigma F_y = 0, \quad \Sigma F_z = 0$$

$$\Sigma M = 0 \quad \text{atau} \quad \Sigma M_x = 0, \quad \Sigma M_y = 0, \quad \Sigma M_z = 0 \qquad \text{..................... (3.6)}$$

Tiga persamaan skalar yang pertama menyatakan bahwa sebuah benda dalam keseimbangan bila gaya resultantenya dalam tiga arah sumbu koordinatnya sama dengan nol. Sedangkan pada kelompok yang kedua lebih jauh menerangkan bahwa keseimbangan memerlukan momen resultante dalam tiga arah sumbu koordinatnya sama dengan nol. Keenam persamaan ini adalah perlu dan merupakan syarat cukup untuk menyatakan keadaan keseimbangan dalam tiga dimensi. Pemilihan sumbu acuan (referensi) dapat dipilih sesuai kehendak kita, untuk operasi vektoris harus tetap digunakan aturan tangan kanan.

Keenam hubungan skalar dari persamaan 3.6 keadaannya tidak saling berhubungan (independent) karena keberlakuan yang satu tidaklah mempengaruhi yang lain. Sebagai contoh, untuk sebuah motor yang dipercepat di atas jalan raya yang lurus dan permukaan jalan dianggap sebagai sumbu x, dari Hukum Newton II menyatakan bahwa gaya resultante pada motor sama dengan massa motor dikalikan percepatannya. Berarti $\Sigma F_x \neq 0$ padalah persamaan keseimbangan gaya pada kedua sumbu yang lain adalah nol. Hal ini serupa , kalau sebuah flywheel (roda gendheng) dari sebuah mesin yang dipakai untuk mempercepat mobil, yang berarti roda gendheng mengalami peningkatan percepepatan sudut terhadap sumbu x, hal ini berarti keseimbangan rotasinya tidak dipenuhi. Karena itu , untuk flywheel sendiri $\Sigma M_x \neq 0$, dan $\Sigma F_x \neq 0$, tetapi persamaan keseimbangan yang lain ($\Sigma M_y \neq 0$, $\Sigma M_z \neq 0$, $\Sigma F_y \neq 0$, dan $\Sigma F_z \neq 0$) masih dipenuhi pada sumbu-sumbu pusat massanya..

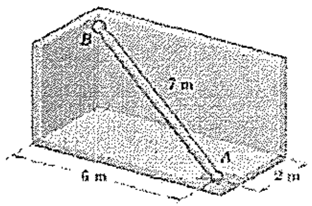
Dalam bentuk vektor persamaan 3.6 dinyatakan dalam dua tahapan. Tahap pertama gaya-gaya dinyatakan dalam koordinat satuan vektor i,j, dan k. Untuk persamaan yang pertama, F = 0 jumlah vektor akan menjadi nol jika dan hanya jika koefisien dari i,j,dan k adalah nol. Ketiga penjumlahan ini mirip dengan penjumlahan skalar pada persamaan keseimbangan.

Tahap yang kedua, untuk persamaan M = 0 , dimana jumlah momennya diambil terhadap suatu titik 0, kemudian nyatakan momen dari setiap gaya dalam operasi cross product r x F dimana r adalah vektor posisi dari 0 ke suatu titik yang dilalui garis kerjan vektor gaya F. Jadi M = (r x F) = 0. Koefisien-koefisien dari i , j, dan k pada hasil persamaan momen bila di nol kan, akan diperoleh hubungan seperti bentuk persamaan momen skalar.

Contoh Soal 3.3:

Sebuah batang baja yang berpenampang seragam dengan panjang 7 m, massanya 200 kg dan ditumpu oleh sambungan bola dan soket di A pada batang horisontal.

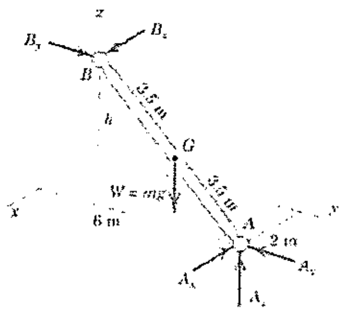
Bola di ujung B menyentuh dinding vertikal yang licin. Hitunglah gaya-gaya reaksi di A dan B.



Gambar 3.8. Gambar contoh soal no 3.3

Pemecahan Masalah :

Buatlah diagram benda bebas dari batang AB, pada B karena bertumpu pada pertemuan dua dinding vertikal maka timbul gaya normal dalam dua arah. Di tengah-tengah batang ada gaya berat W = m.g = 200 (9,81) = 1962 N, gaya reaksi di A oleh lantai terhadap bola dinyatakan dalam komponen x,y, dan z. Posisi vertikal B diperoleh dari $7^2 = 2^2 + 6^2 + h^2$, h = 3 m. Buat sumbu koordinat siku-siku.



DBB Batang

Pemecahan secara vektor .

Kita gunakan A sebagai pusat momen untuk mengeliminir gaya-gaya di A (A_x, A_y, dan A_z). Kemudian kita tentukan vektor posisi B dan G terhadap A , untuk menghitung momen terhadap A

r_{AG} = -1i – 3j + 1,5k m dan r_{AB} = -2i – 6j + 3k m

dimana pusat massa G berada di tengah-tengah AB.

Persamaan vektor momennya terhadap A

$\sum M_A = 0,\ r_{AB}\ \mathrm{x}\ (B_x + B_y) + r_{AG}\ \mathrm{x}\ W = 0$

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ -2 & -6 & 3 \\ B_x & B_y & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & -3 & 1,5 \\ 0 & 0 & -1962 \end{vmatrix}$$

$(-3\ B_y + 5886)i + (3\ B_x - 1962)j + (-2\ B_y + 6\ B_x)k = 0$

dengan kesamaan dari koefisien i,j,dan k terhadap nol diperoleh

B_x = 654 N dan B_y = 1962 N

gaya-gaya di A ditentukan dari persamaan keseimbangan gaya

$\sum F = 0\ ,\ (654 - A_x)\ i + (1962 - A_y)j + (-1962 + A_z)\ k = 0$

dan $A_x = 654$ N $A_y = 1962$ N $A_z = 1962$ N

sehingga

$$A = \sqrt{A^2{}_x + A^2{}_y + A^2{}_z} = \sqrt{654^2 + 1962^2 + 1962^2} = 2850N$$

pemecahan secara skalar.

Buat persamaan momen terhadap sumbu yang melalui A dan sejajar terhadap sumbu x,y

$\sum M_{Ax} = 0\ ,\ 1962\ (3) - 3\ B_y = 0\ B_y = 1962N$

$\sum M_{Ay} = 0\ ,\ -1962(1) + 3\ B_x = 0 \qquad B_x = 654\ N$

dari persamaan gaya-gaya

$\sum F_x = 0$, $-A_x + 654 = 0$ $\quad A_x = 654$ N

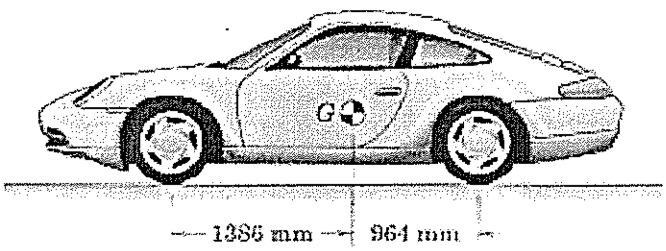
$\sum F_y = 0$, $-A_y + 1962 = 0$ $\quad A_y = 1962$ N

$\sum F_z = 0$, $-A_z - 1962 = 0$ $\quad A_z = 1962$ N

SOAL-SOAL LATIHAN

1. Pusat masa G dari sebuah mobil seberat 1400kg ditunjukkan pada gambar. Carilah besarnya gaya normal pada setiap rodanya ketika mobil tersebut dalam kesetimbangan.

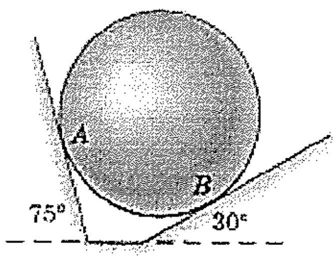
   Jawab : $N_f = 2820$ N & $N_r = 4050$ N



Gambar soal no 1

2. Sebuah bola homogen dan permukaannya licin diletakkan pada suatu alur seperti ditunjkkan pada gambar. Hitunglah gaya kontak pada titik A dan B.

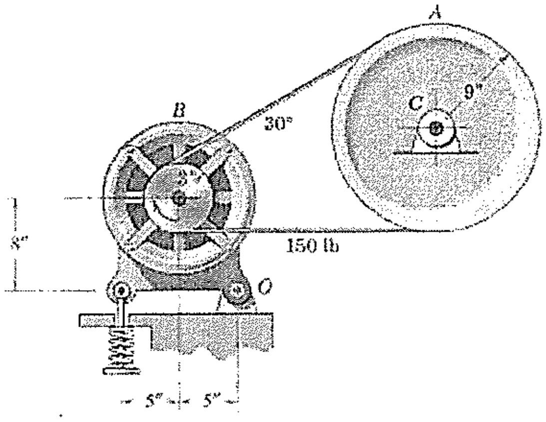
   Jawab : $N_A = 101{,}6$ N & $N_B = 196{,}2$ N



Gambar soal no 2

3. Puli A meneruskan torsi sebesar 900 lb-in kesebuah pompa melalui poros di C. Tegangan sabuk pada sisi bawah sebesar 150lb. Motor penggerak B memilik berat 200lb dan berputar searah jarum jam. Hitunglah besarnya gaya R yang bekerja di titik O.

   Jawab : R = 287 lb

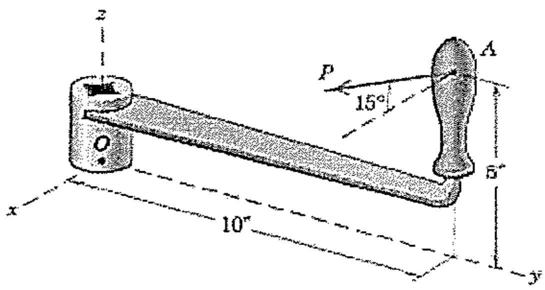


Gambar soal no 3

4. Suatu gaya P sebesar 40lb bekerja pada suatu handel mesin seperti ditunjukkan pada gambar. Tuliskanlah gaya dan momen reaksi dititik O dalam bentuk vektor. Abaikan berat dari handel tersebut.

   Jawab : R = -38,6i – 10,35k lb

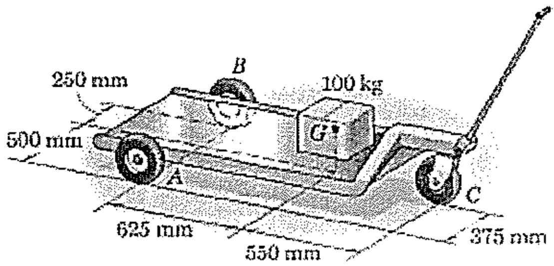
   M = -103,5i – 193,2j + 386k lb-in



Gambar soal no 4

5. Suatu gerobak pengangkut barang beroda tiga mengangkut benda seberat 100kg seperti ditunjukkan pada gambar. Hitungiah pertambahan besarnya gaya normal disetiap rodanya akibat berat benda yang diangkutnya tersebut.

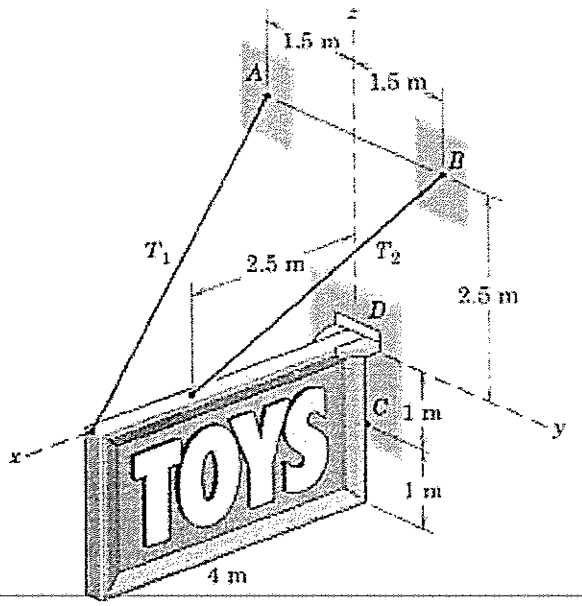
   Jawab : ΔN_A= 66,1 N, ΔN_B= 393 N & ΔN_C= 522 N



Gambar soal no 5

6. Sebuah papan nama toko masanya 100kg dengan pusat masa ditengah papan seperti ditunjukkan pada gambar. Tumpuan dititik C dapat dianggap sebagai sambungan bola dan soket. Tumpuan dititik D hanya membatasi gerak kearah sumbu y saja. Hitunglah besarnya gaya tali T1 dan T2, besarnya gaya reaksi di C dan gaya lateral di titik D.

   Jawab : T1 = 347N, T2 = 431N, R = 63,1N & C = 768N



Gambar soal no 6

BAB 4

STRUKTUR

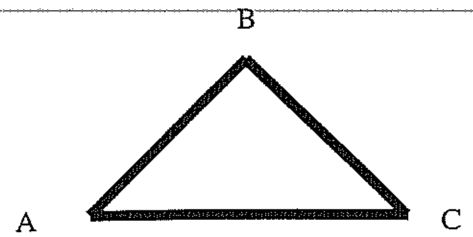
4.1. Pendahuluan.

Pada bab sebelumnya pembahasan ditujukan pada keseimbangan benda kaku tunggal atau struktur yang terdiri dari bagian-bagian yang dihubungkan, secara keseluruhan telah dianalisa sebagai benda kaku tunggal. Sekarang kita akan membahas lebih jauh persoalan keseimbangan struktur, yaitu mengenai penentuan gaya-gaya dalam struktur atau gaya-gaya aksi dan reaksi diantara bagian-bagian yang dihubungkan. Dalam menganalisa gaya-gaya dalam ini bagian-bagian struktur harus dipisahkan dan dengan menerapkan persamaan keseimbangan pada masing-masing bagian atau kombinasi dari beberapa bagian, gaya-gaya dalam struktur tersebut dapat ditentukan. Analisa ini menerapkan kaidah hukum Newton ketiga, yang berbunyi "Gaya-gaya aksi dan reaksi diantara benda-benda yang saling berkontak sama besarnya, sama garis kerjanya dan berlawanan arah". Pada bab ini akan dikemukakan struktur statis tertentu, yaitu struktur yang memenuhi syarat cukup persamaan keseimbangan statika.

4.2. TRUS

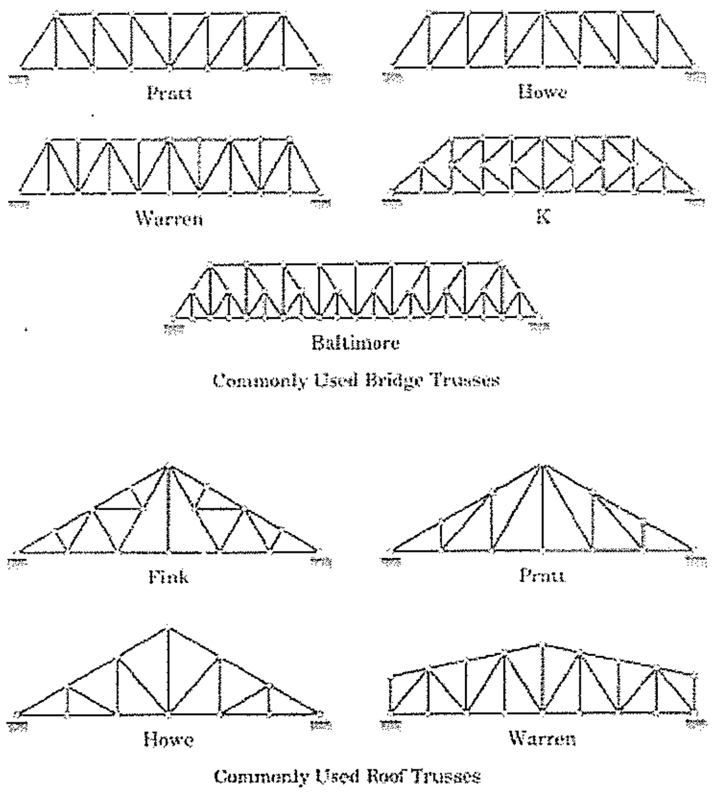
4.2.1. Definisi Trus

Suatu rangka yang disusun dari batang-batang lurus yang dihubungkan pada ujung-ujungnya untuk membentuk struktur yang kokoh disebut trus. Trus dengan susunan batang-batang terletak pada satu bidang disebut trus bidang (plane truss), sebaliknya bila susunan batang-batang trus membentuk konfigurasi tiga dimensi disebut trus ruang (space truss). Contoh-contoh umum trus adalah struktur jembatan, atap , mesin derek, menara dan beberapa struktur yang lain. Batang-batang yang digunakan adalah profil I, kanal, sudut, dan batang-batang dengan profil khusus yang dihubungkan bersama-sama pada ujung-ujungnya dengan sambungan keling, las, baut atau pin. Contoh trus bidang sederhana ditunjukkan pada Gambar 4.1.



Gambar 4.1. Struktur trus sederhana

Struktur yang sebenarnya dapat tersusun dari beberapa trus bidang yang dihubungkan bersama-sama untuk membentuk rangka ruang (space frame). Setiap trus ini dirancang untuk menerima beban yang bekerja pada masing-masing bidangnya dan dengan demikian dapat diperlakukan sebagai trus bidang. Beberapa contoh trus yang umum digunakan ditunjukkan seperti pada Gambar 4.2.



Gambar 4.2. Beberapa bentuk struktur trus yang lazim digunakan

4.2.2. Asumsi dan Persayaratan Trus

Sebelum kita membahas beberapa metode untuk menganalisa gaya-gaya luar dan gaya-gaya dalam struktur, terlebih dahulu perlu ditentukan asumsi dan persyaratan trus yang terdiri dari:

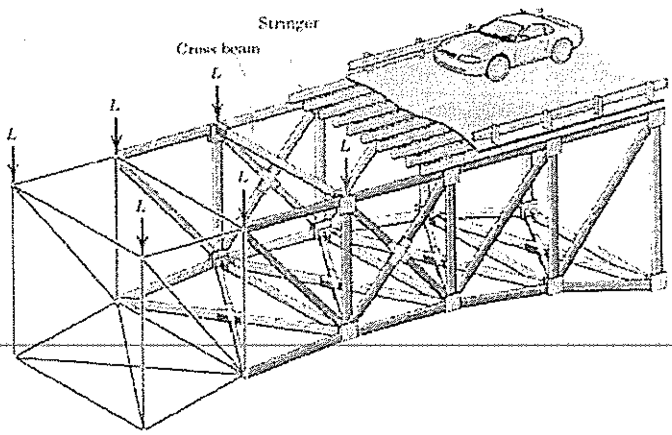
1. Trus memenuhi syarat cukup untuk kondisi keseimbangan statika
2. Hubungan antar batang hanya terdapat pada ujung-ujungnya atau tidak ada batang kontinu yang diantaranya terdapat titik hubung (joint) dengan batang-batang yang lain

3. Gaya-gaya luar yang bekerja pada trus dianggap terkonsentrasi pada titik-titik hubung dan tidak terdapat gaya-gaya atau momen-momen luar yang bekerja pada batang diantara dua titik hubung
4. Ujung-ujung batang dihubungkan oleh sambungan pin tuna friksi, walaupun sebenarnya dikeling atau dilas. Dengan demikian gaya yang bekerja pada setiap ujung batang berkurang menjadi satu gaya dan tidak ada momen kopel.

Dari uraian diatas, gaya-gaya yang bekerja pada setiap batang trus diasumsikan dua gaya, satu garis kerja, sama besar, dan berlawanan arah yang diterima pada setiap ujung batang. Dengan demikian setiap batang dapat diperlakukan sebagai batang dua gaya (two force member), dan keseluruhan trus bisa dianggap sebagai susunan batang-batang dua gaya.

Perlu diperhatikan, batang dua gaya tidak harus berupa batang lurus dengan garis kerja gaya-gaya berimpit dengan sumbu batang. Hanya saja, setiap bagian dari batang tersebut selain menerima gaya-gaya dalam berupa gaya aksial juga gaya geser V dan momen letur M.

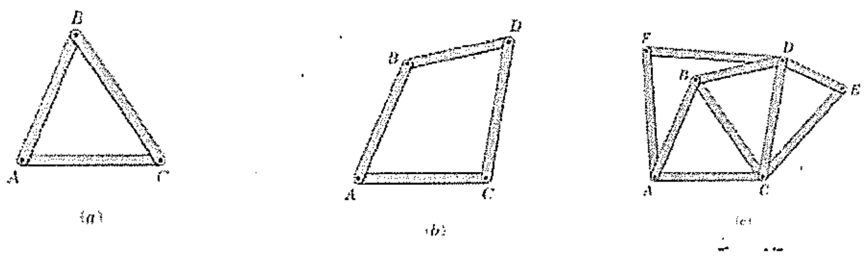
Apabila beban luar terkonsentrasi pada batang diantara dua titik hubung atau beban luar terdistribusi sepanjang batang seperti pada jembatan, maka perlu dilengkapi sistim lantai dengan kombinasi stringer dan batang-batang lantai agar dapat mentransmisikan beban pada titik-titik hubung seperti terlihat pada Gambar 4.3.



Gambar 4.3. Stringer pada jembatan

4.2.3. Trus Bidang Sederhana

Rangka tiga batang yang dihubungkan oleh pin-pin pada ujungnya dan membentuk struktur trus segitiga adalah elemen dasar dari trus, seperti terlihat pada Gambar 4.4a. Rangka ini bila diberi beban pada titik B akan terdeformasi kecil sekali dan deformasi hanya mungkin terjadi karena perubahan panjang batang yang kecil, elemen dasar segitiga ini membentuk trus kokoh. Bandingkan dengan rangka empat batang yang dihubungkan oleh pin-pin pada titik-titik A, B, C dan D. Jika beban diberikan pada titik B, rangka ini akan roboh dan kehilangan bentuk aslinya seperti terlihat pada Gambar 4.4b.



Gambar 4.4. Konfigurasi beberapa disain rangka

Untuk trus bidang sederhana seperti terlihat pada Gambar 4.3 terdapat hubungan antara jumlah batang, m dan jumlah pin atau titik hubung j. Dalam kasus ini mulai dengan segitiga a awal ABC, yang terdiri dari tiga batang dan tiga titik hubung, untuk setiap titik hubung terdapat dua batang. Pengembangan selanjutnya adalah dengan penambahan dua batang dan satu titik hubung baru, begitu seterusnya.Dengan demikian dapat kita tulis:

$$m - 3 = 2(j - 3)$$

Dari sini

$$m = 2j - 3 \quad \text{.......... (4.1)}$$

Hubungan yang dikemukakan seperti pada persamaan (4.1) adalah kondisi yang diperlukan untuk stabilitas tetapi bukan merupakan kondisi cukup, karena satu atau lebih batang-batang m dapat disusun dengan beberapa cara tetapi tidak memberikan sumbangan terhadap suatu konfigurasi yang stabil dari keseluruhan trus. Berkaitan dengan stabilitas tersebut, secara umum struktur trus bidang dapat diklasifikasikan kedalam 3 bagian :

a) Tidak kokoh (not rigid).

pada kondisi ini m+3 < 2j dan trus tidak stabil. Setiap perpindahan atau pergeseran dari kondisi keseimbangan akan menyebabkan struktur roboh (collapse). Kontruksi semacam ini bukan disebut struktur trus, tetapi suatu mekanisme. (Gambar 4.9a).

b) Kokoh (just rigid).

Pada kondisi ini persamaan (4.1) dipenuhi, bila satu batang dihilangkan akan menghancurkan kekakuannya dapat menyebabkan sebagian atau keseluruhan struktur roboh (Gambar 4.9b). Struktur semacam ini adalah struktur statis tertentu (statically determinate).

c) Sangat kokoh (over rigid).

Pada kondisi ini m + 3 > 2 j, dengan menghilangkan satu batang tidak akan menghancurkan kekakuannya (Gambar 4.9c). Struktur semacam ini adalah struktur statis tak tentu (statically indeterminate).

4.2.4. ANALISA TRUS

Untuk menganalisa gaya-gaya dalam struktur dan reaksi tumpuan, terdapat tiga metode yang biasa digunakan dalam analisa trus, yaitu :

1. Metode titik hubung (method of joints)
2. Metode potongan (method of sections)
3. Metode grafis dengan diagram Maxwell

Analisa trus dengan ketiga metode ini bertitik tolak dari asumsi dan persyaratan trus seperti yang telah dikemukakan sebelumnya. Pada materi ini, metode analisa trus yang dibahas hanyalah metode titik join dan metode potongan.

4.2.4.1. Analisa Trus Dengan Metode Titik Hubung

Diatas telah dikemukakan pengertian trus yang terdiri dari sekelompok sambungan pin-pin dan batang-batang dua gaya. Karena batang dua gaya selalu berada pada kondisi keseimbangan, maka menurut Hukum Newton ketiga tiap-tiap titik hubung juga berada dalam kondisi keseimbangan. Pengertian ini mendasari ide untuk menentukan gaya-gaya tiap batang dengan menganalisa kondisi keseimbangan gaya-gaya yang bekerja pada tiap titik hubung tersebut, prosedur ini disebut metode titik hubung (method of joints).

Dalam menganalisa keseimbangan setiap titik hubung ini hanya diperlukan dua persamaan keseimbangan gaya, yaitu :

$$\sum Fx = 0 \text{ dan } \sum Fy = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4.3)$$

Dengan demikian, analisa sebaiknya dimulai dari titik hubung yang sekurang-kurangnya terdapat satu gaya diketahui dan tidak lebih dari dua buah gaya yang tidak diketahui. Jika pada trus terdapat sejumlah j titik hubung, maka diperlukan 2j persamaan keseimbangan gaya. Dari persamaan (4.1) diperoleh bahwa, jumlah gaya yang tidak diketahui yang dihitung dari diagram benda bebas pin-pin adalah m+3. Artinya gaya-gaya pada semua batang, termasuk reaksi tumpuan, dapat diperoleh dari diagram benda bebas pin-pin. Sedikit kesulitan mungkin akan dijumpai dengan cara ini, karena gaya-gaya pada semua batang dan reaksi tumpuan baru bisa diperoleh setelah memecahkan persamaan simultan yang seringkali cukup rumit bila jumlah titik hubungnya banyak.

Berdasarkan asumsi bahwa trus adalah benda kaku yang berada dalam keseimbangan, maka komponen gaya-gaya reaksi tumpuan lebih dahulu dapat dihitung dengan menerapkan 3 persamaan keseimbangan gaya dan momen.

$$\sum Fx = 0 \text{ , } \sum Fy = 0 \text{ dan } \sum M = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4.4)$$

Selanjutnya gaya-gaya tiap batang dapat dihitung dengan mengevaluasi keseimbangan setiap titik hubung seperti yang telah diuraikan diatas. Cara ini lebih memudahkan dalam memecahkan persamaan simultan daripada cara tersebut diatas, dan penjelasan hal ini akan diberikan dalam bentuk contoh soal.

Berikut ini adalah prosedur umum analisa trus dengan metode titik hubung :

1. Tetapkan sistim sumbu x dan y, sebagai perjanjian untuk mewakili gaya-gaya kedalam dua komponen, komponen x dan y.
2. Buat diagram benda bebas seluruh trus, dan asumsikan arah gaya-gaya reaksi tumpuan. Tentukan gaya-gaya reaksi tersebut dengan menggunakan persamaan (4.4). Teliti kebenaran asumsi di atas dengan melihat tanda besaran gaya-gaya reaksi tersebut yang diperoleh dari hasil perhitungan. Apabila tanda besaran gaya tersebut negatif, maka arah gaya kebalikan

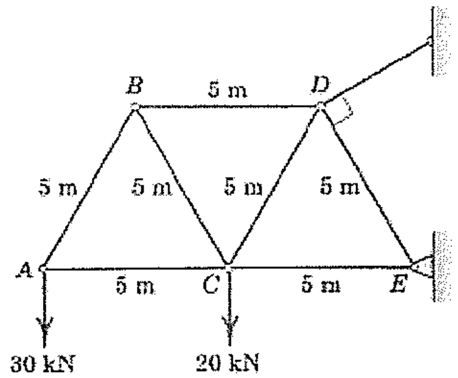
dari asumsi semula; sebaliknya bila tandanya positif, maka arah gaya sesuai dengan yang diasumsikan.

3. Buat diagram benda bebas setiap pin dan asumsikan arah gaya-gaya yang tidak diketahui. Lakukan analisa keseimbangan gaya tiap pin, dimulai dari pin degan dua buah gaya yang tidak diketahui. Gaya-gaya ini dapat diperoleh dari per (4.3) dan hasilnya dipindahkan (dengan mengingat kaidah Hukum Newton ke tiga) ke pin yang berdekatan dan diperlakukan sebagai besaran yang diketahui pada pin ini. Prosedur ini dapat diulangi sampai semua gaya-gaya yang tidak diketahui telah diperoleh.

Untuk mengetahui apakah batang menerima gaya tarik/tekan, dapat ditentukan dengan melihat diagram benda bebas pin. Jika arah gaya menuju pin, maka batang menerima gaya tekan sebaliknya jika arah gaya menjauhi pin, maka batang menerima gaya tarik.

Contoh Soal 4.1.:

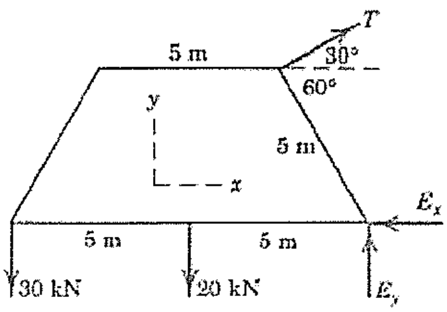
Tentukan gaya semua batang dengan metode titik hubung untuk trus seperti ditunjukkan pada gambar.



Gambar 4.5. Gambar contoh soal no 4.1

Jawab.

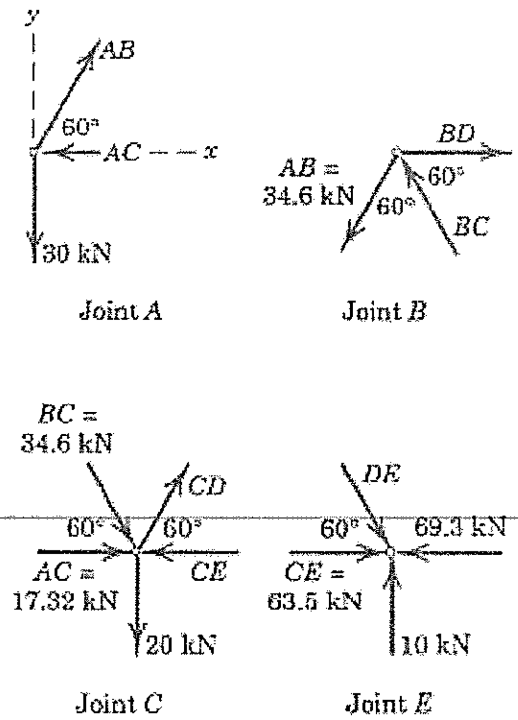
Langkah awal adalah mengambarkan erlebih dahulu DBB, selanjutnya menyusun persamaan kesetimbangan sehingga dapat dihitung besarnya gaya-gaya reaksi ditumpuan. DBB trus ditunjukkan pada gambar berikut.



Persamaan kesetimbangan yang dapat disusun dan besarnya gaya reaksi yang diperoleh adalah sebagai berikut :

$[\Sigma M_E = 0]$	$5T - 20(5) - 30(10) = 0$	$T = 80$ kN
$[\Sigma F_x = 0]$	$80 \cos 30° - E_x = 0$	$E_x = 69.3$ kN
$[\Sigma F_y = 0]$	$80 \sin 30° + E_y - 20 - 30 = 0$	$E_y = 10$ kN

Langkah selanjutnya adalah menggambarkan kesetimbangan gaya-gaya pada tiap-tiap titik sambungan seperti ditunjukkan pada gambar berikut.



Gaya-gaya pada titik join

Kesetimbangan gaya pada join A dan besarnya gaya pada batang AB dan AC adalah sebagai berikut.

$[\Sigma F_y = 0] \quad 0.866AB - 30 = 0 \quad AB = 34.6 \text{ kN } T \quad Ans.$

$[\Sigma F_x = 0] \quad AC - 0.5(34.6) = 0 \quad AC = 17.32 \text{ kN } C \quad Ans.$

Kesetimbangan gaya pada join B dan besarnya gaya pada batang BD dan BC adalah sebagai berikut.

$[\Sigma F_y = 0] \quad 0.866BC - 0.866(34.6) = 0 \quad BC = 34.6 \text{ kN } C \quad Ans.$

$[\Sigma F_x = 0] \quad BD - 2(0.5)(34.6) = 0 \quad BD = 34.6 \text{ kN } T \quad Ans.$

Kesetimbangan gaya pada join C dan besarnya gaya pada batang CD dan CE adalah sebagai berikut.

$[\Sigma F_y = 0] \quad 0.866CD - 0.866(34.6) - 20 = 0$

$CD = 57.7 \text{ kN } T \quad Ans.$

$[\Sigma F_x = 0] \quad CE - 17.32 - 0.5(34.6) - 0.5(57.7) = 0$

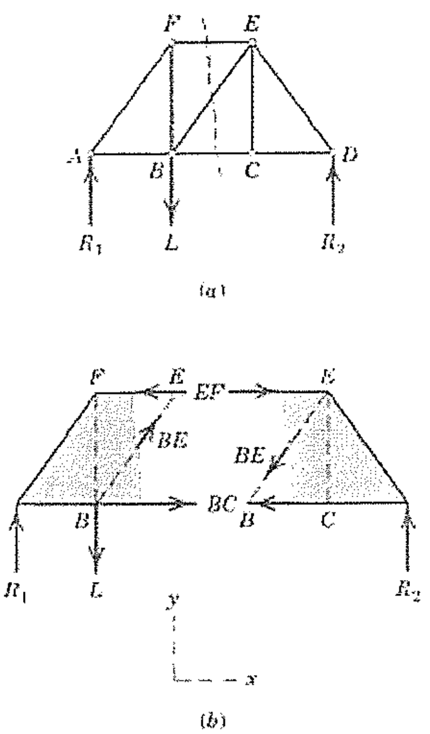
$CE = 63.5 \text{ kN } C \quad Ans.$

Kesetimbangan gaya pada join E menghasilkan 0,866DE = 10, sehingga DE = 11,55kN.

4.2.4.2. Analisa Trus Dengan Metode Potongan

Metode ini dapat digunakan untuk menentukan gaya aksial beberapa batang yang dipilih tanpa perlu menghitung gaya-gaya semua titik hubung, seperti pada metode sebelumnya. Keberhasilan atau kegagalan dalam penerapan metode ini tergantung pada pemilihan seksi pemotongannya. Pada umumnya, seksi pemotongan terdiri dari 3 batang, jadi hanya 3 gaya yang tidak diketahui dan dapat dihitung dengan tiga persamaan keseimbangan. Gambar 4.6. menunjukkan bagaimana metode ini digunakan.

Kadang-kadang untuk memperoleh hasil yang diinginkan, kita perlu membuat lebih dari satu seksi pemotongan atau menggunakan gabungan metode potongan dengan metode titik hubung.

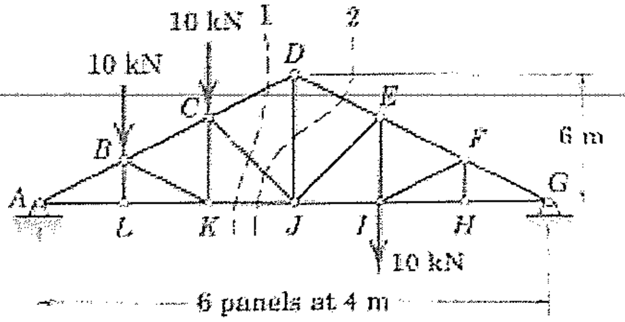


Gambar 4.6. Ilustrasi metode potongan.

(misalkan ingin diketahui gaya-gaya pada batang BC & BE, maka pemotongan melewati batang FE, BC dan EF. Batang yang terpotong tersebut selanjutnya digantikan dengan gaya-gaya seperti ditunjukkan pada gambar 4.5b. Selanjutnya dengan menerapkan persamaan kesetimbangan, dapatlah dicari besarnya gaya-gaya batang tersebut.)

Contoh soal 4.2.

Hitung gaya pada batang DJ dari trus atap Howe seperti diperlihatkan pada gambar berikut. Abaikan semua komponen gaya horisontal pada tumpuan.



Gambar 4.7. Gambar contoh soal no 4.2

Pemecahan soal:

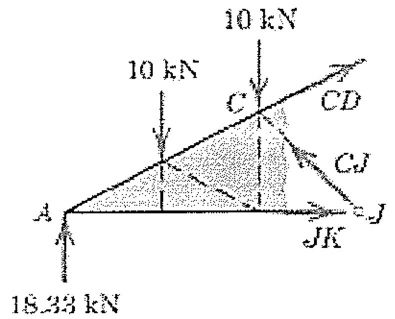
Langkah awal adalah menggambarkan DBB dari trus tersebut. Selanjutnya menyusun persamaan kesetimbangan untuk mencari besarnya gaya-gaya reaksi di tumpuan.

$$+\circlearrowleft \sum M_A = 0,\quad R_G(18)-(1)(3)-(1)(6)-(1)(12)=0 \Leftrightarrow R_G = \frac{21}{18} = 1{,}17kN$$

$$+\uparrow \sum F_Y = 0,\quad R_A + 1{,}17 - 3 = 0 \Leftrightarrow R_A = 1{,}83kN$$

Untuk menghilangkan gaya pada batang DJ kita gunakan metode potongan, namun tidak mungkin membuat seksi pemotongan melalui DJ (misal, seksi pemotongan 2) tanpa memotong empat batang yang gaya-gayanya tidak diketahui. Untuk itu perlu dilakukan satu seksi pemotongan lain (misal, seksi pemotongan 1), sebelum memperhatikan seksi pemotongan 2, dimana hanya memotong tiga batang yang gaya-gayanya tidak diketahui. Pemilihan seksi pemotongan ini harus dapat digunakan untuk menghitung sebagian gaya-gaya batang dari seksi pemotongan 2 (minimal satu batang) agar selanjutnya gaya batang DJ dapat dihitung dari seksi pemotongan 2 dengan menggunakan prisnsip-prinsip keseimbangan gaya dan momen.

Dari seksi pemotongan 1 :



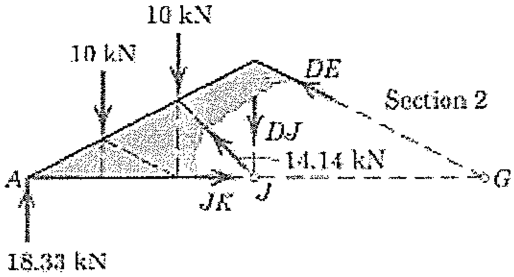
$$+\circlearrowleft \sum M_A = 0,\quad (0{,}707CJ)(9)-(1)(3)-(1)(6)=0 \Leftrightarrow CJ = 1{,}4kN \text{ (tekan)}$$

$$+\circlearrowleft \sum M_J = 0,\quad -(0{,}894CD)(4{,}5)-(1{,}83)(9)+(1)(3)+(1)(6)=0$$

$$CD = -1{,}86kN \qquad CD = 1{,}86kN \text{ (tekan)}$$

Jadi CD seharusnya batang tekan dan bukannya batang tarik seperti diasumsikan pada gambar diatas.

Dari sisi pemotongan 2 diperoleh:

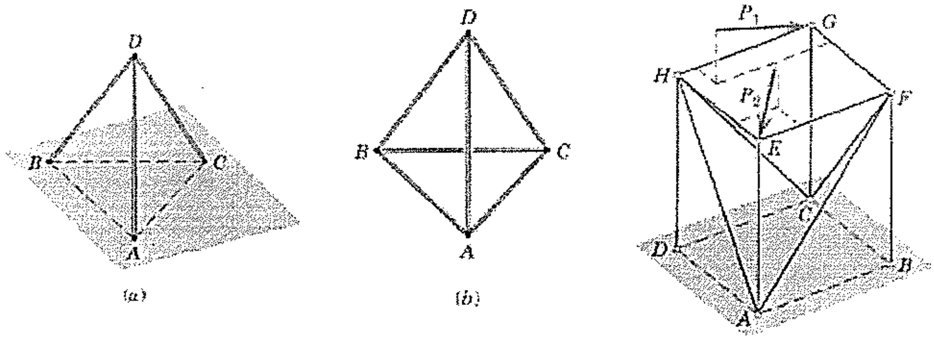


$\sum M_G = 0$, → 12DJ + 10(16) + 10(20) – 18,33(24) – 4,14(0,707)(12) = 0

Jadi DJ = 16,67 kN (tarik)

4.2.4.3. Trus Ruang (Space Trusses)

Trus yang telah diuraikan sebelumnya adalah trus bidang dengan semua batang trus terletak pada satu bidang (2 dimensi). Dalam juga terdapat kontruksi trus yang dibangun dari batang-batang yang dihubungkan bersama-sama pada ujung-ujungnya dalam ruang (3 dimensi) untuk membentuk struktur yang kokoh (rigid structure). Trus dengan konfigurasi batang-batang semacam ini dikenal sebagai trus ruang (space truss).



Gambar 4.8. Konfigurasi trus ruang

Seperti halnya trus bidang dengan elemen dasarnya adalah trus segitiga, sebaliknya untuk trus ruang elemen dasarnya tersusun dari enam batang yang dihubungkan pada ujung-ujungnya dan membentuk sisi dari suatu tetrahedron, seperti pada Gambar 4.8. Pada Gambar 4.8a dua buah batang AD dan BD dihubungkan di titik D memerlukan batang CD sebagai tumpuan ketiga untuk menjaga agar segitiga adb tidak berotasi terhadap AB. Pada Gambar 4.8b landasan penumpu digantikan dengan 3 buah batang lagi AB, BC serta AC dan membentuk susunan tetrahedron yang kekakuannya tidak bergantung pada landasannya. Susunan batang-batang seperti ini merupakan unit fundamental penyusun trus ruang yang kokoh. Pengembangan selanjutnya dari elemen dasar ini untuk membentuk trus ruang yang kokoh yang lebih besar dapat dilakukan dengan menambah tiga batang yang ujung-ujungnya dihubungkan pada tiga titik hubung tetap dari elemen dasar trus tersebut, seperti terlihat pada Gambar 4.8c. Trus ruang yang tersusun dari elemen-elemen dasar semacam ini membentuk kontruksi trus ruang sederhana (simple space truss). Keempat titik hubung tidak boleh terletak dalam satu bidang.

Hubungan jumlah batang (m) dan titik hubung (j) untuk trus ruang sederhana dapat diturunkan secara analog seperti pada trus bidang sederhana. Dalam hal ini elemen dasar trus ruang terdiri dari 6 batang dan 4 titik hubung, untuk setiap titik hubung terdapat 3 batang. Pengembangan selanjutnya adalah dengan penambahan 3 batang dan 1 titik hubung baru, begitu seterusnya. Dengan demikian, dapat kita tulis :

$m - 6 = 3(j-4)$

dari sini $m = 3j - 6$ .... (4.5)

Seperti halnya trus bidang, hubungan yang dikemukakan pada persamaan (4.5) akan dipenuhi jika trus ruang adalah statis tertentu. Jika m+6 > 3j, terdapat sejumlah batang berlebih (redundant members) dan persamaan-persamaan yang tidak saling bergantungan (independent equations), dan trus semacam ini adalah statis tak tentu (over rigid). Sebaliknya jika m+6 < 3j, trus tidak stabil dan beban yang diberikan padanya akan menyebabkan struktur trus roboh (collapse).

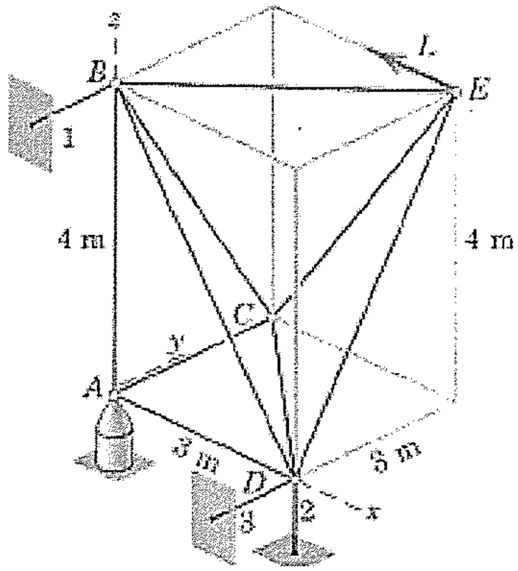
Bila trus ruang secara keseluruhan kokoh dan semua gaya reaksi tumpuan adalah statis tertentu, maka tumpuan akan berupa kombinasi bola-bola, roller, dan bola-dan-soket yang menghasilkan 6 buah gaya reaksi tumpuan tidak diketahui. Gaya reaksi tersebut dengan cepat dapat dihitung dengan menerapkan 6 persamaan keseimbangan gaya dan momen,

$\sum F = 0$ dan $\sum M = 0$ .... (4.6)

Dimana masing-masing dievaluasi pada setiap sumbu ruang trus tiga dimensi. Disamping itu, diasumsikan batang-batang trus ruang dihubungkan pada ujung-ujungnya dengan sambungan bola-dan-soket tak berfriksi, walaupun sebenarnya dihubungkan dengan sambungan keling/las. Dengan demikian pada semua batang tidak terdapat momen kopel dan setiap batang trus adalah berupa batang dua gaya. Kondisi keseimbangan setiap titik hubung ini dapat dikemukakan dengan 3 persamaan keseimbangan gaya $\sum F_X = 0, \sum F_Y = 0$ dan $\sum F_Z = 0$ dan untuk memudahkan perhitungan gaya-gaya batang sebaiknya analisa dimulai dari titik hubung dengan tidak lebih dari 3 gaya yang tidak diketahui.

Contoh Soal 4.3:

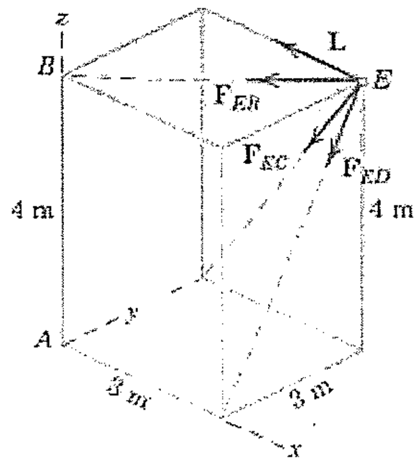
Trus ruang tersusun dari tetrahedron ABCD ditumpu di A oleh sambungan bola-dan-soket, serta rotasi terhadap sumbu x, y atau z ditahan masing-masing oleh link 1, 2 dan 3. Beban L diterapkan dititik hubung E, yang secara tetap dihubungkan pada tetrahedron dengan 3 buah link. Tentukan semua gaya-gaya batang pada titik hubung E.



Gambar 4.9. Gambar contoh soal no 4.3

Jawab:

Pertama kita bahas keseimbangan seluruh trus seperti pada Gambar DBB trus. Terdapat 6 buah gaya-reaksi tumpuan, tiga buah gaya di A dan 3 buah di link 1,2 dan 3. Juga terlihat bahwa jumlah batang m=9 dan titik hubung j=5, dengan demikian persamaan m+6 = 3j dipenuhi dan struktur kokoh dan statis tertentu.



DBB Trus

Keseimbangan Seluruh Trus :

$\sum M_A = 0,\ (3i+3j+4k)x(-Li)+(3i)x(D_y j)+(3i)x(D_z k)+(4k)x(B_y j)=0$

atau : $3Lk - 4Lj + 3D_y k - 3D_z j - 4B_y i = 0$

Dengan mengelompokkan semua koefisien kedalam vektor satuannya masing-masing diperoleh :

$$-4B_y i - (4L+3D_z)j + (3L+3Dy)k = 0$$

Dengan menyamakan semua koefisien vektor satuan i, j dan k dengan nol, diperoleh tiga persamaan berikut :

$B_y = 0 \qquad 4L+3D_z = 0 \qquad 3L+3D_y = 0$

Dari ketiga persamaan tersebut didapat :

$B_y = 0 \qquad D_z = -\frac{4}{3}L \qquad D_y = -L$

atau dalam bentuk vektor :

$B_y = 0 \qquad D_z = -\left(\frac{4}{3}L\right)k \qquad D_y = -Lj$

$\sum F = 0,\ (A_x - L)i + (A_y + D_y + B_y)j + (A_z + D_z)k = 0$

atau $A_x - L = 0 \qquad A_y + D_y + B_y = 0 \qquad A_z + D_z = 0$

maka : $A_x = L \qquad A_y = L \qquad A_z = \frac{4}{3}L$

Sekarang kita mulai analisa keseimbangan gaya pada titik hubung yang sekurang-kurangnya terdapat 1 gaya diketahui dan tidak lebih dari 3 gaya yang tidak diketahui, dan ternyata titik hubung E memenuhi syarat tersebut. Dengan demikian dapat kita analisa langsung tanpa menganalisa keseimbangan pada titik hubung yang lain. Dari Gambar c, tiga vektor gaya yang tidak diketahui pada titik hubung E tersebut adalah :

$$\overline{F}_{EB} = \frac{F_{EB}}{\sqrt{2}}(-i-j) \qquad \overline{F} = \frac{F_{EC}}{5}(-3i-4k) \qquad \overline{F}_{ED} = \frac{F_{ED}}{5}(-3j-4k)$$

Keseimbangan gaya dititik hubung E :

$$\sum F = 0, \qquad L + \overline{F}_{EB} + \overline{F}_{EC} + \overline{F}_{ED} = 0$$

$$-Li + \frac{F_{EB}}{\sqrt{2}}(-i-j) + \frac{F_{EC}}{5}(-3i-4k) + \frac{F_{ED}}{5}(-3j-4k) = 0$$

Kelompokkan kedalam vektor satuannya masing-masing :

$$\left(-L - \frac{F_{EB}}{\sqrt{2}} - \frac{3F_{EC}}{5}\right)i + \left(-\frac{F_{EB}}{\sqrt{2}} - \frac{3F_{ED}}{5}\right)j + \left(-\frac{4F_{EC}}{5} - \frac{4F_{ED}}{5}\right)k = 0$$

atau :

$$\frac{F_{EB}}{\sqrt{2}} + \frac{3F_{EC}}{5} = -L \qquad \frac{F_{EB}}{\sqrt{2}} + \frac{3F_{ED}}{5} = 0 \qquad F_{EC} + F_{ED} = 0$$

Apabila ketiga persamaan tersebut dipecahkan secara simultan, maka :

$$F_{EB} - \frac{L}{\sqrt{2}} \qquad F_{EC} = -\frac{5}{6}L \qquad F_{ED} = \frac{5}{6}L$$

4.3. RANGKA (FRAMES) DAN MESIN (MACHINES)

Rangka dan mesin adalah struktur yang sedikitnya terdapat satu elemen individu (individual member) berupa elemen banyak gaya (multiforce member). Pada struktur ini, sedikitnya satu elemen dikenai 3 gaya atau lebih. Umumnya, arah gaya-gaya tersebut tidak diketahui dan tidak searah elemen; dan biasanya dinyatakan dengan 2 komponen gaya yang tidak diketahui. Gaya-gaya yang bekerja pada tiap elemen tersebut dapat diperoleh dengan mengisolasi elemen dengan diagram benda bebas dan menerapkan persamaan keseimbangan (4.4). Harap diperhatikan dalam menerapkan prinsip aksi-reaksi jika hendak menggambarkan gaya-gaya interaksi dalam diagram benda bebas yang terpisah. Jika struktur terdiri dari elemen-elemen atau tumpuan-tumpuan yang lebih banyak diperlukan untuk menjaga supaya tidak roboh, maka problem ini adalah statis tak tentu, dan pemecahannya tidak cukup dengan menggunakan prinsip-prinsip kesetimbangan statika walaupun masih tetap diperlukan.

Rangka adalah struktur kaku sempurna yang dirancang untuk menahan atau mengangkat beban yang biasanya stasioner. Mesin dirancang untuk mentransmisikan dan memodifikasi gaya-gaya(stasioner atau tak stasioner) dan biasanya terdiri dari bagian-bagian yang bergerak. Baik rangka maupun mesin, setiap bagian atau elemennya berupa elemen multi gaya. Untuk menentukan gaya semua elemen, sebaiknya dimulai dengan menentukan gaya-gaya luar struktur yang dianggap sebagai benda kaku tunggal. Kemudian setiap elemen dilepas dan dihitung semua gaya yang bekerja padanya dengan persamaan keseimbangan gaya dan momen. Pada mesin hal tersebut tidak selalu bisa dilakukan, terutama apabila keseluruhan struktur mesin tersebut tidak kokoh (Misalnya, mekanisme slider crank). Untuk itu analisa dimulai dari keseimbangan elemen yang dianggap rigid.

4.3.1. RANGKA (FRAMES)

Prosedur analisa rangka secara umum hampir sama dengan trus. Prosedurnya sebagai berikut::

1. Tetapkan sistim salib sumbu sebagai perjanjian untuk mewakili gaya-gaya kedalam dua komponen, komponen x dan y.
2. Buat diagram benda bebas seluruh rangka dan terapkan persamaan keseimbangan untuk mencari gaya-gaya reaksi tumpuan.
3. Struktur dilepas dan dihitung keseimbangan untuk setiap bagian. Dengan mengingat kaidah hukum Newton ke tiga (aksi-reaksi). Setelah semua arah gaya (termasuk arah dan besar gaya beban) didefinisikan, maka gaya-gaya yang bekerja pada setiap batang dapat dihitung.

Hal-hal berikut perlu diperhatikan dalam melaksanakan prosedur analisa di atas :

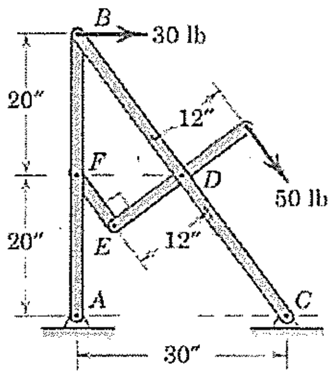
1. Dalam membuat diagram benda bebas asumsikan arah gaya-gaya yang hendak ditentukan. Apabila dari hasil perhitungan gaya-gaya tersebut diperoleh tanda minus, maka arah gaya seharusnya berlawanan dari asumsi semula.
2. Harap dichek apakah persoalan termasuk statis tertentu atau statis tak tentu. Apabila kasusnya adalah statis tak tentu, maka pemecahannya tidak cukup dengan hanya menggunakan persamaan keseimbangan statika (hal ini akan tersendiri dalam buku yang

lain). Namun mahasiswa jangan terkecoh dengan menilai kasus statis tertentu atau statis tak tentu dengan hanya melihat dari reaksi tumpuan.

3. Mahasiswa dianjurkan untuk menchek kembali apakah gaya-gaya tiap batang yang diperoleh dengan memecahkan persamaan simultan memenuhi persyaratan keseimbangan pada tiap-tiap batang. Akhirnya, gambarkan diagram benda bebas tiap bagian dengan arah gaya-gaya yang benar, dan cantumkan besar gaya tersebut pada tempat yang sesuai.

<u>Contoh Soal 4.4:</u>

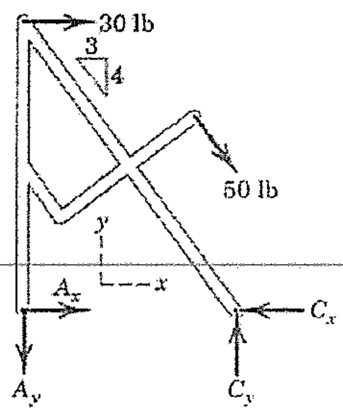
Hitunglah besarnya gaya-gaya pada seluruh batang pada struktur rangka seperti pada gambar berikut.



Gambar 4.10. Gambar contoh soal no 4.4

Jawab.

Langkah pertama adalah menggambarkan DBB lalu menyusun persamaan kesetimbangan untuk mencari besarnya gaya-gaya reaksi di A dan C. DBB rangka adalah sebagai berikut.

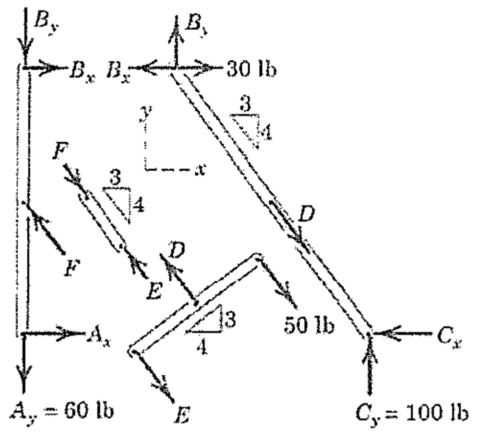


Gambar DBB rangka

Persamaan kesetimbangan menghasilkan :

$$[\Sigma M_C = 0] \quad 50(12) + 30(40) - 30A_y = 0 \quad A_y = 60 \text{ lb} \quad \textit{Ans.}$$
$$[\Sigma F_y = 0] \quad C_y - 50(4/5) - 60 = 0 \quad C_y = 100 \text{ lb} \quad \textit{Ans.}$$

Langkah selanjutnya adalah menggambarkan DBB untuk tiap-tiap batang pada rangka seperti ditunjukkan pada gambar berikut.



DBB pada tiap-tiap batang

Selanjutnya disusun persamaan kesetimbangan untuk masisng-masing batang sebagai berikut.

Batang ED.

$$[\Sigma M_D = 0] \quad 50(12) - 12E = 0 \quad E = 50 \text{ lb} \quad \textit{Ans.}$$
$$[\Sigma F = 0] \quad D - 50 - 50 = 0 \quad D = 100 \text{ lb} \quad \textit{Ans.}$$

Batang EF.

F sama dan berlawanan arah dengan E, sehingga F = E = 50lb

Batang AB

$$[\Sigma M_A = 0] \quad 50(3/5)(20) - B_x(40) = 0 \quad B_x = 15 \text{ lb} \quad \textit{Ans.}$$
$$[\Sigma F_x = 0] \quad A_x + 15 - 50(3/5) = 0 \quad A_x = 15 \text{ lb} \quad \textit{Ans.}$$
$$[\Sigma F_y = 0] \quad 50(4/5) - 60 - B_y = 0 \quad B_y = -20 \text{ lb} \quad \textit{Ans.}$$

Batang BC

$[\Sigma F_x = 0]$ $\quad 30 + 100(3/5) - 15 - C_x = 0 \quad C_x = 75 \text{ lb}$ *Ans.*

We may apply the remaining two equilibrium equations as a check. Thus,

$[\Sigma F_y = 0]$ $\quad 100 + (-20) - 100(4/5) = 0$

$[\Sigma M_C = 0]$ $\quad (30 - 15)(40) + (-20)(30) = 0$

4.3.2. MESIN

Mesin adalah struktur yang dirancang untuk mentransmisikan dan mengubah gaya-gaya. Tujuan utamanya adalah mengubah gaya input menjadi gaya output, atau karena pada mesin selalu terdapat bagian-bagian yang bergerak, atau dapat juga dikatakan mengubah gerakan input menjadi gerakan output. Output tersebut tidak selalu berupa gaya, tetapi bisa juga berupa momen torsi. Demikian juga gerakkan output tidak selalu berupa gerak berputar, tetapi dapat juga berupa gerak bolak-balik. Mesin dapat berupa peralatan-peralatan yang sederhana sampai pada mekanisme-mekanisme yang sulit dan kompleks.

Dalam kasus-kasus mesin yang lebih sulit, biasanya memerlukan beberapa diagram benda bebas, dan besarnya gaya-gaya dalam mungkin baru bisa diperoleh setelah memecahkan persamaan simultan yang terbentuk. Dalam membuat diagram benda bebas sebaiknya dipilih yang mencakup gaya-gaya input dan gaya-gaya reaksi output dan jumlah komponen gaya yang tidak diketahui tidak melebihi jumlah persamaan yang tersedia.

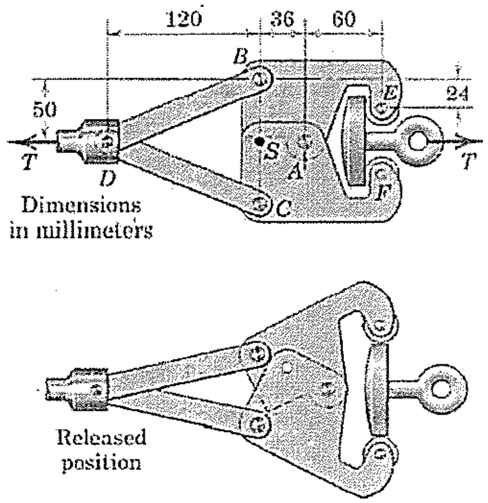
Secara umum prosedur analisa mesin adalah sebagai berikut :

1. Tetapkan sistim salib sumbu x dan y sebagai perjanjian untuk mewakili gaya-gaya kedalam 2 komponen, komponen x an y.
2. Kaji apakah mesin tersusun sebagai suatu unit yang rigid atau sebaliknya. Jika struktur tersusun sebagai suatu unit yang rigid, buat diagram benda bebas seluruh struktur, dan terapkan persamaan keseimbangan untuk mencari gaya-gaya reaksi tumpuan. Kemudian struktur dilepas dan dihitung keseimbangan untuk setiap bagian. Sebaliknya jika struktur tersusun sebagai suatu unit yang tidak rigid, isolasi bagian yang dianggap rigid dan buat diagram benda bebasnya serta terapkan persamaan keseimbangan untuk mencari gaya-gaya keseimbangan pada bagian tersebut. Gaya-gaya pada bagian yang lain dan reaksi tumpuan

selanjutnya dapat dicari dengan membuat diagram benda bebas dan menerapkan prinsip-prinsip keseimbangan yang berlaku.

Contoh Soal 4.5

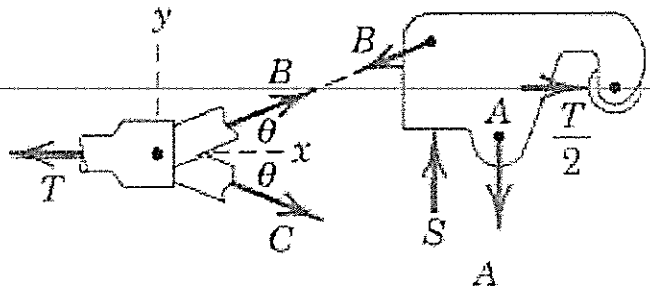
Sebuah mesin dirancang untuk pengaman terhadap suatu beban berlebih. Suatu pin yang dipasang di S dari bahan yang lebih lunak digunakan sebagai pembatas, apabila beban melebihi suatu batas, maka pin tersebut putus sehingga pencepit membuka. Hitunglah besarnya gaya T apabila gaya yang menyebabkan pin S putus adalah sebesar 800N dan gaya-gaya reaksi di tumpuan.



Gambar 4.10. Gambar contoh soal 4.5

Jawab.

Langkah awal yang dilakukan adalah menggambarkan DBB, lalu menyusun persamaan kesetimbangannya. Dari persamaan tersebut dapatlah dihitung besarnya gaya-gaya yang belum diketahui. Karena simetri, maka DBB dari mesin pengaman beban berlebih dibuat sebagian seperti ditunjukkan pada gambar berikut.



DBB Mesin pengaman beban berlebih

Persamaan pada join menghasilkan

$$[\Sigma F_x = 0] \qquad B\cos\theta + C\cos\theta - T = 0 \qquad 2B\cos\theta = T$$

$$B = T/(2\cos\theta)$$

$$[\Sigma M_A = 0] \quad \frac{T}{2\cos\theta}(\cos\theta)(50) + \frac{T}{2\cos\theta}(\sin\theta)(36) - 36(800) - \frac{T}{2}(26) = 0$$

Substitusi $\sin\theta/\cos\theta = \tan\theta = 5/12$, menghasilkan

$$T\left(25 + \frac{5(36)}{2(12)} - 13\right) = 28\ 800$$

$$T = 1477\ \text{N} \quad \text{or} \quad T = 1.477\ \text{kN} \qquad \textit{Ans.}$$

Persamaan kesetimbangan pada arah sumbu y menghasilkan

$$[\Sigma F_y = 0] \qquad S - B\sin\theta - A = 0$$

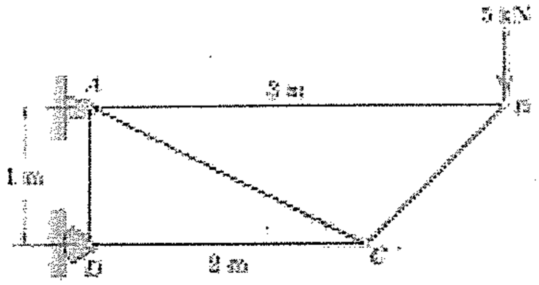
$$800 - \frac{1477}{2(12/13)}\frac{5}{13} - A = 0 \qquad A = 492\ \text{N} \qquad \textit{Ans.}$$

Soal-Soal Latihan:

(Pada soal-soal berikut ini kalau massa tidak disebutkan berarti diabaikan).

1. Hitunglah besarnya gaya-gaya pada setiap batang pada struktur trus berikut.

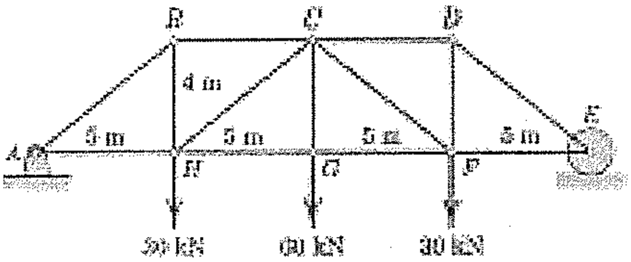
   Jawab: AB = 5kN (tarik), BC = $5\sqrt{2}$ kN (tekan), CD = 15kN (tekan), AC = $5\sqrt{5}$ kN (tarik) dan AD = 0



Gambar soal no 1

2. Hitunglah besarnya gaya-gaya pada setiap batang pada struktur trus berikut.

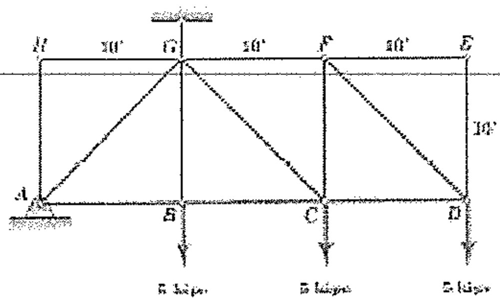
   Jawab: AB = DE = 96kN (tekan), AH = EF = 75kN (tarik), BC = CD = 75kN (tekan), BH = CG = DF = 60kN (tarik), CH = CF = 48kN (tekan) & GH = FG = 112,5 kN (tarik)



Gambar soal no 2.

3. Hitunglah besarnya gaya pada batang CG pada trus berikut ini.

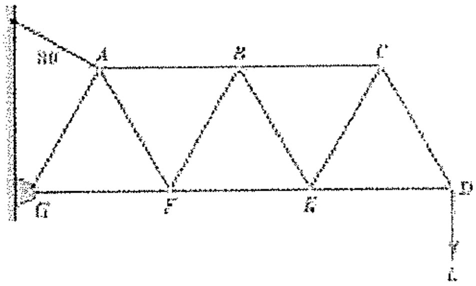
   Jawab: CG = 14,14 kips (tarik)



Gambar soal no. 3

4. Hitunglah besarnya gaya pada batang BC, BE & BF pada trus berikut ini

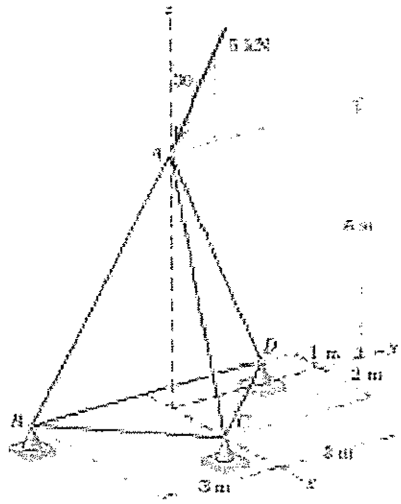
Jawab : BC = BE = $\frac{2L}{\sqrt{3}}$ (tarik) & BF = $\frac{2L}{\sqrt{3}}$ (tekan)



Gambar soal no. 4

5. Hitunglah besarnya gaya-gaya pada batang AB, AC & AD untuk trus ruang berikut ini.

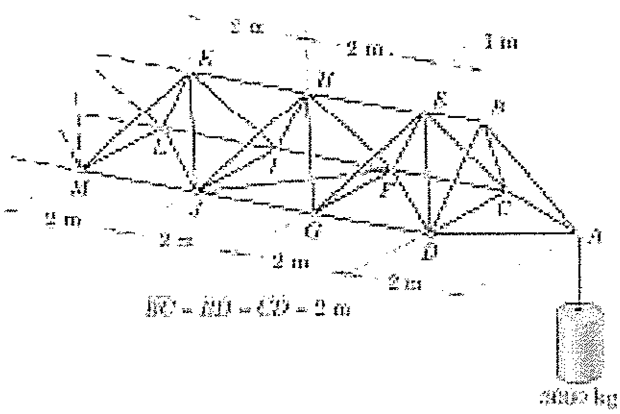
Jawab : AB = 4,46kN (tekan), AC = 1,521 kN (tekan) & AD = 1,194 kN



Gambar soal no.5

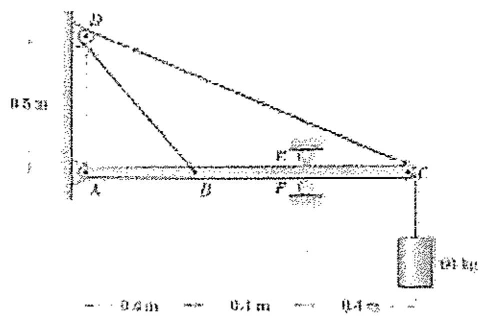
6. Hitunglah gaya pada batang FJ dan GJ pada trus ruang sebagai berikut. Gunakan metode potongan.

Jawab : FJ = 0 & GJ = 70,8 kN (tekan)



Gambar soal no. 6

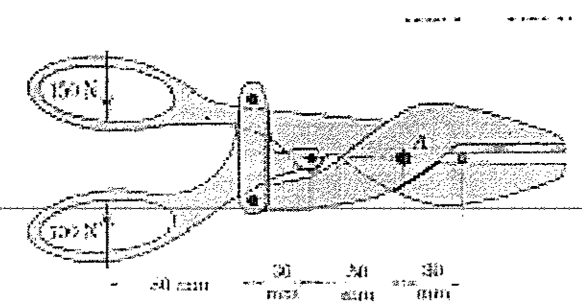
7. Hitunglah besarnya gaya-gaya reaksi tumpuan di A dan F untuk struktur berikut ini. Jawab : A= 999N & F =314N (keatas)



Gambar soal no. 7

8. Suatu disain mesin pemotong digunakan untuk menggantikan disain yang lama. Hitunglah besarnya gaya potong di P apabila gaya pada grip sebesar 150N.

Jawab : P = 1467 N



Gambar soal no. 8

DAFTAR PUSTAKA

1. Meriam, J.L. , "Mechanics Statics", Second edition, John Wiley and Sons, Inc., London, 1959.
2. Meriam, J.L., and Kraige, L.G., "Engineering Mechanics volume 1 Statics". Second edition, John Wiley and Sons, New York, 1987.
3. Beer P., Ferdinand, and Johnston Russell E.,"Mechanics for Engineers Statics", Third edition, Mc Graw-hill Kogakusha, Ltd., Tokyo, 1976.
4. Beer P., Ferdinand, and Johnston Russell E.,"Mechanics for Engineers Statics", Fourth edition, Mc Graw-hill Book Company, Ltd., Singapore, 1987.
5. Shame H., Irving, "Engineering Mechanics Statics and Dynamics", Second edition , PHI, New Delhi,1980.
6. Timoshenko, and Young, "Engineering Mechanics", Fourth edition, Mc Graw-Hill Kogakusha, Ltd.,Tokyo, 1982.

LAMPIRAN A
TOPIK PILIHAN DARI MATEMATIKA

A1 Pengantar

Lampiran A ini berisi resume dari topik-topik pilihan dalam matematika dasar yang sering dipakai dalam memecahkan persoalan mekanika. Topik-topik yang ada dalam lampiran ini sebaiknya dikuasai dengan baik agar saudara tidak mengalami hambatan dalam mengikuti matakuliah ini, disamping itu masih ada topik-topik lain yang tidak ditulis dalam lampiran ini juga masih diperlukan.

Sebagai seorang yang sedang belajar ilmu mekanika sebaiknya anda jangan bosan untuk tetap belajar matematika, dan bila perlu mengulangi cara pemakaiannya. Perlu saudara ketahui bahwa ilmu mekanika merupakan ilmu terapan yang selalu berhubungan dengan pendeskripsian dari benda nyata dan gerak sebenarnya. Oleh karena itu saudara selalu dituntut untuk mengerti arti phisik dan geometri dari persamaan matematika yang dipakai selama mempelajari teori dan formulasi serta memecahkan persoalan-persoalan mekanika.

A2 GEOMETRI BIDANG

1. Bila dua garis berpotongan dan saling tegak lurus satu dengan yang lain, sudut antara yang dibentuk oleh masing-masing pasangan adalah sama besar.
2. Kesamaan segitiga

   $$\frac{x}{b} = \frac{h-y}{h}$$

3. Luas segitiga

   Luas = (bh)/2

4. Lingkaran

   Keliling $= 2\pi r$

   Luas $= \pi r^2$

   Panjang busur $s = r\theta$

   Luas sektor $= (r^2\theta)/2$

   θ dalam radian

5. Setiap segitiga yang digambarkan dalam setengah lingkaran adalah segitiga siku-siku

6. Sudut-sudut segitiga

$\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = 180^o$

$\theta_4 \quad = \theta_1 + \theta_2$

A3 GEOMETRI BENDA PEJAL

1. Bola

   Volume $= 4/3\ \pi r^3$

   Luas permukaan $= 4\ \pi r^2$

2. Baji bola

   Volume $= 4/3\ \pi r^3$

3. Kerucut melingkar tegak lurus

   Volume $= 1/3\ \pi r^2 h$

   Luas selubung $= \pi r L$

   $L = (r^2 + h^2)^{1/2}$

4. Piramida

   Volume $= 1/3\ Bh$

   Dimana B $=$ luas alas

A4 ALJABAR

1. Persamaan kuadrat

   $ax^2 + bx + c = 0$

   $x = \left(-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}\right) / 2a$, $b^2 - 4ac > 0$ untuk akar-akar riil

2. logaritma

   $b^x = y, x = \log_b y$

   logaritama natural

   $b = e = 2{,}718282$

   $e^x = y, x = \log_e y = \ln y$

   $\log_{10} x = 0{,}4343 \ln x$

$\log(ab) = \log a + \log b$
$\log(a/b) = \log a - \log b$
$\log(1/n) = -\log n$
$\log a^n = n \log a$
$\log 1 = 0$

3. Determinan

Orde 2 $\begin{vmatrix} a_1 b_1 \\ a_2 b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1$

Orde 3 $\begin{vmatrix} a_1 b_1 c_1 \\ a_2 b_2 c_2 \\ a_3 b_3 c_3 \end{vmatrix} = +a_1 b_2 c_3 + a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2 - a_3 b_2 c_3 - a_1 b_3 c_2$

4. Persamaan pangkat 3

$x^3 = Ax + B; misal p = A/3, q = B/3$

Kasus I : $(q^2 - p^3) < 0$ (ketiga akarnya bilangan riil dan berbeda)

$\cos u = q/(p\sqrt{p}), 0 < u < 180^o$

$x_1 = 2\sqrt{p}\cos(u/3); x_2 = 2\sqrt{p}\cos(u/3 + 120^o); x_3 = 2\sqrt{p}\cos(u/3 + 240^o)$

Kasus II : $(q^2 - p^3) > 0$ (satu akar bilangan riil, dua akar bilangan imajiner)

$$x_1 = \left(q + \sqrt{q^2 - p^3}\right)^{\frac{1}{3}} + \left(q - \sqrt{q^2 - p^3}\right)^{\frac{1}{3}}$$

Kasus III: $(q^2 - p^3) = 0$ (ketiga akarnya bilangan riil , dua akar sama)

$x_1 = 2q^{1/3}, x_2 = x_3 = -q^{1/3}$

untuk persamaan pangkat tiga yang umum:

$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$

substitusi $x = x_0 - a/3$ dan diperoleh $x^3{}_0 = Ax_0 + B$

kemudian dilanjutkan seperti di atas untuk menentukan harga x_0 dari $x = x_0 - a/3$

A5 GEOMETRI ANALIT

1. Garis lurus

   $y = a + mx \qquad x/a + y/b = 1$

2. Lingkaran

   $x^2 + y^2 = r^2 \qquad (x - a)^2 + (y-b)^2 = r^2$

3. Parabol

   $y = b\,(x^2/a^2) \qquad x = a(y^2/b^2)$

4. Elip

   $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$

5. Hiperbol

   $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$

A6 TRIGONOMETRI

1. Definisi

   $\sin\theta = a/c \qquad \text{cosec}\,\theta = c/a$

   $\cos\theta = b/c \qquad \sec\theta = c/b$

   $\text{tg}\,\theta = a/b \qquad \text{cotg}\,\theta = b/a$

	kuadran			
	I	II	III	IV
Sin θ	+	+	-	-
Cos θ	+	-	-	+
Tg θ	+	-	+	-
cosec θ	+	+	-	-
sec θ	+	-	-	+
cotg θ	+	-	+	-

2. Macam-macam hubungan sinus-cosinus

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

$1 + tg^2\theta = \sec^2\theta$

$1 + \cot g^2\theta = \cos ec^2\theta$

$\sin(\theta/2) = \sqrt{(1-\cos\theta)/2}$

$\cos(\theta/2) = \sqrt{(1+\cos\theta)}$

$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$

$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$

$\sin(a \pm b) = \sin a\cos b \pm \sin b\cos a$

$\cos(a \pm b) = \cos a\cos b \pm \sin a\sin b$

3. Hukum sinus

   $a/b = \sin A/\sin B$

4. Hukum cosinus

   $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$

   $c^2 = a^2 + b^2 + 2ab\cos D$

A7 OPERASI VEKTOR

1. Notasi. Besaran vektor ditulis huruf besar, besaran skalar ditulis huruf kecil. Jadi besaran vektor V mempunyai besar v.

   Dalam buku matematika biasanya vektor dituliskan $\underline{V}$ atau $\bar{V}$ sedang besarnya adalah $|V|$.

2. Penjumlahan

   Penjumlahan segitiga P + Q = R

   Penjumlahan paralelogram P + Q = R

   Hukum kumutatip P + Q = Q + P

   Hukum asosiatip P + (Q + R) = (P + Q) + R

3. Pengurangan

   P – Q = P + (-Q)

4. Vektro satuan i,j,k

   $V = v_x i + v_y j + v_z k$

   Dimana besarnya $v = \sqrt{v^2{}_x + v^2{}_y + v^2{}_z}$

5. Arah cosinus l,m,n cosinus dari antara V dan sumbu x, y , z

Jadi $l = v_x/v$, $m = v_y/v$, $n = v_z/v$

Vektor = $v(li + mj + nk)$

$l^2 + m^2 + n^2 = 1$

6. Dot product atau scalar product (perkalian skalar)

   $P.Q = pq \cos \theta$

   Produk ini dapat dipandang sebagai besarnya P dikalikan dengan komponen $q \cos \theta$ dari Q dalam arah P, atau sebagai besar Q dikalikan dengan komponen $p \cos \theta$ dari P dalam arah Q.

   Hukum kumutatip $P.Q = Q.P$

   Dari definisi dot product

   $i.i = j.j = k.k = 1$

   $i.j = j.i = k.i = j.k = k.j = 0$

   $P.Q = (P_x i + P_y j + P_z k). (q_x i + q_y j + q_z k)$

   $= P_x q_x + P_y q_y + P_z q_z$

   berdasarkan definisi dot product, maka bila dua buah vektor saling tegak lurus (P dan Q) hasilnya adalah nol, $P.Q=0$.

   Sudut antara dua vektor P_1 dan P_2 dapat ditentukan dari hubungan $P_1P_2 = P_1P_2 \cos \theta$, sehingga

   $\cos \theta = P_1.P_2 /(P_1P_2) = (P_{1x}\ P_{2x} + P_{1y}\ P_{2y} + P_{1z}P_{2z})/(P_1+P_2)$

   $= l_1l_2 + m_1m_2 + n_1n_2$

   dimana l,m,n mewakili arah cosinus dari vektor . Dari pernyataan tersebut, dua vektor akan saling tegak lurus bila arah cosinus mengikuti hubungan $P.(Q+R) = P.Q + P.R$

7. Cross product (perkalian vektor)

   Perkalian vektor PxQ dari dua vektor P dan Q didefinisikan sebagai vektor dengan besar $PxQ = pq \sin \theta$ dan arahnya dispesifikasikan dengan aturan tangan kanan. Pembalikan urutan vektor dan penggunaan aturan tangan kanan menghasilkan PxQ =-PxQ.

   Hukum distributip Px(Q+R) = PxQ + PxR

   Dari definisi cross product, dengan memakai sistem koordinat aturan tangan kanan

i x j = k	j x k = i	k x i = j
j x i = -k	k x jk = -i	i x k = -j

   i x i = j x j = kx k = 0

   dengan bantuan tanda-tanda di atas dan hukum distributip , maka cross product dapat ditulis

$$PxQ = (P_x i + P_y j + P_z k)x(q_x i + q_y j + q_z k)$$
$$= (P_y q_z - P_z q_y)i + (P_z q_x - P_x q_z)j + (P_x q_y - P_y q_x)k$$

cross product dapat juga ditulis sebagai determinan

$$PxQ = \begin{vmatrix} ijk \\ P_x P_y P_z \\ q_x q_y q_z \end{vmatrix}$$

8. Hubungan-hubungan tambahan

Triple scalar product (PxQ) .R =R .(PxQ). Dot dan cross dapat ditukar selama urutan vektor tetap dijaga. Penulisan kurung kecil sebenarnya tidak perlu karena Px(Q.R) tidak punya arti, dan tidaklah mungkin sebuah vektor P di cross dengan sebuah skalar (Q.R). jadi pernyataan di atas dapat ditulis PxQ.R = P.QxR

Triple scalar product memiliki eksapansi determinan

$$PxQ.R = \begin{vmatrix} P_x & P_y & P_z \\ q_x & q_y & q_z \\ r_x & r_y & r_z \end{vmatrix}$$

triple cross product (PxQ)xR = - Rx(PxQ) = R x (QxP) pada kasus ini penulisan kurung kecil harus dilakukan karena penulisan PxQxR bisa punya dua arti. Hal ini bisa dilihat pada bentuk penulisan berikut ini

(PxQ)xR = R.PQ – R. QP

Px(QxR) = P.RQ – P.QR

Suku pertama dalam pernyataan yang pertama, sebagai contoh, adalah dot product R.P (skalar) dikalikan Q.

9. Turunan vektor masih tetap sama seperti turunan skalar.

$$\frac{dP}{dt} = \dot{p} = \dot{p}_x i + \dot{p}_y j + \dot{p}_z k$$

$$\frac{d(Pu)}{dt} = \dot{p}u + p\dot{u}$$

$$\frac{d(P.Q)}{dt} = P\dot{Q} + \dot{P}Q$$

$$\frac{d(PxQ)}{dt} = Px\dot{Q} + \dot{P}xQ$$

10. Integrasi vektor

Kalau V adalah fungsi dari x,y, dan z dan elemen dari volume adalah dT = dx dy dz .intergral dari V untuk seluruh volume dapat dituliskan sebagai jumlah vektor dari integrasi ketiga komponennya , jadi

$$\int V dT = i\int v_x dT + j\int v_y dT + k\int v_z dT$$

A8 DERET

Tanda dalam kurung besar menyatakan batas konvergensi

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{\pi nx}{l} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{\pi nx}{l}$$

dimana $a_n = \int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{\pi nx}{l}\,dx, b_n = \int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{\pi nx}{l}$

[ekspansi fourier untuk –l< x <l]

$$(1 \pm x)^n = 1 \pm nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 \pm \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + \ldots..(x^2 < 1)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots\ldots\ldots(x^2 < \propto)$$

$$\cos x = x - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots\ldots\ldots(x^2 < \propto)$$

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \ldots\ldots\ldots(x^2 < \propto)$$

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \ldots\ldots\ldots(x^2 < \propto)$$

A9 TURUNAN

$$\frac{dx^n}{dx} = nx^{n-1}$$

$$\frac{d(uv)}{dx} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$$

$$\frac{d\left(\frac{u}{v}\right)}{dx} = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2}$$

$$\lim_{\Delta \to 0} \sin \Delta x = \sin dx = \tan dx = dx$$

$$\lim_{\Delta \to 0} \cos \Delta x = \cos dx = 1$$

$$\frac{d \sin x}{dx} = \cos x$$

$$\frac{d \cos x}{dx} = -\sin x$$

$$\frac{d \tan x}{dx} = \sec^2 x$$

$$\frac{d \sinh x}{dx} = \cosh x$$

$$\frac{d \cosh x}{dx} = \sinh x$$

$$\frac{d \tanh x}{dx} = \sec h^2 x$$

A10 INTEGRAL

$$\int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln x$$

$$\int \sqrt{a+bx}\,dx = \frac{2}{3b}\sqrt{(a+bx)^2}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx}} = \frac{2\sqrt{a+bx}}{b}$$

$$\int \frac{xdx}{a+bx} = \frac{1}{b^2}(a+bx-a\log(a+bx))$$

$$\int \frac{dx}{a+bx^2} = \frac{1}{\sqrt{ab}}\tan^{-1}\frac{x\sqrt{ab}}{a} \; or \; \frac{1}{\sqrt{-ab}}\tanh^{-1}\frac{x\sqrt{-ab}}{a}$$

$$\int \sqrt{x^2 \pm a^2}\,dx = \frac{1}{2}\left[x\sqrt{x^2 \pm a^2} \pm a^2 \ln\left(x+\sqrt{x^2 \pm a^2}\right)\right]$$

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{a^2-x^2} + a^2 \sin^{-1}\frac{x}{a}\right)$$

$$\int x\sqrt{a^2-x^2}\,dx = -\frac{1}{3}\sqrt{(a^2-x^2)^3}$$

$$\int x^2\sqrt{a^2-x^2}\,dx = -\frac{x}{4}\sqrt{(a^2-x^2)^2} + \frac{a^2}{8}\left(x\sqrt{a^2-x^2} + a^2\sin^{-1}\frac{x}{a}\right)$$

$$\int x^3\sqrt{a^2-x^2}\,dx = -\frac{1}{3}\left(x^2 + \frac{2}{3}a^2\right)\sqrt{(a^2-x^2)^3}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left(x+\sqrt{x^2 \pm a^2}\right)$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \sin^{-1}\frac{x}{a}$$

$$\int x\sqrt{x^2 \pm a^2}\,dx = \frac{1}{3}\sqrt{(x^2 \pm a^2)^3}$$

$$\int x^2\sqrt{x^2 \pm a^2}\,dx = \frac{x}{4}\sqrt{(x^2 \pm a^2)^3} + \frac{a^2}{8}\log\left(x+\sqrt{x^2 \pm a^2}\right)$$

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \sqrt{x^2-a^2}$$

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \pm\sqrt{a^2 \pm x^2}$$

$$\int \sin x dx = -\cos x$$

$$\int \cos x dx = \sin x$$

$$\int \sec x dx = \frac{1}{2}\log\frac{1+\sin x}{1-\sin x}$$

$$\int \sin^2 x dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4}$$

$$\int \cos^2 x dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4}$$

$$\int \sin^3 x dx = -\frac{\cos x}{3}\left(2+\sin^2 x\right)$$

$$\int \cos^3 x dx = \frac{\sin x}{3}\left(2+\cos^2 x\right)$$

$$\int e^{ax} \sin px dx = \frac{e^{ax}(a\sin px - p\cos px)}{a^2+p^2}$$

$$\int e^{ax} \cos px dx = \frac{e^{ax}(a\cos px + p\sin px)}{a^2+p^2}$$

$$\int \log x dx = x\log x - x$$

$$\int x e^{ax} dx = \frac{e^{ax}}{a^2}(ax-1)$$

$$\int \ln x dx = x\ln x - x$$

$$\int x\sqrt{a+bx}\,dx = \frac{2}{15b^2}(3bx-2a)\sqrt{(a+bx)^3}$$

$$\int \tanh x dx = \ln\cosh x$$

$$\int x\sin x dx = \sin x - x\cos x$$

$$\int x\cos x dx = \cos x + \sin x$$

$$\int \sinh x dx = \cosh x$$

$$\int \cosh x dx = \sinh x$$

jari-jari kelengkungan :

$$P_{xr} = \frac{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}}$$

$$P_{r\theta} = \frac{\left[r^2+\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}}{r^2+2\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 - r\frac{d^2r}{d\theta^2}}$$