BUKU AJAR

PEMODELAN MATEMATIKA

Oleh:
Dr. Widowati, M.Si
Drs. Sutimin, M.Si

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MIPA UNIVERSITAS DIPONEGORO
SEMARANG 2007

KATA PENGANTAR

Puji syukur bagi Alloh Yang Maha Kuasa atas segala karunia-Nya yang telah dilimpahkan kepada penulis sehingga buku ajar Pemodelan Matematika dapat terselesaikan dengan baik. Buku ajar ini merupakan hasil dari kegiatan hibah pengajaran Pemodelan Matematika dengan judul "***Peningkatkan Efektivitas dan Kualitas Pembelajaran Pemodelan Matematika dengan Model Jigsaw Berbasis Open-Ended Problem***" yang merupakan salah satu dari rangkaian kegiatan yang didanai oleh Proyek Hibah A2 tahun kedua.

Buku ajar ini terdiri dari enam bab yaitu bab1 membahas tentang pengertian umum pemodelan matematika dan proses penyusunan model matematika, bab 2 membahas tentang sistem massa pegas horisontal, sistem massa pegas vertikal, dan masalah syarat batas. Pada bab 3 membahas pendulum, bab 4 membahas tentang model matematika dibidang biologi yang meliputi model diskrit, model kontinu, dan dan model probabilitas. Selanjutnya pada bab 5 disajikan model pertumbuhan logistik dan solusi eksak persamaan logistik, Terakhir pada bab 6 diberikan model pertumbuhan dua spesies yang mana didalamnya dibahas tentang kesetimbangan populasi dan kestabilan dari populasi kesetimbangan. Untuk memudahkan pemahaman konsep pemodelan matematika pada buku ajar ini diberikan contoh, latihan, dan aplikasinya pada penyelesaian masalah nyata.

Pada kesempatan ini, penulis mengucapkan terima kasih kepada penyelenggara program A2 Jurusan Matematika FMIPA UNDIP. Terima kasih juga kepada tim Pemodelan Matematika yang telah bekerja sama dengan baik melaksanakan tahapan-tahapan hibah pengajaran ini, dan atas segala partisipasinya dalam proses pembuatan buku ajar. Segala saran dan kritik yang membangun sangat diharapkan demiperbaikan buku ajar ini di masa datang.

Semarang, Desember 2007

Penulis

DAFTAR ISI

BAB I
PEMODELAN MATEMATIKA

1.1. PENGANTAR

Pemodelan matematika merupakan bidang matematika yang berusaha untuk merepresentasi dan menjelaskan sistem-sistem fisik atau problem pada dunia real dalam pernyataan matematik, sehingga diperoleh pemahaman dari problem dunia real ini menjadi lebih tepat. Representasi matematika yang dihasilkan dari proses ini dikenal sebagai "Model Matematika". Konstruksi, analisis dan penggunaan model matematika dipandang sebagai salah satu aplikasi matematika yang paling penting.

Model matematika digunakan dalam banyak disiplin ilmu dan bidang studi yang berbeda. Kita dapat mencari aplikasi model matematika di bidang-bidang seperti fisika, ilmu biologi dan kedokteran, teknik, ilmu sosial dan politik, ekonomi, bisnis dan keuangan, juga problem-problem jaringan komputer. Tentunya bidang dan tipe aplikasi yang berbeda menghendaki bidang-bidang matematika yang berbeda.

Pada buku ini akan diberikan bagaimana persamaan diferensial dapat digunakan untuk mengkonstruksi beberapa model matematika yang menarik, khususnya difokuskan pada bidang aplikasi yang dikenal sebagai mekanika getaran dan dinamika populasi.

1.2. PENDEKATAN PADA PEMODELAN MATEMATIKA

Sebelum memperhatikan contoh-contoh model matematika, kita perlu mengetahui perbedaan pendekatan pemodelan yang dapat digunakan dalam memformulasikan model matematika. Terdapat beberapa jenis-jenis model matematika dan ini meliputi, model emperis, model simulasi, model stokastik dan deterministik.

a. Model Emperis

Pada model empiris, data yang berhubungan dengan problem menentukan peran yang penting. Dalam pendekatan ini, gagasan yang utama adalah mengkonstruksi formula (atau persamaan) matematika yang dapat menghasilan grafik yang terbaik untuk mencocokan data.

b. Model Simulasi

Pendekatan yang lain untuk pemodelan matematika adalah konstruksi model simulasi. Dalam pendekatan ini, program komputer dituliskan didasarkan pada aturan-aturan. Aturan – aturan ini dipercaya untuk membentuk bagaimana suatu proses atau fenomena akan berjalan terhadap waktu dalam kehidupan nyata. Program komputer ini dijalankan terhadap waktu sehingga implikasi interaksi dari berbagai variabel dan komponen yang dikaji dan diuji.

c. Model Deterministik dan Stokastik

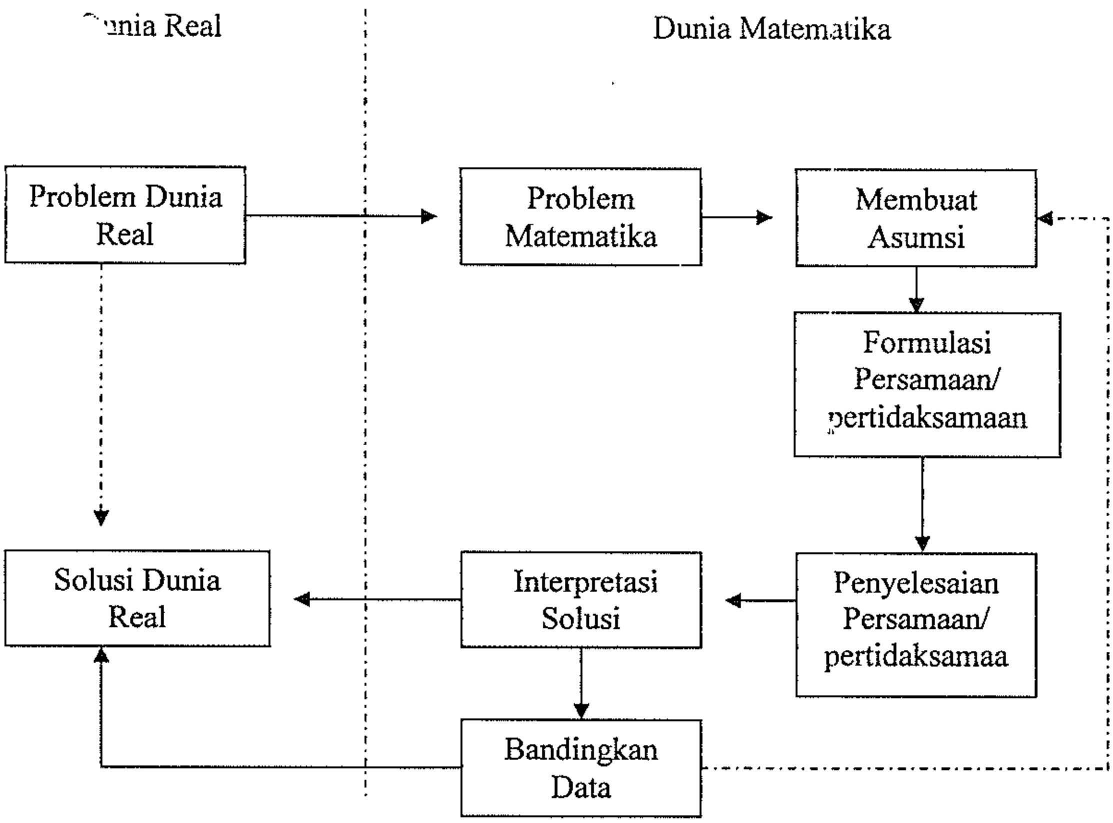
Model deterministik meliputi penggunaan persamaan atau himpunan persamaan untuk merepresentasikan hubungan antara berbagai komponen (atau variabel) suatu sistem atau problem. Suatu contoh adalah persamaan diferensial biasa yang menjelaskan bagaimana suatu kuantitas tertentu berubah terhadap waktu. Persamaan ini menunjukkan hubungan antara kuantitas (yang dinyatakan oleh variabel tak bebas dari persamaan) dan waktu sebagai variabel bebas. Diberikan syarat awal yang sesuai, persamaan diferensial dapat diselesaikan untuk memprediksi perilaku sistem model.

Dalam model deterministik, variasi random diabaikan. Dengan kata lain persamaan ini digunakan untuk menyatakan problem dunia nyata yang diformulasikan berdasarkan pada hubungan dasar faktor-faktor yang terlibat dalam problem ini.

Pada kenyataannya banyak problem dunia nyata dihadapkan pada fluktuasi random. Contoh dalam pemodelan reaksi kimia, sementara itu mungkin menggunakan persamaan untuk memprediksi perilaku substansi yang bereaksi, sehingga reaksi yang terjadi hanya jika terdapat kolisi molekul. Terdapat beberapa derajat tak tentu untuk apa perilaku akan terjadi diprediksi. Itu mungkin terdapat distribusi outcome yang mungkin yang dibangun dari himpunan syarat awal. Suatu model yang mengambil variasi random demikian menjadi perhatian dikenal sebagai model stokastik, yang pada umumnya pendekatan secara probabilistik

1.3. PROSES PEMODELAN

Pada esensinya proses pemodelan matematika umumnya sama. Proses pemodelan dapat dinyatakan dalam alur diagram berikut ini.



Gambar 1.1. Proses Pemodelan

Kita memulai dengan suatu problem pada dunia real, dan diharapkan untuk mendapatkan solusi pada dunia nyata untuk masalah ini. Tetapi cara langsung kadang-kadang sulit. Langkah pertama dalam pemodelan matematika adalah menyatakan problem dunia nyata kedalam pengertian matematika. Langkah ini meliputi identifikasi variabel-variabel pada problem dan membentuk beberapa hubungan antara variabel-variabel ini. Menjabarkan variabel-variabel dan sistem menjadi model, langkah selanjutnya adalah mengkonstruksi kerangka dasar model. Ini meliputi, membuat asumsi tentang model. Asumsi ini secara esensial mencerminkan bagaimana kita berpikir sehingga model harus berjalan. Oleh karena itu, bahkan jika kita dapat menyelesaikan model, hasilnya hanya sevalid asumsi. Namun demikian, itu masih esensial untuk membuat beberapa asumsi agar mengarah pada situasi fisik yang kompleks menjadi problem yang dapat diselesaikan

Dengan asumsi dan pemahaman hubungan antara variabel-variabel, langkah selanjutnya akan melibatkan suatu usaha memformulasikan persamaan atau sekumpulan persamaan untuk menyatakan hubungan ini. Ini merupakan langkah yang paling penting dan sulit. Suatu saat, kita perlu langkah kembali dan menguji kembali asumsi-asumsi agar supaya memformulasi persamaan yang sesuai sehingga dapat diselesaikan dan realistik.

Ketika model diformulasi, langkah berikutnya adalah menyelesaikan persamaan. Ini mungkin perlu hati-hati dan fleksibilitas dalam proses pemodelan secara menyeluruh. Ini mungkin persamaan yang telah diformulasikan dengan cara yang demikian sehingga solusinya tidak ada, dan kita perlu menyadari kemungkinan ini. Namun situasi yang lain dapat dibangun: persamaan dapat mempunyai lebih dari satu solusi dan kita perlu mengetahui yang mana solusi atau solusi-solusi, jika ada adalah valid.

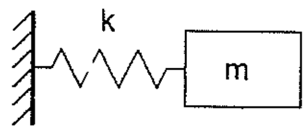
Interpretasi hasil atau solusi adalah salah satu langkah yang akan menghubungkan terakhir formulasi mathematika kembali ke problem dunia nyata. Ini dapat dikerjakan dalam berbagai cara. Suatu grafik solusi dapat digambarkan, tabel harga dapat diperumum, atau analisis kualitatif variabel tak bebas dapat dilakukan berdasarkan solusi yang diperoleh. Sering kita membandingkan solusi dengan beberapa data yang diketahui dan dihubungkan untuk merevikasi bahwa solusi merepresentasi situasi real.

Pada kenyataannya, setelah membangdingkan hasil dengan data yang ada, kita mungkin mendapatkan bahwa model dapat diperbaiki. Sementara itu mengatakan apakah hasil dari model cukup baik dengan data, terdapat banyak alasan mengapa hasil ini tidak begitu baik. Alasan pertama, data asli kemungkinan ada kesalahan, dan itu tidak berarti untuk mengasumsi bahwa ada harga yang benar bahwa model seharusnya tercapai. Namun demikian berdasarkan komparasi, seseorang boleh memutuskan untuk memodifikasi model dalam usaha untuk memperbaikinya. Salah satu yang umum adalah menguji kembali asumsi-asumsi dan kemungkinan perubahannya. Akibatnya, persamaan yang baru yang dibangun dan proses dari hal ini adalah berkali-kali. Proses ini sering diistilahkan sebagai perbaikan model dan dijalankan sebagai bagian integral dari pengembangan model matematika yang cocok dalam aplikasinya di kehidupan nyata.

BAB II
SISTEM MASSA PEGAS

2.1.SISTEM MASSA PEGAS HORISONTAL

Dalam pemodelan ini, kita ingin membahas problem yang dikenal dengan sistem massa pegas, dimana suatu massa yang diikatkan pada pegas yang diilustrasikan secara horisontal seperti pada Gambar 2.1 dibawah ini



Gambar 2.1. Sistem massa pegas

Kita ingin mempelajari gerakan massa m secara horisontal. Sebelum menyelesaikan problem ini, beberapa teori dan prinsip-prinsip dasar fisika yang terkait dengan fenomena ini. Sistem massa pegas ini tidak dapat diselesaikan tanpa memformulasikan persamaan yang menjelaskan gerakkan ini. Kita akan menggunakan Hukum Newton untuk sistem massa pegas ini. Untuk menjelaskan gerakan sistem massa pegas ini, diasumsikan bahwa massa hanya bergerak dalam satu arah, katakanlah dalam arah x. Berdasarkan Hukum Newton kedua tentang gerakan suatu titik massa dijelaskan dengan formula

$$\vec{F} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}), \qquad (2.1)$$

dimana $\vec{F}$ adalah jumlahan vector semua gaya yang digunakan untuk titik massa yang mempunyai massa m. Gaya $\vec{F}$ sama dengan laju perubahan momentum $m\vec{v}$, dimana $\vec{v}$ kecepatan massa. Jika $\vec{x}$ adalah posisi massa, maka

$$\vec{v} = \frac{d\vec{x}}{dt} \qquad (2.2)$$

Asumsikan massa m konstan, maka

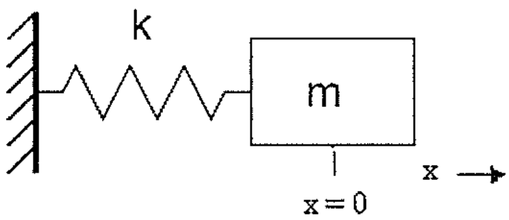
$$\vec{F} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = m\vec{a}, \tag{2.3}$$

dengan $\vec{a}$ adalah vektor percepatan massa

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{x}}{dt^2} \tag{2.4}$$

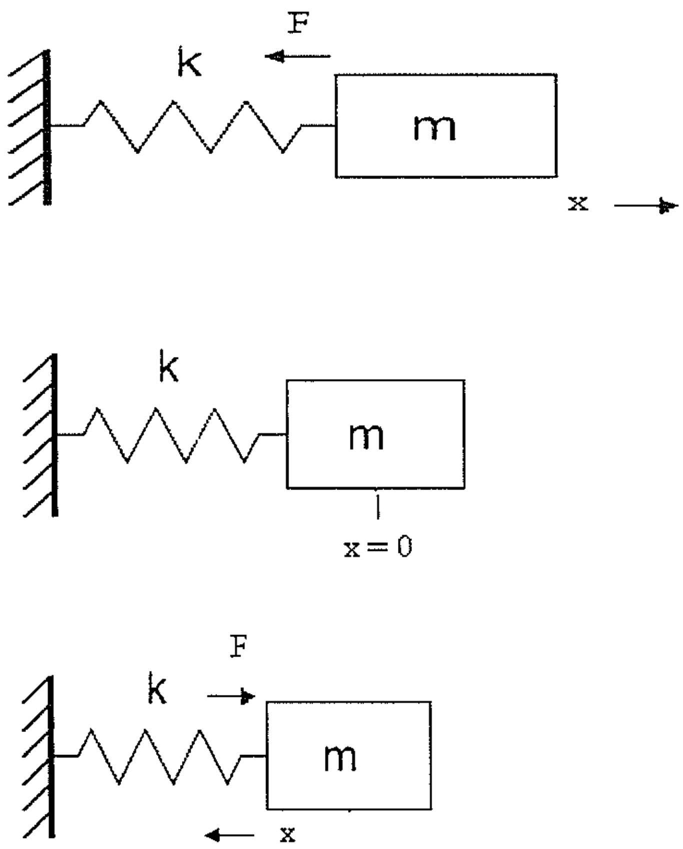
Hukum Newton kedua tentang gerakan menyatakan bahwa gaya pada partikel sama dengan massa partikel kali percepatan partikel. Percepatan suatu titik massa adalah proporsional dengan gaya total yang beraksi pada massa.

Sekarang kita menggunakan Hukum Newton kedua untuk sistem massa pegas, dimana gerakan massa dinyatakan dalam arah sumbu-X. Untuk mengembangkan suatu model yang sesuai untuk gaya pegas kita akan mempelajari gerakkan sistem massa pegas dalam situasi yang berbeda. Andaikan dalam suatu eksperimen telah berjalan untuk mengukur gaya pegas. Pada posisi massa ditempatkan dan massa tidak bergerak, maka tidak terdapat gaya yang bekerja pada massa. Posisi ini kita nyatakan sebagai pusat sumbu koordinat, seperti kita lihat pada gambar 2, $x = 0$ dikatakan posisi setimbang atau tidak ada rentangan dari pegas (massa pegas diabaikan)



Gambar 2. 2. Tidak ada gaya yang dilakukan oleh pegas

Jarak x berkenaan dengan perubahan posisi dari kesetimbangan atau rentangan pegas. Jika kita merentang pegas (yaitu kita nyatakan $x > 0$), maka pegas melakukan gaya penarik (ke kiri) massa kembali menuju posisi setimbang (katakanlah $F < 0$). Secara sama jika pegas ditekan (yaitu $x < 0$), maka pegas mendorong (ke kanan) massa kembali menuju posisi setimbang (yaitu $F > 0$)



Gambar 2.3. Gerakan sistem massa-pegas

Gaya F yang demikian dikatakan sebagai gaya pemulih (*restoring force*). Jika diasumsikan tidak ada gaya luar. Maka gaya yang bekerja pada massa m hanya gaya pegas. Gaya pegas ini bergantung pada elastisitas pegas dan dinyatakan secara linier oleh posisi massa terhadap posisi setimbang. Hubungan ini didekati secara linier yang dikenal dengan Hukum Hooke. Hubungan ini dinyatakan dengan persamaan,

$$F = -kx \tag{2.5}$$

Dimana k adalah konstanta pegas dan x adalah posisi massa terhadap posisi setimbang. Dengan menggunakan Hukum Hooke dan Newton kedua, model matematika paling sederhana tentang sistem massa pegas, yang dinyatakan oleh,

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx$$

Atau

$$m\frac{d^2x}{dt^2} - kx = 0 \tag{2.6}$$

Selanjutnya kita akan menganalisis perilaku gerakan massa dari sistem massa pegas ini berdasarkan model (2.6). Persamaan (2.6) adalah persamaan diferensial linier homogen orde ke dua dengan koefisien konstan. Solusi dari persamaan ini biasanya dinyatakan dalam bentuk ekspensial e^{rt}, solusi ini diperoleh secara langsung dengan mensubstitusi bentuk eksponensial ini ke dalam persamaan (2.6). maka diperoleh persamaan karakteristik bentuk kuadrat dalam r menghasilkan

$$mr^2 = -k \tag{2.7}$$

Diperoleh dua akar imajiner

$$r = \pm i\omega,$$

dengan $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$. Dengan demikian solusi umum adalah kombinasi dari $e^{i\omega t}$ dan $e^{-i\omega t}$

$$x = ae^{i\omega t} + be^{-i\omega t}, \tag{2.8}$$

dimana a dan b adalah konstanta. Supaya solusi ini bermakna maka bentuk imajiner ini harus dinatakan dalam fungsi real. Dari bentuk Euler dinyatakan

$$e^{i\omega t} = \cos\omega t + i\sin\omega t$$

dan

$$e^{-i\omega t} = \cos\omega t - i\sin\omega t$$

Maka solusi persamaan (1.8) menghasilkan

$$x = (a+b)\cos\omega t + i(a-b)\sin\omega t \tag{2.9}$$

Hasil solusi yang diinginkan adalah

$$x = c_1\cos\omega t + c_2\sin\omega t \tag{2.10}$$

Dengan mendefinisikan konstanta

$$c_1 = a + b$$

$$c_2 = i(a-b)$$

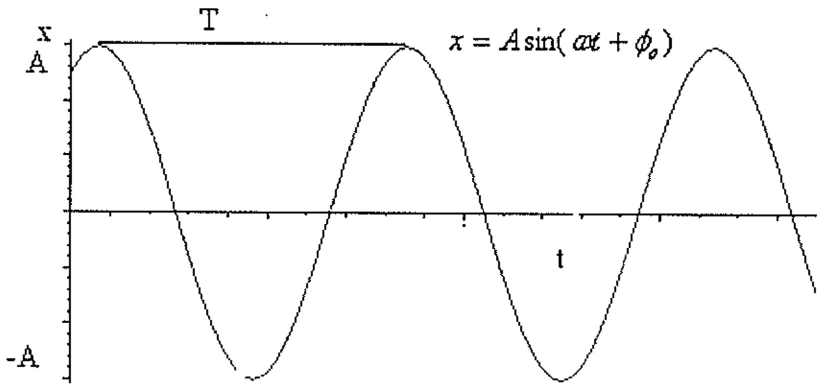
Solusi umum berupa kombinasi linier dari dua fungsi berosilasi cosinus dan sinus. Pernyataan yang ekivalen dengan persamaan (2. 10) adalah

$$x = A\sin(\omega t + \phi_o) \qquad (2.11)$$

Dengan hubungan persamaan sebagai berikut;

$$c_1 = A\sin\phi_o \text{ dan } c_2 = A\cos\phi_o$$

Atau $A = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$ dan $\phi_o = \tan^{-1}(\frac{c_1}{c_2})$



Gambar 2.4. Periode dan amplitude osilasi

Dari gambar terlihat bahwa A adalah amplitudo osilasi dan $\omega t + \phi_o$ adalah fase osilasi, dengan ϕ_o adalah fase pada saat $t = 0$, untuk menghitung periode osilasi dapat ditentukan dengan sifat bahwa periode fungsi sinus adalah 2π sehingga berlaku,

$$f(t+T) = f(t)$$

Jika T adalah periode osilasi maka belaku; $\omega(t+T) + \phi_o - \omega t - \phi_o = 2\pi$ dan diperoleh

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{m/k} \qquad (2.12)$$

Dengan ω adalah jumlah periode dalam 2π satuan waktu:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{k/m} \qquad (2.13)$$

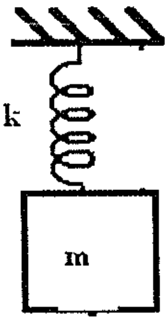
Jumlah osilasi dalam satu satuan waktu dikatakan frekuensi f, dengan

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{k/m} \qquad (2.14)$$

Perilaku kualitatif berdasarkan hasil analisis model menjelaskan bahwa jumlah osilasi sistem ini bergantung pada k dan m. pada konstanta pegas yang sama, jika massa semakin bertambah jumlah osilasinya semakin sedikit. Pada massa m yang sama, jika konstanta pegas bertambah (kekuatan pegas semakin kuat) maka jumlah osilasi semakin banyak.

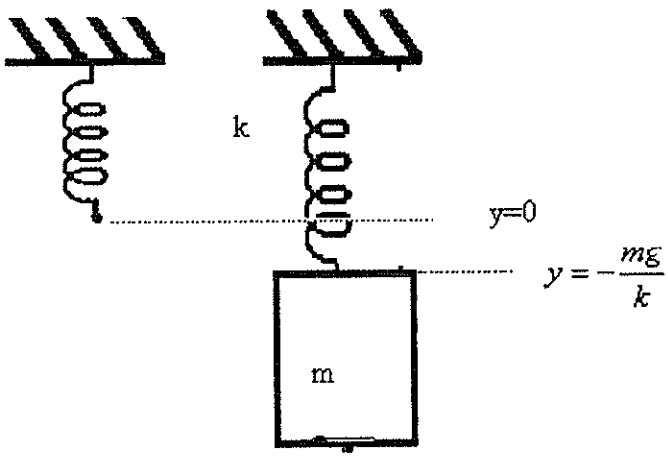
2.2. SISTEM MASSA PEGAS VERTIKAL

Sekarang kita membahas getaran yang dihasilkan oleh massa pada sistem massa pegas yang digambarkan secara vertikal, seperti pada gambar berikut ini,



Gambar 2.5. Sistem massa pegas vertikal

Penurunan yang membentuk persamaan pada sistem massa pegas horisontal tidak dapat dipakai untuk sistem vertikal. Karena gaya lain yang bekerja pada massa yaitu gaya gravitasi disini diasumsikan gaya gravitasi adalah konstan yang dapat dihampiri oleh $-mg$, yaitu massa m kali percepatan gravitasi $-g$. Misalkan y adalah koordinat vertikal posisi massa jika diukur terhadap ujung pegas tanpa beban. $y = 0$ adalah posisi tanpa beban.

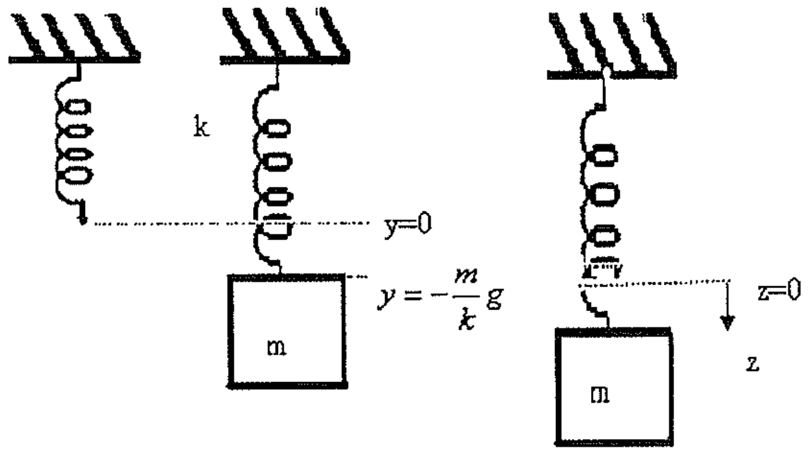


Gambar 2.6. Efek gravitasi pada kesetimbangan massa pegas.

Persamaan gerak dari sistem ini menjadi,

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = -ky - mg \tag{2.15}$$

Posisi setimbang setelah diberi beban adalah posisi dimana tidak ada gaya yang bekerja pada massa, jadi berlaku $\frac{dy}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2} = 0$, maka didapatkan $-ky - mg = 0$ atau $y = -\frac{m}{k}g$ adalah posisi setimbang dari sistem gravitasi massa pegas. Dari perhitungan analisis bahwa pegas menurun kebawah sejauh $\frac{mg}{k}$ bila massa diberikan. Interpretasi perilaku kualitatif menunjukkan bahwa, untuk massa yang lebih berat, pegas menurun lebih jauh, sedangkan jika pegas lebih kuat (k lebih besar), penurunan pegas lebih kecil. Interpretasi ini menunjukkan hal yang masuk akal. Untuk membahas gerakan dari sitem ini, akan lebih baik jika perubahan posisi massa ditentukan dari posisi setimbang setelah ada beban



Gambar 2.7. Posisi gerakan massa sekitar titik setimbang

Dengan pernyataan ini perlu pernyataan koordinat yang lain katakanlah z adalah perubahan gerak terhadap posisi setimbang $y = -\frac{m}{k}g$, dengan persamaan

$z = y - (-\frac{mg}{k}) = y + \frac{mg}{k}$, maka $\frac{dz}{dt} = \frac{dy}{dt}$ dan $\frac{d^2z}{dt^2} = \frac{d^2y}{dt^2}$

Persamaan (2.2.1) menjadi

$$m\frac{d^2z}{dt^2} = -kz \tag{2.16}$$

Dari penjelasan sebelumnya, persamaan ini menunjukkan gerakkan harmonis sederhana, yaitu massa akan bergerak berosilasi secara vertikal disekitar posisi setimbang.

2.3. MASALAH SYARAT BATAS

Salah satu cara untuk memulai gerakan pada suatu sistem massa pegas, cara yang paling mudah adalah mendorong atau menarik massa ke beberapa posisi (katakan x_o) dan kemudian membiarkan bergerak. Secara matematika kita ingin menyelesaikan persamaan

$$m\frac{d^2x}{dt^2} - kx = 0 \tag{2.17}$$

yang memenuhi syarat awal bahwa massa x_o pada saat $t = 0$, artinya $x(0) = x_o$, dan pada saat $t = 0$, kecepatan massa $\frac{dx}{dt}$ adalah nol, artinya $\frac{dx}{dt}(0) = 0$. Pada contoh masalah nilai awal ini massa awalnya diam. Dua syarat awal ini diperlukan karena persamaan diferensial ini melibatkan derivatif kedua dalam waktu. Jika solusi dari persamaan (2.17) dinyatakan dalam bentuk,

$$x = c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t$$

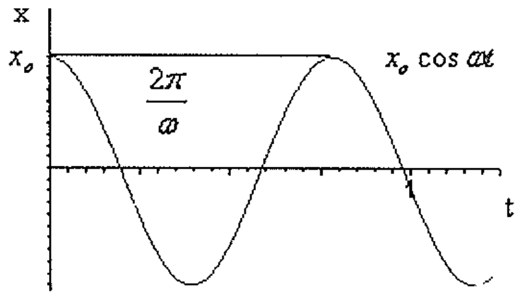
Untuk menyelesaikan masalah nilai awal, konstanta sebarang c_1, c_2 ditentukan sehingga persamaan (2.17) memenuhi syarat awal. Untuk menyelesaikan ini, pada saat $t = 0$, $x(0) = x_o$, maka kita punya $c_1 = x_o$. Sedangkan kecepatan diperoleh dengan mendiferensialkan perubahan posisi x terhadap t,

$$\frac{dx}{dt} = -c_1\omega \sin \omega t + c_2\omega \cos \omega t \tag{2.18}$$

Pada problem ini, massa diam pada saat $t = 0$, berarti $\frac{dx}{dt}(0) = 0$, ini menghasilkan $c_2 = 0$, dengan cara ini menghasilkan solusi,

$$x = x_o \cos \omega t$$

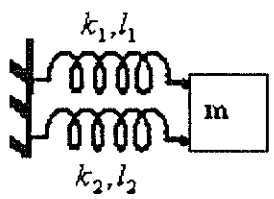
Yang memenuhi masalah nilai awal. Gerakan massa merupakan gerakan harmonis, seperti gambar berikut.



Gambar 2.8. Osilasi sistem massa pegas

Contoh 1:

Misalkan suatu massa m diikat oleh dua pegas secara parallel dengan system massa pegas horizontal (seperti pada Gambar 2.9). Jika masing – masing pegas mempunyai konstanta pegas k_1, k_2 dan panjang pegas mula-mula l_1, l_2. Pertanyaan yang muncul adalah sebagai berikut:



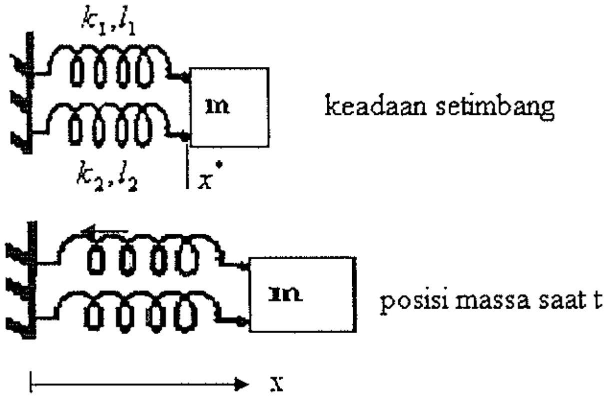
Gambar 2.9. Sistem massa pegas paralel

a. Buatlah suatu persamaan model dari gerakkan massa, jika posisi gerakan massa ini ditentukan dari dinding.
b. Sekarang hitung di mana posisi setimbang massa dari sistem ini.
c. Nyatakan suatu persamaan model yang diturunkan dari persamaan model di atas, jika gerakan massa ditentukan dari posisi setimbang.
d. Pelajari perilaku gerakan osilasi berdasarkan persamaan model dari c.

e. Interpretasikan hasil analisis ini dengan keadaan fisis getaran pada system tersebut.

Penyelesaian:

Asumsikan bahwa gerakkan massa itu dinyatakan dalam arah sumbu x, dan pusat koordinatnya pada dinding. Kita misalkan x = x(t) adalah posisi gerakkan massa terhadap dinding pada saat t. Perhatikan gerakkan massa pada posisi dimana saat digambarkan berikut ini,



Gambar 2.10. Posisi massa dan keadaan setimbang

a. Gaya yang bekerja pada massa adalah gaya resultan pegas satu dan pegas dua, arah gaya pegas satu dan gaya pegas dua sama (dalam hal ini ke kiri), karena posisi pegas saat ini di kanan posisi setimbang x^*. Gaya kedua pegas ini proporsional dengan rentangan pegas (menurut Hk Hooke). Rentangan pegas satu dan pegas dua sebagai berikut:

   $x - l_1 (> 0)$ dan $x - l_2 (> 0)$, kedua rentangan ini bernilai positip. Oleh karena itu jika gaya pegas satu dan pegas dua masing-masing adalah F_1, F_2, maka vector gaya pegas satu dan pegas dua adalah sebagai berikut:

$$F_1 = -k_1(x - l_1)$$
$$F_2 = -k_2(x - l_2) \qquad (2.19)$$

   Kedua gaya ini mempunyai nilai negatip karena arah gayanya ke kiri Sehingga gaya resultan pada massa adalah $F_1 + F_2$, yaitu $-k_1(x - l_1) - k_2(x - l_2)$. Persamaan model yang menjelaskan gerakan massa jika gerakkan ini diukur dari diding kiri dinyatakan oleh persamaan diferensial berikut,

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -k_1(x-l_1) - k_2(x-l_2)$$

Atau

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -(k_1+k_2)x + l_1 + l_2 \tag{2.20}$$

Merupakan persamaan diferensial biasa orde ke dua tak homogen

b. Jika x^* menyatakan posisi setimbang massa terhadap dinding, maka berlaku

$\frac{d^2x}{dt^2}(x^*) = \frac{dx}{dt} = 0$, oleh karena itu kita punya,

$-k_1(x^*-l_1) - k_2(x^*-l_2)=0$

Diperoleh $x^* = \frac{k_1l_1 + k_2l_2}{k_1+k_2}$

Untuk mengecek kebenaran model ini, maka dapat digunakan pengujian kasus-kasus dimana dilakukan dengan menentukan kondisi yang khusus untuk parameter-parameter k_1, k_2 dan l_1, l_2. Jika kita perhatikan secara intuisi tanpa melihat hasil perhitungan model, dapatlah kita membayangkan bahwa pada kasus l_1, l_2 sama besar (dalam hal ini panjang kedua pegas ini sama), maka dapat mengerti bahwa posisi setimbang seharusnya sama (yaitu $l_1 = l_2$). Untuk membuktikan alasan ini kita coba menghitung untuk kasus $l_1 = l_2 = l$, maka diperoleh $x^* = \frac{k_1+k_2}{k_1+k_2}l = l$, dengan demikian persamaan model ini cukup baik.

c. Untuk menyatakan gerakan massa yang ditentukan dari posisi setimbang x^*, perlu dilakukan transformasi koordinat yang berpusat pada x^*, misalkan z menyatakan gerakan massa terhadap posisi setimbang x^*. Maka $z = x - x^*$, dengan menggunakan transformasi ini, persamaan model menjadi,

$$m\frac{d^2z}{dt^2} = -(k_1+k_2)z \tag{2.21}$$

Merupakan persamaaan diferensial orde ke dua homogen

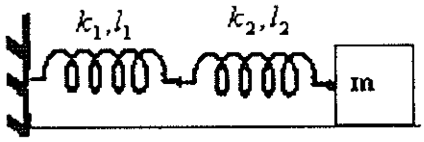
d. Gerakan massa dari persamaan model ini merupakan gerakan harmonis sederhana, yang berosilasi terhadap posisi setimbang dengan periode osilasi $T = \frac{2\pi}{\varpi} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k_1 + k_2}}$

besarnya periode osilasi ini bergantung pada berat massa m dan kekuatan pegas satu dan pegas dua.

f. Gerakan massa ini menginterpretasikan bahwa gerakan osilasi ini, berjalan secara terus menerus dengan amplitude yang sama (tetap), tidak pernah berhenti.

Contoh 2:

Misalkan suatu massa m diikat oleh dua pegas secara seri dengan system massa pegas horizontal (seperti pada gambar). Jika masing – masing pegas mempunyai konstanta pegas k_1, k_2 dan panjang pegas mula-mula l_1, l_2. Pertanyaan yang muncul adalah sebagai berikut:

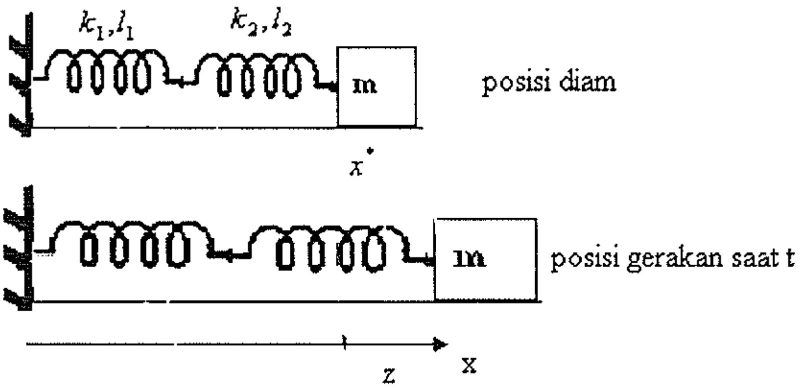


Gambar 2.11. Sistem massa pegas paralel

a. Buatlah suatu persamaan model dari gerakkan massa, jika posisi gerakan massa ini ditentukan dari didinding.
b. Sekarang hitung di mana posisi setimbang massa dari system ini.
c. Nyatakan suatu persamaan model yang diturunkan dari persamaan model di atas, jika gerakan massa ditentukan dari posisi setimbang.
d. Pelajari perilaku gerakan osilasi berdasarkan persamaan model dari c.
e. Interpretasikan hasil analisis ini dengan keadaan fisis getaran pada system tersebut.

Penyelesaian:

a. Dalam pembahasan ini, gerakkan massa itu dinyatakan dalam arah sumbu X, dan pusat koordinatnya pada dinding. Kita misalkan x = x(t) adalah posisi gerakkan massa terhadap dinding pada saat t. Perhatikan saat dimana gerakkan massa pada posisi yang digambarkan berikut ini,



Gambar 2.12. Posisi gerakan massa dan keadaan setimbang sistem

Perhatikan gaya yang bekerja pada massa. Asumsikan tidak ada gaya luar yang bekerja pada massa, gaya yang beraksi pada massa hanya gaya pegas (dalam hal ini gaya pegas satu dan pegas dua) dan lantai sangat licin sehingga tidak ada gesekan antara massa dengan permukaan lantai.Oleh karena gaya pegas ditentukan oleh rentangan pegas, maka perlu menghitung besar rentang pegas satu dan pegas dua, juga rentang pegas yang dihasilkan pegas satu dan pegas dua.

Yang perlu diperhatikan bahwa besar gaya pada massa yang dilakukan oleh pegas satu sama dengan pegas dua, dan juga sama secara bersama-sama. Hal ini mengingat besar gaya tegangan pegas sama pada setiap titik sepanjang pegas. Jika F_1, F_2, F masing-masing menyatakan gaya pegas satu, pegas dua dan kedua pegas secara bersama-sama. Misalkan rentang pegas satu z_1, rentang pegas dua z_2 dan rentang pegas secara bersama-sama z, maka akan berlaku $z = z_1 + z_2$ dan $F_1 = F_2 = F$.

Gaya pegas satu : $F_1 = -k_1 z_1$, maka $z_1 = -\dfrac{F_1}{k_1}$

Gaya pegas dua : $F_2 = -k_2 z_2$, maka $z_2 = -\dfrac{F_2}{k_2}$

Dari hubungan persamaan ini, dapat jabarkan $z = z_1 + z_2 = -(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2})F$ atau diperoleh gaya pegas bersama-sama pada massa F sebesar

$$F = -z\left(\frac{1}{\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}}\right) = -z\left(\frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}\right) \qquad (2.22)$$

Dilain pihak karena besarnya z ini adalah $z = x - l_1 - l_2$, maka diperoleh persamaan model gerakan massa sebagai berikut:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -\left(\frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}\right)(x - l_1 - l_2) \qquad (2.23)$$

b. Jika x^* menyatakan posisi setimbang massa yang dihitung terhadap dinding, maka harus dipenuhi $\frac{d^2x}{dt^2}(x^*) = \frac{dx}{dt} = 0$. Dengan ketentuan ini diperoleh $x^* = l_1 + l_2$.

c. Untuk menyatakan gerakan massa terhadap posisi setimbang $x^* = l_1 + l_2$, maka dilakukan transformasi koordinat yang baru yang berpusat di $x^* = l_1 + l_2$ yaitu $z = x - x^* = z - (l_1 + l_2)$, persamaan model gerakan massa terhadap posisi setimbang dapat dituliskan menjadi

$$m\frac{d^2z}{dt^2} = -\left(\frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}\right)z \qquad (2.24)$$

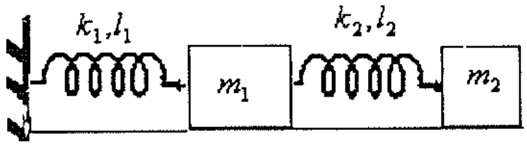
d. Gerakan massa terhadap posisi setimbang berupa gerakan harmonis sederhana, dengan periode osilasi $T = \frac{2\pi}{\varpi} = 2\pi\sqrt{\frac{m(k_1 + k_2)}{k_1 k_2}}$, sedangkan frekuensi natural adalah $f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k_1 k_2}{m(k_1 + k_2)}}$. Disini dapat disimpulkan sebagai berikut:

1. Jika $k_1 k_2 \leq k_1 + k_2$, jumlah osilasi dalam satu satuan waktu akan lebih sedikit untuk massa yang sama.
3. Jika k_1, k_2 tetap, maka untuk massa yang lebih besar, jumlah osilasi semakin sedikit dan sebaliknya.

e. Gerakan massa ini menginterpretasikan bahwa gerakan osilasi ini, berjalan secara terus menerus dengan amplitude yang sama (tetap), tidak pernah berhenti.

Contoh 3:

Pada suatu bidang atau permukaan meja horinsontal yang licin (smooth), suatu massa m_1 dihubungkan dengan dinding P (tetap) oleh pegas satu dengan konstanta pegas k_1 dan panjang pegas l_1. Suatu massa yang kedua m_2 kemudian dihubungkan dengan massa satu oleh pegas dua dengan konstanta pegas k_2 dan panjang l_2. Lihat seperti Gambar 2.13 di bawah ini,



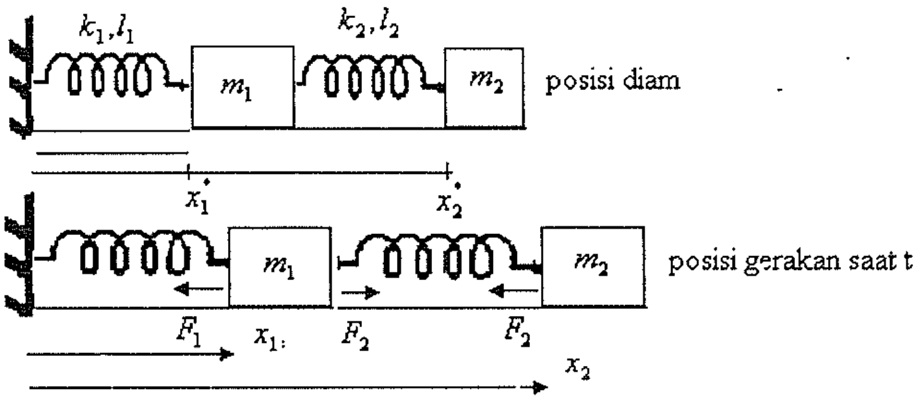
Gambar 2.13 Sistem dua massa-pegas horisontal

Pertanyaan :

a. Buatlah suatu persamaan model dari gerakkan massa satu dan massa dua, jika posisi gerakan massa-massa ini ditentukan dari dinding kiri.
b. Sekarang hitung di mana posisi setimbang massa dari system ini.
c. Nyatakan suatu persamaan model yang diturunkan dari persamaan model di atas, jika gerakan massa-massa ditentukan dari posisi setimbangnya.
d. Jika diberikan $k_1 = 4, k_2 = 2$, $m_1 = 2, m_2 = 1$ dan pada saat awal massa satu digeser sejauh 1 ke kiri dari posisi setimbang dan massa kedua digeser ke kanan dari posisi setimbangnya, kemudian dilepaskan begitu saja dandibiarkan bergerak. Selesaikan masalah syara awal ini, untuk mendapatkan solusi eksak dari gerakan massa satu dan gerakan dari massa dua terhadap posisi setimbang.
e. Pelajari perilaku gerakan osilasi gerakan kedua massa tesebut berdasarkan persamaan model dari c.
f. Interpretasikan hasil analisis ini dengan keadaan fisis getaran pada system tersebut.

Penyelesaian :

Asumsikan bahwa permukaan meja sangat licin sehingga gaya gesekan terhadap meja diabaikan. Dan gaya luar yang beraksi pada massa satu dan massa dua tidak ada kecuali gaya pegas. Untuk menjelaskan gaya-gaya pegas ini, per'u bantuan gambar sebagai berikut;



Gambar 2.14. Gerakan massa-massa saat t

Gerakan kedua massa ini dinyatakan dalam arah sumbu X. Misalkan x_1, x_2 menyatakan gerakan massa satu dan massa dua yang dihitung dari dinding kiri.. Pada kondisi saat waktu t yang digambarkan ini, menunjukkan bahwa

- Rentang pegas satu sebesar $x_1 - l_1$ (>0)
- Rentang pegas dua sebesar $x_2 - x_1 - l_2$ (>0) oleh karena itu besarnya gaya pegas yang beraksi pada masing-masng massa adalah sebagai berikut:

Gaya pada massa satu :

$F_1 = -k_1(x_1 - l_1)$ dan

$F_2 kiri = k_2(x_2 - x_1 - l_2)$, sehingga gaya resultan pada massa satu adalah $F_1 + F_2 kiri = -k_1(x_1 - l_1) + k_2(x_2 - x_1 - l_2)$.

Gaya pada massa dua:

$F_2 kanan = -k_2(x_2 - x_1 - l_2)$

Sehingga menurut Hukum Newton II, diperoleh persamaa gerak massa satu,

$$m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} = F_1 + F_2 kiri = -k_1(x_1 - l_1) + k_2(x_2 - x_1 - l_2)$$

Persamaan gerak massa dua,

$$m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} = F_2 kanan = -k_2(x_2 - x_1 - l_2)$$

Dngan demikian persamaan model gerakn massa satu dan massa dua secara simultan dinyatakan sebagai berikut,

$$m_1 \frac{d^2x_1}{dt^2} = -k_1(x_1 - l_1) + k_2(x_2 - x_1 - l_2)$$

$$m_2 \frac{d^2x_2}{dt^2} = -k_2(x_2 - x_1 - l_2) \qquad (2.25)$$

Suatu bentuk system persamaan diferensial orde kedua .

b. Jika x_1^*, x_2^* adalah posisi setimbang masing-masing dari massa satu dan massa dua yang diukur terhadap dinding kiri, maka harus dipenuhi $\frac{d^2x_1}{dt^2}(x_1^*, x_2^*) = 0$ dan $\frac{d^2x_2}{dt^2}(x_1^*, x_2^*) = 0$. Dari persamaan ini , maka

$-k_1(x_1^* - l_1) + k_2(x_2^* - x_1^* - l_2) = 0$

$-k_2(x_2^* - x_1^* - l_2) = 0$

dperoleh posisi setimbang $x_1^* = l_1$ dan $x_2^* = l_1 + l_2$

c. Jika gerakan massa dinyatakan terhadap masing-masing posisi setimbangnya, maka perlu melakukan transformasi koordinat yang berpusat di posisi setimbangnya. Transformasi ini misalkan $z_1 = x_1 - x_1^* = x_1 - l_1$ dan $z_2 = x_2 - l_1 - l_2$. Dari transformsi koordinat ini, maka $\frac{d^2x_1}{dt^2} = \frac{d^2z_1}{dt^2}$ dan $\frac{d^2x_2}{dt^2} = \frac{d^2z_2}{dt^2}$. Sehingga diperoleh system persamaan diferensial berkut;

$$m_1 \frac{d^2z_1}{dt^2} = -(k_1 + k_2)z_1 + k_2 z_2$$

$$m_2 \frac{d^2z_2}{dt^2} = k_2 z_1 - k_2 z_2 \qquad (2.26)$$

Jika diberikan $m_1 = 2, m_2 = 1$ dan $k_1 = 4, k\ = 2$, maka persamaan di atas menjadi,

$$2\frac{d^2z_1}{dt^2} = -6z_1 + 2z_2$$

$$\frac{d^2z_2}{dt^2} = 2z_1 - 2z_2$$

Atau

$$\frac{d^2 z_1}{dt^2} = -3z_1 + z_2 \qquad \text{(a)}$$

$$\frac{d^2 z_2}{dt^2} = 2z_1 - 2z_2 \qquad \text{(b)}$$

Untuk menyelesaikan persamaan di atas, dilakukan dengan cara substitusi sebagai berikut. Dari persamaan (a), maka $z_2 = \frac{d^2 z_1}{dt^2} + 3z_1$, kemudian didiferensialkan ke t dua kali diperoleh, $\frac{d^2 z_2}{dt^2} = \frac{d^4 z_1}{dt^4} + 3z_1$, dan kemudian disubstitusi ke persamaan (b), maka diperoleh persamaan diferensial dalam z_1 dan t, sebagai berikut:

$$\frac{d^4 z_1}{dt^4} + 5\frac{d^2 z_1}{dt^2} + 4z_1 = 0 \qquad \text{(c).}$$

Jika dinyatakan dalam bentuk operator $D = \frac{d}{dt}$, maka persamaan (c) dalam bentuk operator dituliskan oleh,

$$(D^4 + 5D^2 + 4)z_1 = 0 \qquad \text{(d)}$$

Solusi dari persamaan ini adalah $z_1 = e^{rt}$, maka persamaan particular untuk persamaan ini adalah,

$$r^4 + 5r^2 + 4 = 0 \text{ atau } (r^2 + 1)(r^2 + 4) = 0$$

Dan diperoleh akar-akar karakteristik : $r_{1,2} = \pm i$, dan $r_{3,4} = \pm 2i$. Jadi solusi umum untuk z_1 adalah $z_1(t) = a_1 \cos t + a_2 \sin t + b_1 \cos 2t + b_2 \sin 2t$. Dengan cara yang sama dilakukan untuk mendapatkan solusi z_2. Dan diperoleh solusi

$$z_2(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t + d_1 \cos 2t + d_2 \sin 2t$$

Jika z_1, z_2 disubstitusikan ke (a),

$$0 = D^2 z_1 + 3z_1 - z_2$$

$$\Leftrightarrow \quad 0 = -a_1 \cos t - a_2 \sin t - 4b_1 \cos 2t - 4b_2 \sin t +$$
$$3(a_1 \cos t + a_2 \sin t + b_1 \cos 2t + b_2 \sin 2t) +$$
$$-(c_1 \cos t + c_2 \sin t + d_1 \cos 2t + d_2 \sin 2t)$$

$$\Leftrightarrow 0 = (2a_1 - c_1)\cos t + (2a_2 - c_2)\sin t + (-b_1 - d_1)\cos 2t + (-b_2 - d_2)\sin 2t$$

Karena $\cos t, \sin t, \cos 2t, \sin 2t$ adalah bebas linier, maka koefisien-koefisien harus sama dengan nol, yaitu diperoleh:

$$c_1 = 2a_1 \qquad d_1 = -b_1$$
dan
$$c_2 = 2a_2 \qquad d_2 = -b_2$$

Jadi solusi umum: $z_1(t) = a_1 \cos t + a_2 \sin t + b_1 \cos 2t + b_2 \sin 2t$

$$z_2(t) = 2a_1 \cos t + 2a_2 \sin t - b_1 \cos 2t - b_2 \sin 2t$$

Solusi ini dapat ditulis dalam bentuk yang lain sebagai berikut:

$$z_1(t) = A\cos(t-\phi) + B\cos(2t-\theta)$$

$$z_2(t) = 2A\cos(t-\phi) + 2B\cos(2t-\theta)$$

Dengan $A = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$, $\tan\phi = \dfrac{a_2}{a_1}$, $B = \sqrt{b_1^2 + b_2^2}$ dan $\tan\theta = \dfrac{b_2}{b_1}$

Dengan masalah syarat awal: $z_1(0) = -1, z_1'(0) = 0$, dan $z_2(0) = 2, z_2'(0) = 0$. Dengan menggunakan syarat awal ini,

$$-1 = a_1 + b_1$$

$$0 = a_2 + 2b_2$$

$$2 = 2a_1 - b_1$$

$$0 = 2a_2 - 2b_2$$

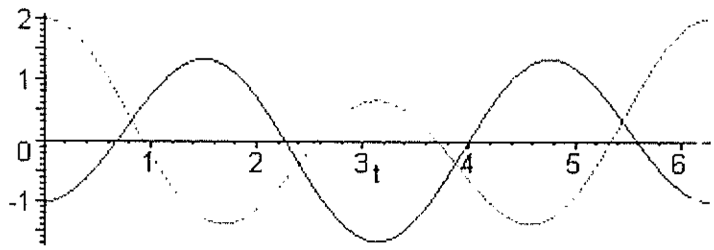
Dari hubungan ini diperoleh, $a_2 = 0, b_2 = 0, a_1 = \frac{1}{3}, b_1 = -\frac{4}{3}$

Jadi solusi eksak z_1, z_2 adalah

$$z_1(t) = \frac{1}{3}\cos t - \frac{4}{3}\cos 2t$$

$$z_2(t) = \frac{2}{3}\cos t + \frac{4}{3}\cos 2t$$

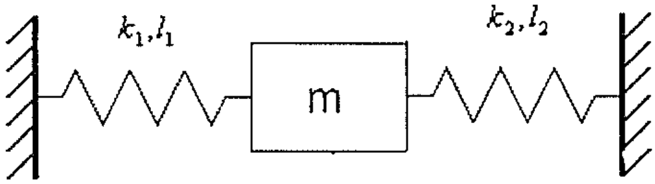
Grafik solusi digambarkan sebagai berikut:



Gambar 2.15. Perilaku gerakan massa satu dan massa dua

Latihan Soal :

Misalkan suatu massa m diikat diantara dua pegas sedangkan ujung-ujung pegas yang lain diikat pada dinding tetap. (seperti pada gambar). Jika masing – masing pegas mempunyai konstanta pegas k_1, k_2 dan panjang pegas mula-mula l_1, l_2. Pertanyaan yang muncul adalah sebagai berikut:



Gambar 2.16. Sistem massa pegas

Pertanyaan:

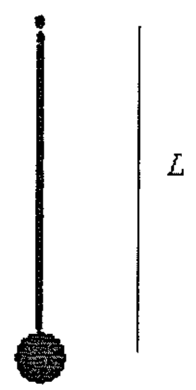
a. Buatlah suatu persamaan model dari gerakkan massa, jika posisi gerakan massa ini ditentukan dari dinding !
b. Sekarang hitung di mana posisi setimbang massa dari sistem ini !
c. Nyatakan suatu persamaan model yang diturunkan dari persamaan model di atas, jika gerakan massa ditentukan dari posisi setimbang !
d. Pelajari perilaku gerakan osilasi berdasarkan persamaan model dari c !
e. Interpretasikan hasil analisis ini dengan keadaan fisis getaran pada sistem tersebut!

BAB III

PENDULUM

Pada Bab II telah dibahas sistem massa-pegas baik secara horisontal dan vertikal. Sekarang kita ingin mengetahui efek suku-suku taklinier yang terlibat. Untuk memberikan motivasi tambahan kepada kita dalam menganalsis problem-problem tak linier, kita sekarang mendiskusikan sistem fisik secara umum yang mempunyai hasil-hasil rumusan matematika pada suatu persamaan tak linier.

Perhatikan suatu pendulum yang panjangnya L, sebagaimana yang ditunjukkan pada Gambar 3.1. Pada salah satu ujung pendulum diikatkan pada suatu titik tetap dan bebas berputar (berotasi), sekitar titik tetap ini. Suatu massa m diikat pada ujung pendulum yang lain seperti digambarkan berikut ini.

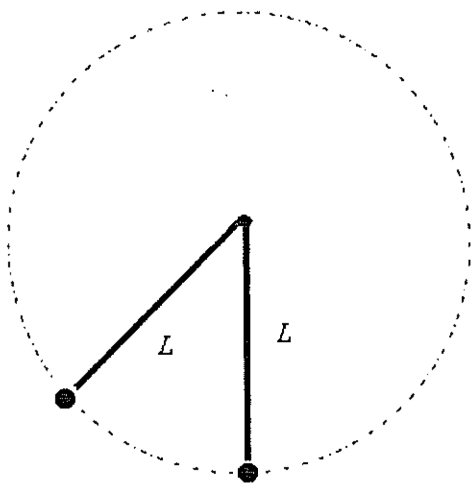


Gambar 3.1. Pendulum

Kita ingin mengetahui dari pengamatan bahwa suatu pendulum berosilasi secara kualitatif mirip dengan system massa-pegas. Untuk membuat problem ini lebih mudah, kita asumsikan massa m cukup besar sehingga, sebagaiman sautu aproksimasi, kita menyatakan bahwa seluruh massa partikel pada batang pendulum diabaikan artinya massa dari batang yang kaku dari pendulum diasumsikan diabaikan. Dengan menggunakan hukum Newton ke dua tentang gerakan massa,

$$\bar{F} = m\bar{a} \tag{3.1}$$

Pendulum dalam pengamatan ini, diasumsikan bergerak dalam bidang datar (dalam dua dimensi). Hal ini tidak seperti system massa-pegas yang dipaksakan bergerak pada satu dimensi. Namun, suatu pendulum juga melibatkan hanya satu derajat kebebasan, jika itu dipaksakan bergerak sepanjang keliling lingkaran yang berjari-jari L, seperti disajikan pada Gambar 3.2.



Gambar 3.2: Gerakan melingkar pendulum

Akibatnya, kita akan mengembangkan bentuk hukum Newton ke dua, dengan mengambil koordinat polar. Dalam dua atau tiga dimensi, hukum Newton ke dua untuk gerakan massa m dalam bentuk vector adalah,

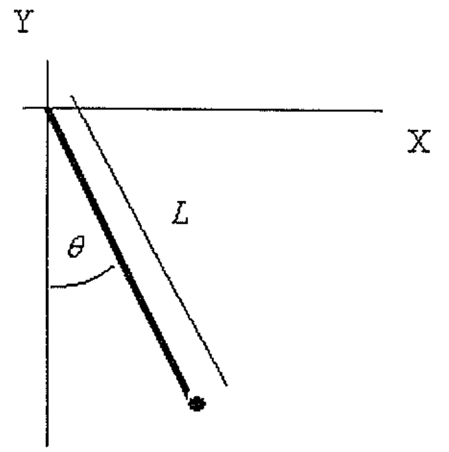
$$m\frac{d^2\bar{x}}{dt^2} = \vec{F} \qquad (3.2)$$

Dimana $\bar{x}$ adalah vector posisi massa (yaitu vector dari titik asal ke massa). Dengan memperhatikan vector pada system koordonat kartesius pada dua dimensi, vecktor posisi dinyatakan oleh $\bar{x} = x\bar{i} + y\bar{j}$. Vektor percepatan $\frac{d^2\bar{x}}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2}\bar{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\bar{j}$ dimana

$\bar{i}, \bar{j}$ adalah vector satuan dalam arah sumbu-sumbu simetri. Dalam pembahasan ini, gerakan pendulum itu dinyatakan dalam koordinat polar pada dua dimensi. Vektor posisi ditunjukkan dalam arah keluar dengan panjang L, yaitu

$$\bar{x} = L\bar{r} \qquad (3.3)$$

Dimana $\bar{r}$ adalah vector satuan yang berkenaan dengan jari-jari. Jika θ adalah sudut yang dibentuk dari pendulum dengan posisi alamiah (diam). Lihat Gambar 3.3.

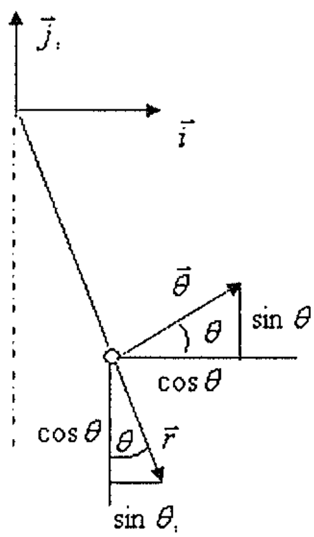


Gambar 3.3. Posisi pendulum dalam koordinat polar

Dimana L konstan karena pendulum tidak berubah terhadap waktu. Dengan demikian

$$\frac{d^2\vec{x}}{dt^2} = L\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \qquad (3.4)$$

Namun, meskipun ukuran $\vec{r}$ adalah konstan (yaitu $|\vec{r}| = 1$) arahnya bervariasi dalam ruang. Untuk mengubah vektor satuan radial $\vec{r}$, kita nyatakan dalam bentuk vektor-vektor satuan Kartesian.



Gambar 3.4. Vektor-vektor satuan sudut dan radial

Dalam bidang, hubungan antara vektor-vektor satuan pada koordinat polar dengan koordinat Kartesius, dalam gambar ini dinyatakan oleh,

$$\vec{r} = -\cos\theta\,\vec{j} + \sin\theta\,\vec{i} = \sin\theta\,\vec{i} - \cos\theta\,\vec{j} \qquad (3.5)$$

Vektor satuan $\vec{\theta}$ adalah tegak lurus dengan $\vec{r}$ dan arah vektornya searah dengan naiknya θ. Dengan demikian vector satuan $\vec{\theta}$ yang dinyatakan dalam koordinat Kartesius adalah,

$$\vec{\theta} = \cos\theta\,\vec{i} + \sin\theta\,\vec{j} \qquad (3.6)$$

Untuk menghitung vector percepatan, maka pertama dihitung vector kecepatan sebagai berikut, dari persamaan (2.1.3),

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = L\frac{d\vec{r}}{dt} + \frac{dL}{dt}\vec{r} \qquad (3.7)$$

Karena L konstan untuk suatu pendulum, $\frac{dL}{dt} = 0$, dan oleh karena itu,

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = L\frac{d\vec{r}}{dt} \qquad (3.8)$$

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = L\frac{d\theta}{dt}\frac{d\vec{r}}{d\theta} \qquad (3.9)$$

Dari persamaan (3.5),

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\theta}{dt}\frac{d\vec{r}}{d\theta} = \frac{d\theta}{dt}(\cos\theta\,\vec{i} + \sin\theta\,\vec{j}) = \frac{d\theta}{dt}\vec{\theta} \qquad (3.10)$$

Sehingga dapat ditulis,

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = L\frac{d\theta}{dt}\vec{\theta} \qquad (3.11)$$

Ini menunjukkan bahwa arah kecepatan searah dengan vector satuan sudut

Dengan cara yang sama,

$$\frac{d\vec{\theta}}{dt} = -\frac{d\theta}{dt}\frac{d\vec{\theta}}{d\theta}$$

$$\frac{d\vec{\theta}}{dt} = -\frac{d\theta}{dt}\vec{r} \qquad (3.12)$$

Dari persamaan (3. 9), jika didiferensialkan ke-t akan diperoleh,

$$\frac{d^2\vec{x}}{dt^2} = L\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

$$\frac{d^2\bar{x}}{dt^2} = L\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 \frac{d^2\bar{r}}{d\theta^2} + L\left(\frac{d\bar{r}}{d\theta}\right)\frac{d^2\theta}{dt^2} \tag{3.13}$$

Sehingga,

$$\frac{d^2\bar{x}}{dt^2} = L\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 \left(\cos\theta\,\bar{j} - \sin\theta\,\bar{i}\right) + L\left(\sin\theta\,\bar{j} + \cos\theta\,\bar{i}\right)\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

$$= L\left\{-\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 \bar{r} + \frac{d^2\theta}{dt^2}\bar{\theta}\right\} \tag{3.14}$$

Selanjutnya perlu menentukan gaya-gaya yang bekerja pada mass pendulum, menurut Hukum Newton kedua tentang gerakan massa, memenuhi

$$m\frac{d^2\bar{x}}{dt^2} = \bar{F} \tag{3.15}$$

Perhatikan bahwa gaya-gaya yang bekerja pada massa adalah:

- Gaya berat yaitu gaya gravitasi yang besarnya = $-mg\bar{j} = mg(\cos\theta\,\bar{r} - \sin\theta\,\bar{\theta})$
- Gaya tegangan batang pendulum, misalkan= $-T\,\bar{r}$

Dengan memperhatikan gaya-gaya ini, maka diperoleh persamaan model gerakan pendulum dalam koordinat polar sebagai berikut:

$$mL\left(-\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 \bar{r} + \frac{d^2\theta}{dt^2}\bar{\theta}\right) = mg(\cos\theta\,\bar{r} - \sin\theta\,\bar{\theta}) - T\,\bar{r}$$

Atau dapat ditulis menjadi

$$L\left(-\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 \bar{r} + \frac{d^2\theta}{dt^2}\bar{\theta}\right) = g(\cos\theta\,\bar{r} - \sin\theta\,\bar{\theta}) - T/m\,\bar{r}$$

$$= -g\sin\theta\,\bar{\theta} + (\mathrm{mg}\cos\theta - T/m)\,\bar{r} \tag{3.16}$$

Selanjutnya menyamakan komponen dari vector satuan $\bar{r}, \bar{\theta}$, diperoleh persamaan:

$$L\frac{d^2\theta}{dt^2} = -g\sin\theta \tag{3.17.a}$$

$$-L\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = g\cos\theta - T/m \tag{3.17.b}$$

Jika gerakan pendulum dinyatakan dalam sudut dinyatakan oleh,

$$L\frac{d^2\theta}{dt^2} = -g\sin\theta \tag{3.18}$$

Atau

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{L}\sin\theta \tag{3.19}$$

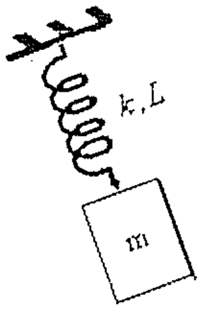
Dari persamaan (3.19) menunjukkan bahwa gerakan pendulum tidak bergantung pada ukuran massa m yang diikatkan pada pendulum. Hanya berubah terhadap L, g yang akan memberikan pengaruh gerakan. Fakta kualitatif ini, telah ditunjukkan meskipun kita belum menyelesaikan persamaan diferensial ini. Lebih jauh hanya ratio g/L yang memberikan peranan penting dari persamaan (3.19). Persamaan pendulum yang dibentuk ini merupakan persamaan diferensial tak linier, oleh karena itu dikatakan persamaan pendulum tak linier. Problem tak linier ini lebih sulit untuk diselesaikan dari pada persamaan linier. Untuk mengetahui perilaku tak linier ini, kita mengunakan hampiran untuk θ cukup kecil. Dengan hampiran $\sin\theta \approx \theta$, yang merupakan linierisasi di sekitar titik asal, maka persamaan diferensial (3.19), menjadi,

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{L}\theta \tag{3. 20}$$

Persamaan ini dikatakan persamaan pendulum yang dilinierkan. Persamaan ini adalah tipe yang sama dari persamaan diferensial sebagaimana persamaan yang dibentuk dari suatu system masa pegas yang dilinierkan tanpa friksi. Oleh karena itu, pendulum yang dilinierkan juga merupakan gerakan harmonis, yang berosilasi dengan frekuensi $\omega = \sqrt{\frac{g}{L}}$ dan periode $T = 2\pi\sqrt{g/L}$, sepanjang θ kecil. Efek perubahan panjang pendulum atau perubahan ukuran gravitasi dapat ditentukan secara kualitatif dan kuantitatif secara langsung. Lagi periode osilasi tidak bergantung pada amplitude(karena suatu hampiran untuk osilasi kecil).

Latihan Soal:

Misalkan suatu massa m diikat oleh ujung pegas panjangnya L dan konstanta pegas k. Ujung pegas yang lain diikatkan pada suatu titik / poros yang bebas berotasi. Sebagai mana terlihat pada gambar dibawah ini, jika gerakan ini dinyatakan dalam gerakan seperti pada pendulum. Turunkan suatu model matematika yang menjelaskan gerakan dari sistem pendulum ini.



Gambar 3.5. Gerakan sistem massa pegas secara rotasi

BAB IV
MODEL MATEMATIKA DI BIDANG BIOLOGI

Sebelum dibahas tentang model matematika di bidang biologi. perlu kiranya diulas tentang tujuan utama dari penyusunan model matematika. Tujuan disusunnya model matematika dapat dibedakan menjadi:

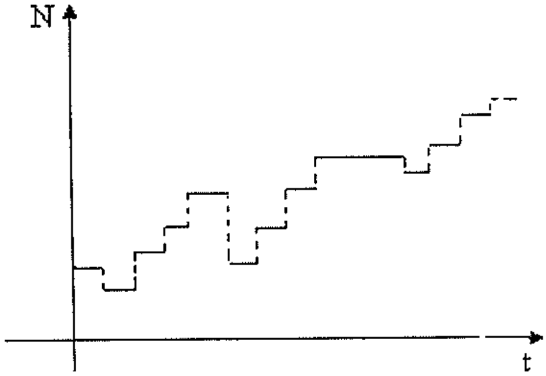
a. Untuk mengetahui keterkaitan antara besaran yang satu terhadap besaran yang lain yang terlibat dalam permasalahan yang dikaji. Dalam hal ini diharapkan dapat diketahui nilai suatu besaran ataupun pengaruh yang ada sebagai akibat perubahan nilai besaran lain yang terkait pada bentuk model tersebut.
b. Untuk menentukan pendugaan nilai suatu besaran yan terlibat dalam permasalahan tersebut pada waktu yang akan datang. Pada umumnya model matematika ini merupakan model dari suatu permasalahan yang bergantung pada waktu.
c. Untuk menghitung nilai optimum dari suatu besaran sebagai akibat bervariasinya nilai besaran-besaran lain yang terlibat dengan permasalahan yang dikaji. Biasanya model matematika ini merupakan suatu bentuk model dari permasalahan optimasi.

Selanjutnya, model keterkaitan dapat dibagi menjadi beberapa bentuk model berdasarkan pengetahuan matematika yang digunakan sebagai alat penyusun model, antara lain: model diskrir, model kontinu, dan model persamaan diferensial. Pada model persamaan diferensial, bentuk model matematika yang terkait adalah variabel kontinu dan fungsi-fungsi kontinu dan bentuk model diberikan dalam persamaan diferensial atau bentuk masalah syarat batas. Solusi persamaan tersebut merupakan suatu fungsi yang memperlihatkan keterkaitan antara besaran yang besaran yang satu terhadap besaran yang lain yang terlibat dalam permasalahan yang dikaji

Suatu model matematika untuk menentukan besar populasi dari suatu jenis kehidupan (manusia, hewan, atau yang lain) akan dibahas pada bagian ini. Berikut disajikan beberapa contoh:

Populasi kera pada suatu cagar alam. Untuk mengetahui perkembangbiakan populasi kera tersebut diadakan observasi secara periodik dengan selang waktu tertentu.

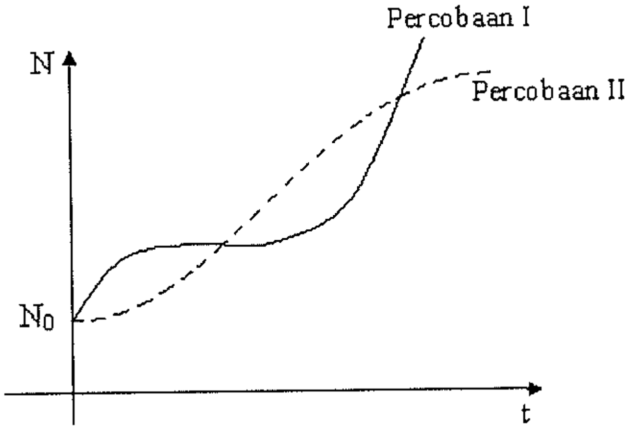
Dari sini terlihat bahwa waktu pengamatan pengamatan merupakan variabel diskrit. Misalkan N menyatakan besar populasi dan t menyatakan waktu pengamatan, maka N dapat dinyatakan sebagai fungsi variabel t. Besarnya populasi N akan berubah apabila terjadi proses kelahiran dan kematian, sperti terlihat pada Gambar 4.1.



Gambar 4.1. Grafik pertumbuhan populasi kera

Kurva di atas adalah diskontinu karena perubahan besar populasi merupakan bilangan bulat (+1 bila terjadi kematian, -1 bila terjadi kematian, +2 bila terjadi kelahiran kembar, dst). Bila populasi kera cukup besar, maka besar populasi $N(t)$ dapat mendekati fungsi kontinu terhadap perubah waktu.

Contoh berikutnya, misalkan akan diamati perkembangbiakan binatang yang diisolir dalam suatu laboratorium. Andaikan besar populasi mula-mula N_0 dan model populasinya suatu fungsi kontinu: N(t).Gambar 4.2 memperlihatkan perkembangbiakan binatang dalam waktu (t).



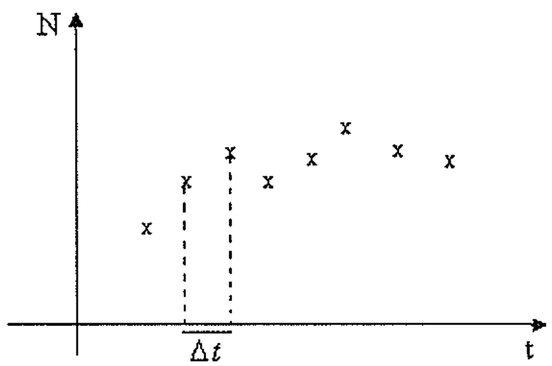
Gambar 4.2. Grafik perkembangbiakan binatang

Grafik tersebut memperlihatkan hasil pengamatan pada dua kali percobaan, tetapi bila pengamatan diulang akan didapat bentuk grafik yang berbeda lagi. Dari hasil di atas berarti model populasi yang diharapkan paling tepat adalah bentuk model probabilitas.

4.1. MODEL DISKRIT

Misalkan bentuk model sederhana dari pertumbuhan populasi suatu jenis kehidupan pada Gambar 4.3. Andaikan pengamatan dilakukan setiap selang waktu Δt, maka laju pertumbuhannya adalah

$$\frac{\Delta N}{\Delta t} = \frac{N(t+\Delta t) - N(t)}{\Delta t} \tag{4.1}$$



Gambar 4.3. Grafik pertumbuhan populasi

Bentuk (4.1) merupakan laju absolut dari pertambahan populasi. Laju pertumbuhan populasi perindividu didefinisikan sebagai:

$$R(t) = \frac{N(t+\Delta t) - N(t)}{\Delta t N(t)} \tag{4.2}$$

Prosentasi perubahan populasi adalah

$$100\,\frac{\Delta N}{N(t)} = 100R(t)\Delta t$$

Ini berarti bahwa 100 R(t) merupakan prosentase perubahan populasi per-unit waktu.

Contoh 1:

Misalkan dalam $\frac{1}{2}$ tahun besar populasi bertambah 20 % berarti R(t) = $\frac{2}{5}$ dan laju pertumbuhan 40 % pertahun.

Bila laju pertumbuhan dan besar populasi mula-mula diketahui, maka besar populasi pada akhir suatu interval waktu dapat ditentukan,

$$N(t+\Delta t) = N(t) + \Delta t R(t) N(t)$$

ini diasumsikan bahwa perubahan besar populasi hanya disebabkan adanya kelahiran dan kematian saja, dengan menganggap tidak ada migrasi.

Sehingga diperoleh:

$$N(t+\Delta t) = N(t) + \text{(jumlah kelahiran)} - \text{(jumlah kematian)}$$

Laju kelahiran dan laju kematian persatuan waktu didefinisikan sebagai

$$b = \frac{\textit{jumlah kelahiran}}{\Delta t N(t)} \qquad d = \frac{\textit{jumlah kematian}}{\Delta t N(t)}$$

Besar populasi pada akhir suatu interval waktu t :

$$N(t+\Delta t) = N(t) + \Delta t (b-d) N(t) \tag{4.3}$$

dan laju pertumbuhan $R = b - d$, yang merupakan selisih dari laju kelahiran dan laju kematian.

Untuk menyusun suatu bentuk model matematika dari pertumbuhan populasi diandaikan jumlah kelahiran dan jumlah kematian adalah proporsional terhadap total besar populasi. Berarti laju pertumbuhan R adalah konstan, $R = R_0$ (diasumsikan tidak berubah terhadap waktu). Sehingga untuk suatu nilai waktu t :

$$N(t+\Delta t) - N(t) = R_0 \Delta t N(t)$$

atau

$$N(t+\Delta t) = (1 + R_0 \Delta t) N(t)$$

Bila besar populasi pada waktu $t = t_0$ adalah $N(t_0) = N_0$, maka dapat diperoleh

$$N(t_0 + \Delta t) = (1 + R_0 \Delta t) N_0$$

$$N(t_0 + 2\Delta t) = (1 + R_0 \Delta t)^2 N(t_0 + \Delta t)$$

$$N(t_0+3\Delta t)=(1+R_0\Delta t)^3 N(t_0+\Delta t)$$

...

Untuk $t = t_0 + m\Delta t$, di peroleh

$$N(t)=N(t+m\Delta t)=(1+R_0\Delta t)^m N_0$$

atau

$$N(t)=N(t+m\Delta t)=(1+R_0\Delta t)^{\frac{t-t_0}{\Delta t}} N_0 \qquad (4.4)$$

Bila laju kelahiran lebih besar daripada laju kematian (i.e. $R_0 > 0$), berarti populasi bertambah besar dengan bertambahnya waktu,

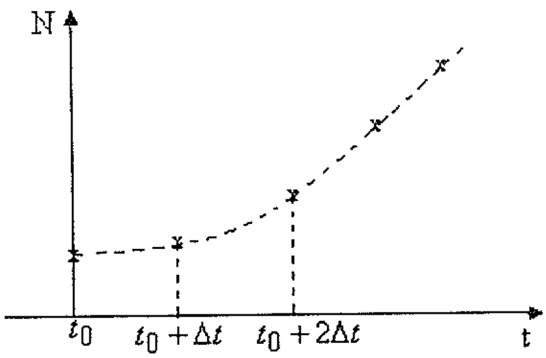
sehingga

$$(1+R_0\,\Delta t)^m = e^{am}, \qquad (4.5)$$

dengan

$$a = \ln(1 + R_0\,\Delta t)$$

dan grafik pertumbuhan populasi disajikan pada gambar berikut.



Gambar 4.4. Grafik pertumbuhan populasi

Contoh 2:

Suatu kehidupan mempunyai laju pertumbuhan q persen pertahun dan misalkan besar populasi pada awal observasi adalah N_0. Kapan besar populasi menjadi 2 kalilipat?

Penyelesaian:

Diketahui bahwa laju pertumbuhan populasi adalah konstan, yaitu $R_0 = \frac{q}{100}$ dan

t = 1 tahun. Dari bentuk model matematika pada persamaan (4.4) dapat dicari selang waktu yang diperlukan agar besar populasi menjadi 2 kali lipat dari besar populasi semula,

$$N(t) = 2\,N_0$$

Dari model (4.4) diketahui bahwa

$$N(t) = N_0(1+\frac{q}{100})^{t-t_0}$$

Sehingga diperoleh

$$2N_0 = N_0(1+\frac{q}{100})^{t-t_0}$$

$$\Leftrightarrow 2 = (1+\frac{q}{100})^{t-t_0}$$

$$\Leftrightarrow t - t_0 = \frac{\ln 2}{\ln(q+100) - \ln 100} = \frac{0{,}693}{\ln(q+100) - 4{,}605}$$

Jadi besar populasi menjadi 2 kali lipat dari besar populasi mula-mula setelah selang waktu $t - t_0 = \dfrac{0{,}693}{\ln(q+100) - 4{,}605}$.

Latihan Soal

1. Misalkan laju pertumbuhan populasi suatu kehidupan adalah 0,024. Berapa persen laju pertumbuhannya pertahun ?
2. Suatu spesies mempunyai laju pertumbuhan 5 % pertahun. Jika populasi semula N_0, setelah berapa tahun jumlah populasi menjadi 2 kali lipat ?
3. Buktikasn bahwa $\dfrac{\ln(1+R_0\Delta t)}{\Delta t} < R_0$, $R_0\Delta t > 0$!
4. Diketahui laju kelahiran suatu kehidupan adalah 226 tiap 1000 jiwa pertahn dan laju kematiannya adalah 218 tiap 1000 jiwa pertahun. Misalkan pada tahun 1995 besar populasi adalah 8000 jiwa. Hitunglah besar populasi pada tahun 2007 !

4.2. MODEL KONTINU

Model kontinu disini sering disebut sebagai model eksponensial. Pada bagian sebelumnya telah didefinisikan laju pertumbuhan populasi adalah

$$R(t) = \frac{N(t+\Delta t) - N(t)}{\Delta t N(t)}$$

Pada umumnya laju pertumbuhan bergantung pada waktu dan perhitungannya dilakukan setiap selang / interval waktu Δt. Laju pertumbuhan sesaat :

$$R(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{N(t+\Delta t) - N(t)}{\Delta t N(t)} = \frac{1}{N}\frac{dN}{dt} \tag{4.6}$$

Sehingga model populasi $N(t)$ merupakan suatu fungsi kontinu terdifferensialkan dan hal ini dapat di dekati, bila populasinya cukup besar. Laju perubahan populasi $\frac{dN}{dt}$ merupakan laju pertumbuhan R dikalikan dengan besar populasi N. Misalnya laju pertumbuhan konstan (R_0), maka pertumbuhan populasi adalah solusi persamaan differensial (PD) linear orde satu dengan koefisien konstan :

$$\frac{dN}{dt} = R_0 N, \tag{4.7}$$

dengan syarat awal $N(t_0) = N_0$

Solusi PD diatas adalah bentuk eksponensial

$$N(t) = N_0 e^{R_0(t-t_0)} \tag{4.8}$$

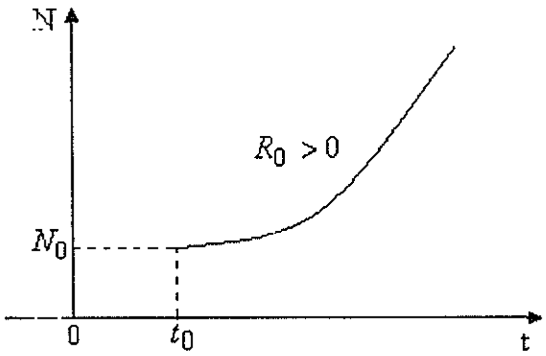
Grafik $N(t)$ untuk $R_0 > 0$ diberikan pada Gambar 4.5 dan disebut pertumbuhan populasi secara eksponensial dan untuk $R_0 > 0$ disajikan pada Gambar 4.6 dan disebut kemunduran populasi secara eksponensial. Misalkan dalam selang waktu $t_1 - t_0$ dengan $R_0 > 0$ besar populasi menjadi 2 kali lipat, sehingga

$$N(t_1) = 2N(t_0)$$

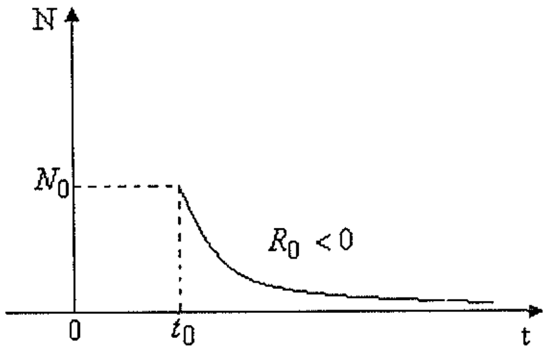
berarti $2N_0 = N_0 e^{R_0(t_1 - t_0)}$,

dan diperoleh

$$t_1 - t_0 = \frac{\ln 2}{R_0}. \tag{4.9}$$



Gambar 4.5. Grafik pertumbuhan populasi secara eksponensial



Gambar 4.6. Grafik kemunduran populasi secara eksponensial

Contoh :

Misalkan laju pertumbuhan populasi R_0 = 0,01 maka selang waktu yang diperlukan agar besar populasi menjadi dua kali lipat adalah

$$t_1 - t_0 = \frac{\ln 2}{R_0} = \frac{\ln 2}{0{,}01} = \frac{69315}{0{,}01} = 69 \text{ th}$$

Jadi setelah 69 tahun besar populasi menjadi 2 kali lipat.

R_0 merupakan laju pertumbuhan sesaat pertahun, sehingga pada selang waktu satu tahun populasi akan tumbuh dari N_0 menjadi $N_0 e^{R_0}$. Sehingga laju pertumbuhan pertahun adalah

$$\frac{1}{N}\frac{\Delta N}{\Delta t}=\frac{N_0 e^{R_0}-N_0}{N_0}=e^{R_0}-1 \tag{4.10}$$

Karena deret Taylor dari e^{R_0} adalah

$$e^{R_0}=1+R_0+\frac{R_0^2}{2!}+\frac{R_0^2}{3!}+\cdots \tag{4.11}$$

terlihat bahwa laju pertumbuhan sesaat dan laju pertumbuhan cukup kecil, bila R_0 kecil. Rata-rata waktu generasi adalah rata-rata waktu yang diperlukan untuk memproduksi diri yang disebut waktu penggandaan.

Bila t_d adalah rata-rata waktu generasi, maka

$$t_d=\frac{\ln 2}{R_0} \tag{4.12}$$

Sehingga model eksponensial untuk populasi dapat ditulis sebagai

$$N(\mathrm{t})=N_0\, e^{\frac{\ln 2}{t_d}(t-t_0)}$$

$$\Leftrightarrow N(t)=\left[e^{\ln 2}\right]^{\frac{t-t_0}{t_d}}$$

$$\Leftrightarrow N(t)=2^{\frac{t-t_0}{t_d}}\,N_0 \tag{4.13}$$

Selanjutnya akan dibandingkan model pertumbuhan populasi antara model diskrit dan kontinu. Model kontinu dengan laju pertumbuhan R_0 adalah

$$N(t)=N_0\, e^{R_0(t-t_0)} \tag{4.14}$$

Model diskrit dengan laju pertumbuhan R_0 adalah

$$N_d(t)=N_0(1+R_0\Delta t)^{\frac{t-t_0}{\Delta t}}$$

$$=N_0 e^{[\ln(1+R_0\Delta t)]\frac{t-t_0}{\Delta t}} \tag{4.15}$$

Untuk membandingkan kedua model di atas cukup dibandingkan antara $\dfrac{\ln(1 + R_0\Delta t)}{\Delta t}$ pada (4.15) dengan R_0 pada (4.14).

Pertumbuhan diskrit terlihat lebih lambat, karena $\dfrac{\ln(1 + R_0\Delta t)}{\Delta t} < 0$, bila $R_0\Delta t > 0$. Kedua model di atas akan identik bila $\Delta t \to 0$, karena $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\ln(1 + R_0\Delta t)}{\Delta t} = R_0$.

Misalkan besar populasi untuk $t = 0$ dan untuk suatu $t = t_1$, besar populasi $N(t_1) = N_1$, maka

$$N_1 = N_0 e^{R_0 t_1}$$

$$\Leftrightarrow R_0 = \frac{1}{t_1} \ln \frac{N_1}{N_0}.$$

Sehingga dapat juga diperoleh model populasi pada semua waktu sebagai berikut:

$$N(t) = N_0 \left[\frac{N_1}{N_0}\right]^{\frac{t}{t_1}} \tag{4.16}$$

Latihan Soal

1. Suatu hewan diselidiki akan berjumlah 4 kali lipat dalam waktu 10 tahun. Berapa laju pertumbuhannya ?
2. Laju pertumbuhan suatu bakteri tidak diketahui tetapi dianggap konstan. Ketika experimen dimulai terdapat 2000 bakteri dan 1 jam berikutnya ada 3500 bakteri. Tentukanlah banyaknya bakteri setelah waktu 4 jam !
3. Dari hasil penelitian terhadap pertumbuhan populasi bakteri diketahui bahwa setelah selang waktu 6 jam besar populasi menjadi 2 kali besar populasi mula-mula. Hitunglah laju pertumbuhan populasi tersebut !
4. Suatu populasi bakteri mula-mula sebesar N_0 dengan laju pertumbuhan konstan R_0. Setelah selang waktu t_0 jam populasi tersebut dipindajh ke medium lain sehingga laju pertumbuhannya menjadi R_1 (konstan). Tentukan model matematika untuk populasi tersebut !

4.3. MODEL PROBABILITAS

Pada bagian sebelumnya proses kelahiran dan kematian adalah deterministik. Berikut ini disajikan model sederhana dari proses stokastik (probabilistik) dengan mengasumsikan bahwa tidak terjadi proses kematian atau paling tidak proses kematian sudah tercakup dalam proses tidak terjadinya proses kelahiran.

Dalam pembahasan ini, proses kelahiran dianggap random dan untuk selang waktu Δt, dengan Δt cukup kecil, dimisalkan probabilitas terjadinya satu proses kelahiran adalah proporsional terhadap Δt, andaikan $\lambda\Delta t$. Untuk Δt cukup kecil, diasumsikan tidak terjadi proses kelahiran ganda, sehingga probabilitas tidak terjadinya proses kelahiran pada selang waktu Δt adalah $1-\lambda\Delta t$. Dalam selang waktu Δt, bila probabilitas terjadinya satu proses kelahiran adalah $\lambda\Delta t$ dan jika besar populasi adalah N_0, maka probabilitas terjadinya proses kelahiran adalah $N_0\lambda\Delta t$. Hal ini mengakibatkan bahwa laju kelahiran $\frac{\Delta N}{N_0\Delta t}$ (dengan mengingat bahwa tidak terjadi proses kematian) adalah sama dengan laju pertumbuhan λ. Ini berarti bahwa λ tidak saja menyatakan probabilitas terjadinya satu proses kelahiran pada satu satuan waktu, tetapi juga merupakan laju kelahiran. Jika λ tidak diketahui, maka dilakukan estimasi untuk nilai $\lambda\Delta t$ dengan membagi jumlah proses kelahiran dalam selang waktu Δt dengan besarnya populasi.

Sebetulnya besar populasi tidak dapat ditentukan secara eksak, tetapi hanya dapat dihitung besar probabilitasnya saja. Misalkan $P_N(t)$ merupakan probabilitas bahwa pada saat t besarnya populasi adalah N, maka dapat dicari berapa probabilitasnya bahwa pada saat $t+\Delta t$ besar populasi adalah tetap N. Besar populasi N dapat dimaksudkan sebagai besar populasi semula adalah N-1 dan terjadi satu kali proses kelahiran dalam selang waktu Δt atau besar populasi semula adalah N dan tidak terjadi proses kelahiran dalam selang waktu Δt. Oleh karena itu dapat diperoleh persamaan seperti di bawah ini

$$P_N(t+\Delta t) = \sigma_{N-1}P_{N-1}(t) + \nu_N P_N(t), \qquad (4.17)$$

dengan σ_{N-1} adalah probabiltas terjadinya satu kali proses kelahiran diantara N-1 individu dan ν_N adalah probabilitas tidak terjadinya proses kelahiran diantara N individu.

Jika probabilitas tidak terjadinya proses kelahiran pada satu individu adalah $1-\lambda\Delta t$, maka probabilitas tidak terjadinya proses kelahiran diantara N individu adalah $(1-\lambda\Delta t)^N$. Sehinga didapat $\nu_N = (1-\lambda\Delta t)^N$. Sedangkan probabilitas terjadinya paing sedikit satu proses kelahiran diantara N individu adalah

$$1-\nu_N = 1-(1-\lambda\Delta t)^N. \tag{4.18}$$

Bila diambil Δt cukup kecil sehingga pada selang waktu tersebut tidak mungkin terjadi proses kelahiran dua kali atau lebih diantara N individu, maka probabilitas terjadinya satu kali kelahian samadengan probabilitas terjadinya paling sedikit satu kali proses kelahiran. Maka dapat diperoleh

$$\sigma_{N-1} = 1-(1-\lambda\Delta t)^{N-1}. \tag{4.19}$$

Dengan menggunakan deret binomial dari Newton, untuk Δt cukup kecil, suku nonlinear diabaikan sehingga diperoleh

$$\nu_N = 1-\lambda N\Delta t \tag{4.20}$$

dan

$$\sigma_{N-1} = 1-(1-\lambda(N-1)\Delta t) = \lambda(N-1)\Delta t. \tag{4.21}$$

Oleh karena itu untuk Δt cukup kecil, probabilitas terjadinya tepat satu kali kelahiran diantara m individu adalah m kali probalilitas satu individu memberikan satu kali proses kelahian. Demikian pula probabilitas tidak terjadinya proses kelahiran adalah satu dikurangi probabilitas terjadinya tepat satu kali proses kelahiran.

Dengan mensubstitusikan persamaan (4.20) dan (4.21) ke (4.17) diperoleh

$$P_N(t+\Delta t) = \lambda(N-1)\Delta t P_{N-1}(t) + (1-\lambda N\Delta t)P_N(t). \tag{4.22}$$

Jika ruas kiri diuraikan dalam deret Taylor, maka akan didapat

$$P_N(t) + \Delta t\frac{dP_N(t)}{dt} + \frac{(\Delta t)^2}{2!}\frac{d^2P_N(t)}{dt^2} + \cdots = P_N(t) + \Delta t(\lambda(N-1)P_{N-1}(t) - \lambda NP_N(t)).$$

Dari persamaan di atas didapat

$$\frac{dP_N(t)}{dt} + \frac{\Delta t}{2!}\frac{d^2 P_N(t)}{dt^2} + \cdots = \lambda(N-1)P_{N-1}(t) - \lambda N P_N(t).$$

Bila diambil $\Delta t \to 0$, akan diperoleh persamaan diferensial

$$\frac{dP_N(t)}{dt} = \lambda(N-1)P_{N-1}(t) - \lambda N P_N(t). \tag{4.23}$$

Persamaan di atas merepresentasikan bahwa probabilitas populasi sebesar N berubah terhadap waktu sebagai akibat terjadinya proses kelahiran yang terjadi secara random. Untuk menentukan penyelesaian dari persamaan tersebut, diberikan syarat awal, yaitu probabilitas awal. Misalkan pada saat $t = 0$, diketahui besarnya populasi awal(mula-mula) adalah N_0 dan probabilitas awalnya

$P_N(0) = 0$ bila $N \neq N_0$,

$P_N(0) = 1$ bila $N = N_0$.

Selanjutnya dapat ditentukan penyelesaian dari persamaan diferensial

$$\frac{dP_N(t)}{dt} + \lambda N P_N(t) = \lambda(N-1)P_{N-1}(t), \tag{4.24}$$

dengan syarat awal

$P_N(0) = 0$ bila $N \neq N_0$,

$P_N(0) = 1$ bila $N = N_0$.

Karena tidak terjadi proses kematian, sehingga besar populasi akan sama atau lebih besar dari populasi awal N_0. Misalkan diambil besar populasi N_0, maka persaman diferensialnya menjadi

$$\frac{dP_{N_0}(t)}{dt} + \lambda N_0 P_{N_0}(t) = \lambda(N_0 - 1)P_{N_0-1}(t), \tag{4.25}$$

dengan $P_{N_0-1}(t) = 0$ (karena tidak mungkin besar populasi kurang dari N_0).

Sehingga persamaan diferensial (PD) di atas menjadi

$$\frac{dP_{N_0}(t)}{dt} = -\lambda N_0 P_{N_0}(t)$$

$$\Leftrightarrow \frac{dP_{N_0}(t)}{P_{N_0}(t)} = -\lambda N_0 dt$$

Kemudian diintegralkan, sehingga diperoleh solusi PD sebagai berikut

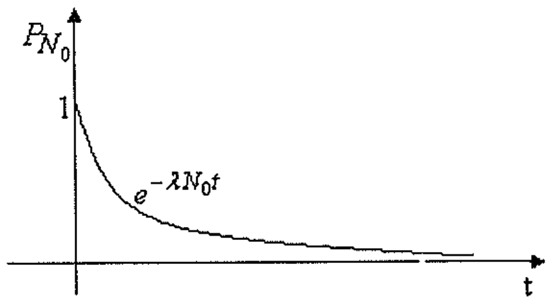
$$P_{N_0}(t) = P_{N_0}(0)e^{-\lambda N_0 t},$$

dengan syarat awal $P_{N_0}(0) = 1$.

Sehingga solusinya menjadi

$$P_{N_0}(t) = e^{-\lambda N_0 t}. \tag{4.26}$$

$P_{N_0}(t)$ merupakan suatu fungsi probabilitas yang nilainya selalu positif dan tidak pernah lebih besar dari satu.



Gambar 4.7. Grafik fungsi probabilitas $P_{N_0}(t)$

Kemudian, untuk menentukan probabilitas bahwa besar populasi adalah $N_0 + 1$, dapat diperoleh dari persamaan diferensial di bawah ini.

$$\frac{dP_{N_0+1}(t)}{dt} + \lambda(N_0 + 1)P_{N_0+1}(t) = \lambda N_0 P_{N_0}(t).$$

Karena $P_{N_0}(t) = e^{-\lambda N_0 t}$, sehingga PD di atas dapat ditulis sebagai

$$\frac{dP_{N_0+1}(t)}{dt} + \lambda(N_0 + 1)P_{N_0+1}(t) = \lambda N_0 e^{-\lambda N_0 t}. \tag{4.27}$$

Persamaan ini merupakan suatu PD linear order satu non homogen. Untuk mencari solusi dari PD ini dapat digunakan faktor integral $e^{\int \lambda(N_0+1)dt}$, sehingga diperoleh

$$P_{N_0+1}(t) = C_{N_0+1}e^{-\lambda(N_0+1)t} + N_0 e^{-\lambda N_0 t}, \tag{4.28}$$

dengan syarat awal $P_{N_0+1}(0) = 0$.

Konstanta C_{N_0+1} dicari seperti berikut

$$C_{N_0+1}e^{-\lambda(N_0+1).0} + N_0 e^{-\lambda N_0 .0} = 0$$

$$\Leftrightarrow C_{N_0+1} = -N_0$$

Sehingga solusi dari PD linear order satu non homogen menjadi

$$P_{N_0+1}(t) = N_0 e^{-\lambda(N_0+1)t} + N_0 e^{-\lambda N_0 t} = N_0 e^{-\lambda N_0 t}\left(1 - e^{-\lambda t}\right). \tag{4.29}$$

Solusi ini merepresentasikan bahwa probabilitas besar populasi $N_0 + 1$ diawali sebagai fungsi naik seiring dengan berubahnya waktu, lalu menurun mendekati nol, hal ini terjadi karena adanya proses kelahiran.

Gambar 4.8. Grafik fungsi probabilitas $P_{N_0+1}(t)$

Selanjutnya akan dicari pada saat t berapa, besar populasi adalah $N_0 + 1$. Hal ini terjadi pada saat $P_{N_0+1}(t)$ mencapai nilai maximum. Sehingga

$$\frac{dP_{N_0+1}(t)}{dt} = N_0 e^{-\lambda N_0 t}(-\lambda N_0)(1 - e^{-\lambda t}) + N_0 e^{-\lambda N_0 t}(\lambda e^{-\lambda t}) = 0$$

$$\Leftrightarrow N_0 e^{-\lambda N_0 t}(-\lambda N_0)(1-e^{-\lambda t}) + N_0 e^{-\lambda N_0 t}(\lambda e^{-\lambda t}) = 0$$

$$\Leftrightarrow N_0 e^{-\lambda N_0 t}[(-\lambda N_0)(1-c^{-\lambda t}) + \lambda e^{-\lambda t}] = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda e^{-\lambda t}(N_0+1) - \lambda N_0 = 0$$

$$\Leftrightarrow e^{-\lambda t} = \frac{\lambda N_0}{\lambda(N_0+1)} = \frac{N_0}{(N_0+1)}$$

$$\Leftrightarrow e^{\lambda t} = \frac{N_0+1}{N_0}$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{1}{\lambda}\ln\left(\frac{N_0+1}{N_0}\right)$$

Persamaan di atas merepesentasikan bahwa jika besar populasi mula-mula N_0 dengan laju pertumbuhan λ, maka estela selang waktu $t = \frac{1}{\lambda}\ln\left(\frac{N_0+1}{N_0}\right)$ besar populasi akan bertambah menjadi $N_0 + 1$.

Kemudian, dengan menggunakan cara yang sama dapat dicari nilai $P_{N_0+2}(t)$ dari persamaan diferensial

$$\frac{dP_{N_0+2}(t)}{dt} + \lambda(N_0+2)P_{N_0+2}(t) = \lambda N_0(N_0+1)\left(e^{-\lambda N_0 t} - e^{-\lambda(N_0+1)t}\right), \quad (4.30)$$

dengan syarat awal $P_{N_0+2}(0) = 0$.

Persamaan diferensial (4.30) mempunyai solusi

$$P_{N_0+2}(t) = \frac{N_0(N_0+1)}{2}e^{-\lambda N_0 t}\left(1-e^{-\lambda t}\right)^2$$

Selanjutnya, analog dengan metode di atas, untuk $k \geq 1$ diperoleh

$$P_{N_0+k}(t) = \frac{N_0(N_0+1)\cdots(N_0+k-1)}{k!}e^{-\lambda N_0 t}\left(1-e^{-\lambda t}\right)^k. \quad (4.31)$$

Persamaan ini didapat secara hipotesis dan kebenarannya dapat dibuktikan dengan induksi matemaik, seperti berikut.

Dari penjelasan di atas terlihat bahwa persamaan tersebut berlaku untuk $k = 1$ dan $k = 2$. Kemudian diasumsikan berlaku untuk $k = k_0$ dan akan dibuktikan benar untuk $k = k_0 + 1$.

Dengan menggunakan formula untuk $P_{N_0+k_0}(t)$, diperoleh persamaan diferensial

$$\frac{dP_{N_0+k_0+1}(t)}{dt}+\lambda(N_0+k_0+1)P_{N_0+k_0+1}(t)=\frac{N_0(N_0+1)\cdots(N_0+k_0)}{k_0!}\lambda e^{-\lambda N_0 t}\left(1-e^{-\lambda t}\right)^{k_0},$$

dengan syarat awal $P_{N_0+k_0+1}(0)=0$.

Jika kedua ruas dikalikan dengan faktor integral $e^{\lambda(N_0+k_0+1)t}$, maka dapat diperoleh

$$\frac{d}{dt}\left(e^{\lambda(N_0+k_0+1)t}P_{N_0+k_0+1}(t)\right)=\frac{N_0(N_0+1)\cdots(N_0+k_0)}{k_0!}\lambda e^{\lambda(k_0+1)t}\left(1-e^{-\lambda t}\right)^{k_0}.$$

Selanjutnya kedua ruas diintegralkan sehingga dperoleh

$$\begin{aligned}e^{\lambda(N_0+k_0+1)t}P_{N_0+k_0+1}(t)&=\frac{N_0(N_0+1)\cdots(N_0+k_0)}{k_0!}\lambda\int e^{\lambda(k_0+1)t}\left(1-e^{-\lambda t}\right)^{k_0}dt.\\&=\frac{N_0(N_0+1)\cdots(N_0+k_0)}{k_0!}\lambda\int e^{\lambda t}\left(e^{\lambda t}-1\right)^{k_0}dt.\\&=\frac{N_0(N_0+1)\cdots(N_0+k_0)}{k_0!}\lambda\left(\frac{\left(e^{\lambda t}-1\right)^{k_0+1}}{\lambda(k_0+1)}\right)+C.\end{aligned}$$

Dengan syarat awal $P_{N_0+k_0+1}(0)=0$, maka didapat

$$P_{N_0+k_0+1}(t)=\frac{N_0(N_0+1)\cdots(N_0+k_0)}{k_0!}\lambda e^{-\lambda N_0 t}e^{-\lambda(k_0+1)t}\left(e^{\lambda t}-1\right)^{k_0+1}. \quad (4.32)$$

Latihan Soal:

1. Misalkan diketahui probablitas terjadinya kelahiran adalah 5 % pertahun dan besar populasi mula-mula adalah 22. Berapa probabilitasnya bahwa besar populasi akan tetap 22 setelah satu tahun kemudian ?
2. Bila diberikan laju pertumbuhan $\lambda=0{,}06$ dan besar populasi mulamula adalah 150. Berapa probabilitasnya bahwa besar populasi ada 150 dua tahun berikutnya?

3. Diketahui besar populasi mula-mula ádalah 40 dengan laju pertumbuhan $\lambda = 0{,}09$ pertahun. Berapa probabilitasnya bahwa besar populasi akan menjadi 42 setelah dua tahun kemudian ?
4. Andaikan diketahui besar populasi mula-mula ádalah 300 dengan laju pertumbuhan 10 % perjam. Setelah selang waktu berapa jam populasi menjadi 310?
5. Misalkan diketahui $P_{N_0+k}(t) = \dfrac{N_0(N_0+1)\cdots(N_0+k-1)}{k!} e^{-\lambda N_0 t}\left(1-e^{-\lambda t}\right)^k$.

   Pada saat kapan (t), besar populasi adalah $N_0 + k$?

BAB V
MODEL PERTUMBUHAN BERGANTUNG KEPADATAN

5.1. MODEL PERTUMBUHAN LOGISTIK

Perkiraan dasar dari model populasi dengan laju pertumbuhan konstan adalah

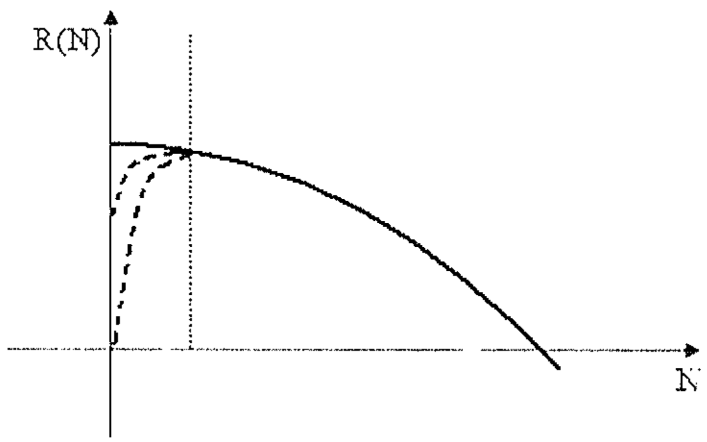
$$\frac{dN}{dt} = R_0 N \text{ atau } \frac{1}{N}\frac{dN}{dt} = R_0 .$$

Secara umum laju pertumbuhan R boleh tidak konstan, tetapi mungkin bergantung pada populasi, sebagai berikut.

$$\frac{dN}{dt} = R(N)N \quad \text{atau} \quad \frac{1}{N}\frac{dN}{dt} = R(N) . \tag{5.1}$$

Diasumsikan bahwa populasi cukup besar sehingga model N(t) merupakan model kontinu. Untuk populasi yang cukup besar experimen memperlihatkan bahwa laju pertumbuhan menjadi negatif (kematian lebih banyak daripada kelahiran).

Jika diasumsikan bahwa laju pertumbuhan kontinu, maka ada populasi dimana laju pertumbuhannya adalah nol, seperti diberikan pada Gambar berikut.

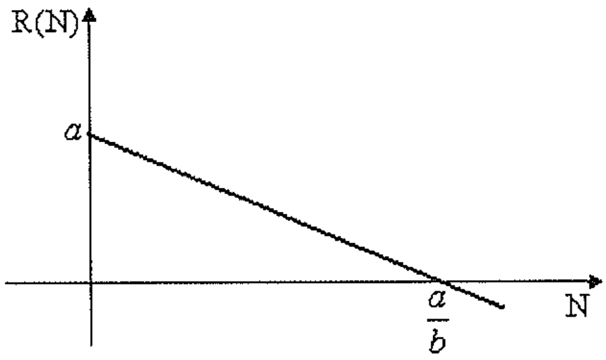


Gambar 5.1. Laju pertumbuhan bergantung pada kepadatan

Misalkan model untuk laju pertumbuhan dengan populasi cukup kecil digambarkan dengan "*solid curve*", tetapi model tersebut tidak selalu tepat untuk populasi cukup kecil. Fungsi paling sederhana dengan sifat tersebut adalah garis lurus.

$$R(N) = a - bN$$

Seperti diberikan pada gambar di bawah ini



Gambar 5.2. Laju pertumbuhan logistik

Sehingga model populasi dengan laju pertumbuhan R(N) menjadi

$$\frac{dN}{dt} = N(a\text{-}bN), \qquad (5.2)$$

dengan a dan b: konstanta positif, a: laju pertumbuhan tanpa pengaruh lingkungan, b: merepresentasikan efek dari peningkatan kepadatan populasi. Persamaan (5.2) merupakan PD orde satu non linear dan sering disebut sebagai **persamaan logistik**. Populasi dengan laju pertumbuhan nol biasanya disebut populasi dalam keadaan kesetimbangan. Dengan menggunakan persamaan (5.2), kesetimbangan populasi adalah $N = 0$ dan $N = \frac{a}{b}$.

Populasi nol merupakan populasi kesetimbangan. Teori memperkirakan bahwa populasi $N = \frac{a}{b}$ berkorespondensi dengan ZPG (*Zero Population Growth*).

5.2. SOLUSI ESKSAK PERSAMAAN LOGISTIK

Solusi eksplisit dari persamaan logistik (5.2)dapat dicari dengan cara sebagai berikut. Persamaan (5.2) di atas ekuivalen dengan

$$\frac{dN}{N(a - bN)} = dt \qquad (5.3)$$

Integralkan persamaan (5.3) dengan metode integral pecahan, sebagai berikut

$$\int \frac{dN}{N(a-bN)} = \int dt \, . \tag{5.4}$$

Perhatikan bahwa

$$\frac{1}{N(a-bN)} = \frac{\frac{1}{a}}{N} + \frac{\frac{b}{a}}{a-bN} \tag{5.5}$$

Sehingga intgral di atas menjadi

$$\frac{1}{a}\int \frac{dN}{N} + \frac{b}{a}\int \frac{dN}{a-bN} = \int dt$$

dan diperoleh

$$\frac{1}{a}\ln|N| - \frac{1}{a}\ln|a-bN| = t + c \tag{5.6}$$

dengan syarat awal $N(0) = N_0$, diperoleh

$$c = \frac{1}{a}\ln|N_0| - \frac{1}{a}\ln|a-bN_0| \tag{5.7}$$

Substitusikan (5.7) ke (5.6), dan karena N_0 dan N positif, maka diperoleh

$$\frac{1}{a}\ln N - \frac{1}{a}\ln|a-bN| = t + \frac{1}{a}\ln N_0 - \frac{1}{a}\ln|a-bN_0|$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{a}\ln\frac{N}{N_0} + \frac{1}{a}\ln\left|\frac{a-bN_0}{a-bN}\right| = t$$

$$\Leftrightarrow \frac{N}{N_0}\left|\frac{a-bN_0}{a-bN}\right| = e^{at} \tag{5.8}$$

Karena $(a - bN)$ dan $(a - b\,N_0)$ mempunyai tanda yang sama dan tanda dari $\dfrac{(a-bN_0)}{(a-bN)}$ selalu positif untuk setiap t, sehingga

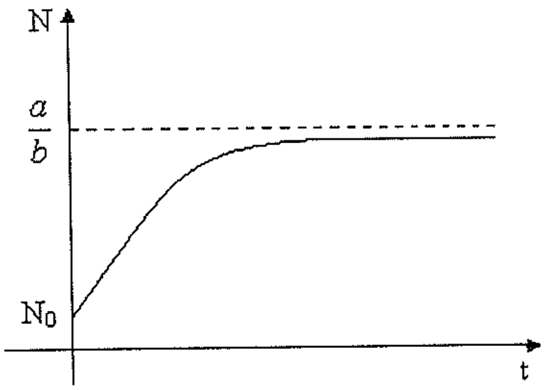
$$\frac{N}{N_0}\frac{(a-bN_0)}{(a-bN)} = e^{at}$$

$$\Leftrightarrow N(a-bN_0) = (a-bN)N_0e^{at}$$

$$\Leftrightarrow N = \frac{aN_0e^{at}}{a-bN_0+bN_0e^{at}}$$

$$\Leftrightarrow N = \frac{\frac{a}{b}}{1 + \left[\frac{a - bN_0}{bN_0}\right] e^{-at}} \tag{5.9}$$

Persamaan (5.9) membentuk kurva logistik yang bergantung pada 3 parameter yaitu parameter a, b, dan N_0. Sketsa dari kurva tersebut diberikan pada Gambar 5.3 seperti di bawah ini.



Gambar 5. 3. Kurva pertumbuhan logistik

Latihan soal:

1. Diberikan model pertumbuhan sebagai berikut

   $$\frac{dN}{dt} = aN + bN^2,$$

   dengan $a > 0$ dan $b > 0$.

   a. Bagaimana laju pertumbuhan bergantung pada populasi N?

   b. Hitunglah solusi eksplisit (eksak) dari persamaan tersebut !

   c. Dengan menganalisis solusi eksaknya, apa yang terjadi bila $t \to \infty$?

2. Pandang $\frac{dN}{dt} = \mu N^2 - \eta N$, dengan $\mu > 0, \eta > 0$.

   a. Carilah solusi eskaknya !

   b. Perlihatkan bagaimana perilaku dari solusi tersebut

i. Jika $N_0 < \frac{\eta}{\mu}$, maka $N \to 0$

ii. Jika $N_0 > \frac{\eta}{\mu}$, maka $N \to \infty$

iii. Apa yang terjadi jika $N_0 = \frac{\eta}{\mu}$?

3. Sejenis mikroorganisme dalam satu medium zat makanan berkembang mengikuti hukum logistik

$$N = \frac{N_j}{1 + Ae^{-at}}, \text{ dengan } A = \frac{N_j}{N_0} - 1,$$ N_0: populasi awal, a > 0, dan

N_j: populasi jenuh (keadaan stasioner stabil).

a. Hitunglah nilai A bila dketahui data sebagai berikut.

t (hari)	0	5	7	8	9
N	2	378	381	381	381

b. Tentukanlah N bila $t = 4$!

BAB VI

MODEL PERTUMBUHAN DUA SPESIES

6.1. KESETIMBANGAN POPULASI

Pandang ekosistem kecil dengan 2 spesies yang masing-masing populasinya N1 & N2. Asumsikan perubahan laju pertumbuhan dari masing-masing spesies hanya bergantung pada populasi dari masing-masing spesies bukan dari faktor lingkungan.

Model umum untuk interaksi 2 spesies:

$$\begin{aligned} \frac{dN_1}{dt} &= g(N_1, N_2) \\ \frac{dN_2}{dt} &= f(N_1, N_2) \end{aligned} \qquad (6.1)$$

Diasumsikan tidak ada migrasi dari masing-masing spesies, maka

$$g(0, N_2) = 0 \text{ dan } f(N_1, 0) = 0.$$

Masalah nilai awal dapat ditentukan dari solusi persamaan (6.1) yang memenuhi nilai awal yang diberikan, N1(t0) dan N2(t0).

Dari persamaan (6.1) dapat diperoleh

$$\frac{dN_2}{dN_1} = \frac{f(N_1, N_2)}{g(N_1, N_2)} \qquad (6.2)$$

Persamaan (6.2) biasa disebut sebagai persamaan bidang fase. Solusi dari persamaan (6.2) akan memberikan trayektori dari populasi. Selanjutnya, populasi kesetimbangan didefinisikan sebagai suatu kemungkinan populasi dari kedua spesies sedemikian sehingga kedua populasi tidak akan berubah terhadap waktu Kelahiran dan kematian dari spesies N_1 harus seimbang, demikian juga dengan N_2.

Misalkan populasi kesetimbangan,

$N_1 = N_{1e}$ dan $N_2 = N_{2e}$

sedemikian sehingga

$$f(N_{1e}, N_{2e}) = 0\ ,$$

$$g(N_{1e}, N_{2e}) = 0 \tag{6.3}$$

merupakan 2 persamaan dengan 2 variabel.

Untuk suatu populasi kesetimbangan, kemiringan atau slope dari diagram bidang fase adalah tak terdefinisi

$$\frac{dN_2}{dN_1} = \frac{0}{0}$$

disebut titik singular dari bidang fase.

Titik singular dari persamaan bidang fase adalah ekuivalen dengan titik kesetimbangan dari persamaan bergantung waktu seperti pada persamaan (6.1). Selanjutnya akan diselidiki apakah populasi kesetimbangan stabil ? Akan diselidiki apa yang terjadi bila kedua populasi dekat dengan populasi kesetimbangan masing-masing (analisis kestabilan linear).

Misalkan

$$\begin{aligned} N_1(t) &= N_{1e} + \varepsilon N_{11}(t), \\ N_2(t) &= N_{2e} + \varepsilon N_{21}(t), \end{aligned} \tag{6.4}$$

dengan ε adalah bilangan positif kecil ($0 < |\varepsilon| < 1$), N_{1e} dan N_{2e} merupakan populasi setimbang yang memenuhi persamaan (6.3), εN_{1e} dan εN_{2e} diinterpretasikan sebagai perbedaan antara populasi total dan populasi kesetimbangan (biasa disebut sebagai "*population displacement*" dari kesetimbangan).

Selanjutnya substitusikan (6.4) ke persamaan (6.1) sehingga dipeoleh

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon dN_{11}(t)}{dt} &= g[N_{1e} + \varepsilon N_{11}(t), N_{2e} + \varepsilon N_{21}(t)], \\ \frac{\varepsilon dN_{21}(t)}{dt} &= f[N_{1e} + \varepsilon N_{11}(t), N_{2e} + \varepsilon N_{21}(t)]. \end{aligned} \tag{6.5}$$

Dengan menggunakan deret Taylor untuk fungsi dua variabel, yaitu

$$F(x_0+h, y_0+k) = F(x_0, y_0) + h\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0) + k\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) + \cdots$$

atau ekuivalen dengan

$$F(x, y) = F(x_0, y_0) + (x - x_0)\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0) + (y - y_0)\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) + \cdots$$

Tiga suku pertama dari dret diatas bersesuaian dengan pelinearan dri fungsi disekitar titik (x_0, y_0). Dengan cara tersebut dapat diperoleh

$$\frac{\varepsilon dN_{11}(t)}{dt} = g(N_{1e}, N_{2e}) + \varepsilon N_{11}(t)\frac{\partial g}{\partial N_1}(N_{1e}, N_{2e}) + \varepsilon N_{21}(t)\frac{\partial g}{\partial N_2}(N_{1e}, N_{2e}) + O(\varepsilon^2),$$
$$\frac{\varepsilon dN_{21}(t)}{dt} = f(N_{1e}, N_{2e}) + \varepsilon N_{11}(t)\frac{\partial f}{\partial N_1}(N_{1e}, N_{2e}) + \varepsilon N_{21}(t)\frac{\partial f}{\partial N_2}(N_{1e}, N_{2e}) + O(\varepsilon^2).$$

Jika suku $O(\varepsilon^2)$ diabaikan (berhubungan dengan suku non linear) disektar populasi kesetimbangan dan mengingat bahwa N_{1e} dan N_{2e} adalah populasi kesetimbangan, maka diperoleh

$$\begin{aligned} \frac{dN_{11}(t)}{dt} &= N_{11}(t)\frac{\partial g}{\partial N_1}(N_{1e}, N_{2e}) + N_{21}(t)\frac{\partial g}{\partial N_2}(N_{1e}, N_{2e}), \\ \frac{dN_{21}(t)}{dt} &= N_{11}(t)\frac{\partial f}{\partial N_1}(N_{1e}, N_{2e}) + N_{21}(t)\frac{\partial f}{\partial N_2}(N_{1e}, N_{2e}). \end{aligned} \qquad (6.6)$$

Persamaan (6.6) merupakan sistem Persamaan Diferensial (PD) linear dengan Koefisien konstan, dengan variabel N_{11} dan N_{21} dievaluasi pada populasi kesetimbangan yang diketahui, N_{1e} dan N_{2e}. Tergantung pada sifat dari solusi kesetimbangan populasi akan stabil atau tidak stabil.

Solusi dari persamaan yang terlinearisasi hanya kan mengindikasikan perilaku masing-masing spesies di sekitar populasi kesetimbangan. Agar dapat mendeskripsikan pertumbuhan poplasi yang jauh dari populasi kesetimbangan digunakan persamaan bidang fase.

Persamaan bidang fase disekitar populasi kesetimbangan. Substitusikan persamaan (6.4) ke (6.2), lalu expansikan dengan menggunakan deret Taylor dan dengan mengabaikan suku non linear diperoleh

$$\frac{dN_2(t)}{dN_1(t)} = \frac{N_{11}(t)\frac{\partial f}{\partial N_1} + N_{21}(t)\frac{\partial f}{\partial N_2}}{N_{11}(t)\frac{\partial g}{\partial N_1} + N_{21}(t)\frac{\partial g}{\partial N_2}}.$$

6.2. KESTABILAN DARI POPULASI KESETIMBANGAN DUA SPESIES

Perilaku populasi di sekitar titik kesetimbangan secara umum dapat dideskripsikan oleh sistem persamaan differensial linear koefisien konstan berikut.

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= ax + by \\ \frac{dy}{dt} &= cx + dy \end{aligned} \tag{6.7}$$

dengan a, b, c, d adalah konstanta real, dan $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$. Kemudian titik kesetimbangan dari sistem persamaan differensial (6.7) dapat dicari dengan mendapatkan solusi penyelesaian (x, y) dari sistem berikut

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= ax + by = 0 \\ \frac{dy}{dt} &= cx + dy = 0 \end{aligned} \tag{6.8}$$

Sehingga didapat solusi penyelesaiannya adalah (0,0) yang merupakan titik kesetimbangan tunggal dari persamaan (6.7) dan penyelesaian dari persamaan (6.7) yaitu

$$x = Ae^{\lambda t} \tag{6.9}$$

$$y = Be^{\lambda t} \tag{6.10}$$

Untuk menentukkan jenis kestabilan dari titik kesetimbangan, maka sistem persamaan diferensial (6.7) dibentuk ke persamaan karakteristik. Dari sistem persamaan (6.7) diperoleh

$$x = \frac{1}{c}\frac{dy}{dt} - \frac{d}{c}y \tag{6.11}$$

Kemudian dengan mensubstitusikan pada $\frac{dx}{dt} = ax + by$, sehingga diperoleh

$$\frac{1}{c}\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{d}{c}\frac{dy}{dt}=a\left(\frac{1}{c}\frac{dy}{dt}-\frac{d}{c}y\right)+by \tag{6.12}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2}-d\frac{dy}{dt}=a\left(\frac{dy}{dt}-dy\right)+bcy \tag{6.13}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2}-(a+d)\frac{dy}{dt}+(ad-bc)y=0 \tag{6.14}$$

Untuk memperoleh persamaan karakteristik dari PD (6.14) , dimisalkan $y=e^{\lambda t}$, dengan λ adalah suatu konstanta yang akan dicari.

$$\frac{dy}{dt}=\lambda e^{\lambda t},\ \frac{d^2y}{dt^2}=\lambda^2 e^{\lambda t}. \tag{6.15}$$

Selanjutnya substitusikan persamaan (6.15) ke (6.14), sehingga diperoleh

$$e^{\lambda t}[\lambda^2-(a+d)\lambda+(ad-bc)]=0.$$

Karena $e^{\lambda t}\neq 0$, maka haruslah

$$\lambda^2-(a+d)\lambda+(ad-bc)=0 \tag{6.16}$$

Persamaan (6.16) biasa disebut sebagai polinomial (persamaan) karakteristik. Dengan mendefinisikan $p=a+d$, $q=ad-bc$, dan $\Delta=p^2-4q$, maka diperoleh akar-akar karakteristik seperti berikut

$$\lambda_{1,2}=\frac{p\pm\sqrt{p^2-4q}}{2} \tag{6.17}$$

Solusi umum dari sistem PD (6.7) adalah

$$y=C_1e^{\lambda_1 t}+C_2e^{\lambda_2 t},$$

$$x=C_1\frac{\lambda_1-d}{c}e^{\lambda_1 t}+C_2\frac{\lambda_2-d}{c}e^{\lambda_2 t},$$

dengan C_1 dan C_2: suatu konstanta.

Beberapa kemungkinan dari nilai akar – akar karakteristik adalah sebagai berikut

1. λ_1 dan λ_2 adalah real, berbeda, dan mempunyai tanda yang sama
2. λ_1 dan λ_2 adalah real, berbeda, dan mempunyai tanda yang berlainan
3. λ_1 dan λ_2 adalah real dan sama
4. λ_1 dan λ_2 adalah kompleks konjugat tetapi bukan imajiner murni

5. λ_1 dan λ_2 adalah imajiner murni

Berdasarkan nilai dari akar – akar karateristik λ_1 dan λ_2 diatas, maka jenis titik kesetimbangan (0,0) dapat digolongkan seperti pada Tabel 6.1 di bawah ini

Tabel 6.1. Jenis - jenis kestabilan dari titik kesetimbangan (0,0)

Nilai akar–akar persamaan karakteristik	**Jenis dari titik kesetimbangan (0,0)**	**Jenis Kestabilan**
Real, berbeda, dan sama tanda	Titik simpul *(node)*	Stabil asimtotik bila akar – akar negatif, tidak stabil bila akar – akar positif
Real, berbeda, dan tidak sama tanda	Titik pelana *(saddle point)*	Tidak stabil
Real dan sama	Titik bintang *(star)*	Stabil asimtotik bila akar – akar negatif, tidak stabil bila akar – akar positif
Kompleks konjugat tetapi tidak imajiner murni	Titik spiral *(spiral point)*	Stabil asimtotik bila bagian real dari akar – akar negatif, tidak stabil bila bagian dari real dari akar – akar positif
Imajiner murni	Titik pusat *(center)*	Stabil, tetapi tidak stabil asimtotik

Contoh 1:

Tentukan jenis dari titik kesetimbangan sistem dua persamaan diferensial berikut

$$\frac{dx}{dt} = 2x - 7y$$

$$\frac{dy}{dt} = 3x - 8y$$

dan tentukan pula kestabilannya dari titik kesetimbangannya

Jawab:

Titik kesetimbangan dari sistem dua persamaan diferensial tersebut dapat diperoleh dari

$$\frac{dx}{dt} = 2x - 7y = 0$$

$$\frac{dy}{dt} = 3x - 8y = 0$$

Persamaan diatas hanya mempunyai penyelesaian $x = 0, y = 0$. Sehingga sistem dua persamaan diferensial linear hanya mempunyai titik kesetimbangan di (0,0). Selanjutnya juga sistem dua persamaan diferensial linear mempunyai bentuk seperti (6.7) dengan a = 2, b = -7, c = 3, d = -8. Sehingga diperoleh persamaan karakteristik sebagai berikut

$$\lambda^2 - (a+d)\lambda + (ad - bc) = 0$$

$$\Rightarrow \lambda^2 - (2 + (-8))\lambda + (2.(-8) - (-7).3) = 0$$

$$\Rightarrow \lambda^2 + 6\lambda + 5 = 0$$

dan akar – akar karakteristiknya adalah

$$\lambda_{1,2} = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4(1)(5)}}{2(1)}$$

$$= \frac{-6 \pm 4}{2}$$

Sehingga $\lambda_1 = \frac{-6+4}{2} = -1$ dan $\lambda_2 = \frac{-6-4}{2} = -5$

Karena akar – akar karakteristik keduanya bernilai real, berbeda, dan sama tanda (keduanya negatif), maka titik kesetimbangan (0,0) merupakan titik simpul *(node)* dan titik simpul ini stabil asimtotik.

Selanjutnya akan diberikan tentang bidang fase sistem dua persamaan differensial linear orde satu. Misalkan variabel dalam persamaan akar – akar karakteristik sebagai berikut :

$$\begin{aligned} p &= a + d \\ q &= ad - bc \\ \Delta &= (a+d)^2 - 4(ad - bc) = p^2 - 4q \end{aligned} \qquad (6.18)$$

Sehingga diperoleh

$$\lambda_{1,2} = \frac{p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2} \tag{6.19}$$

Beberapa jenis akar-akar dari persamaan di atas adalah

1. akar – akar real dan berbeda untuk $\Delta > 0$
2. akar – akarnya real dan sama untuk $\Delta = 0$
3. akar – akarnya kompleks konjugat untuk $\Delta < 0$

Akar bertanda sama jika $q > 0$ dan berbeda jika $q < 0$. Akar bernilai positif jika $p > 0$ dan negatif jika $p < 0$ serta bernilai nol jika $p = 0$

Berikut diberikan jenis-jenis titik kesetimbangan.

a. Titik Pelana (*saddle point*)

Apabila sistem dua persamaan differensial linear mempunyai bentuk $(\Delta > 0, q < 0)$ dan akar – akar karakteristiknya real, berbeda, dan tidak sama tanda maka titik kesetimbangan pada sistem dua persamaan diferensial linear tersebut dinamakan titik pelana *(saddle point)*.

Contoh 2:

Diberikan sistem dua persamaan diferensial linear berikut

$$\frac{dx}{dt} = -x$$

$$\frac{dy}{dt} = 2y$$

Akar – akar karakteristik dari sistem dua persamaan diferensial linear diatas adalah -1 dan 2 (berlawanan tanda) sehingga mempunyai bentuk solusi eksak yaitu

$$x = Ae^{-t}$$

$$y = Be^{2t}$$

dan sistem dua persamaan diferensial linear tersebut memiliki titik kesetimbangan $(0,0)$.

Sedangkan bidang fase *(phase plane)* persamaan diferensialnya adalah

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2y}{x}$$

sehingga persamaan diferensial diatas mempunyai penyelesaian

$$\frac{dy}{y} = \frac{-2}{x} dx$$

kemudian ruas kiri dan kanan masing – masing diintegralkan

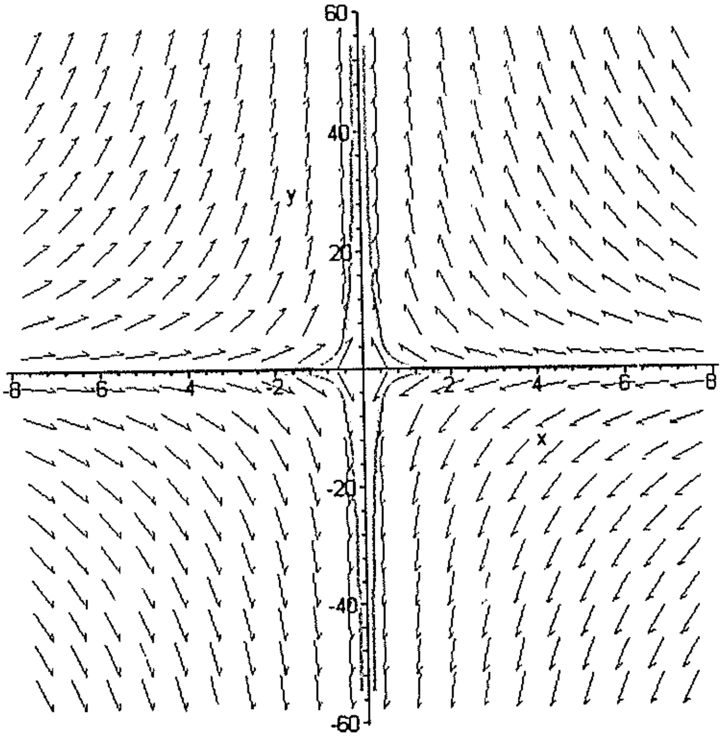
$$\int \frac{dy}{y} = -2 \int \frac{dx}{x}$$

$$\ln|y| = -2\ln|x| + c$$

sehingga solusi yang dihasilkan adalah

$$y = \frac{k}{x^2}$$

Dari solusi yang dihasilkan dapat digambarkan kurva trayektori dalam bidang fase sebagai berikut



Gambar 6.1. Trayektori titik pelana pada bidang fase

Maka titik kesetimbangan $(0,0)$ merupakan titik pelana *(saddle point)* tidak stabil karena sebagian besar trayektori menjauh dari titik kesetimbangan.

b. Titik simpul *(node)*

Apabila sistem dua persamaan diferensial linear mempunyai bentuk $(\Delta > 0, q > 0)$ dan akar – akar karakteristik polinomialnya real, berbeda dan sama tanda maka titik kesetimbangan pada sistem dua persamaan diferensial linear tersebut dinamakan titik simpul *(node)*.

Contoh 3 :

Pandang sistem dua persamaan diferensial linear berikut

$$\frac{dx}{dt} = 2x$$
$$\frac{dy}{dt} = y$$

Akar – akar karakteristik dari sistem dua persamaan diferensial linear diatas adalah 1 dan 2 (sama tanda) sehingga mempunyai bentuk solusi eksak yaitu

$$x = Ae^{t}$$
$$y = Be^{2t}$$

dan sistem dua persamaan diferensial linear tersebut memiliki titik kesetimbangan $(0,0)$. Sedangkan bidang fase *(phase plane)* persamaan diferensialnya adalah

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{2x}$$

sehingga persamaan diferensial diatas mempunyai penyelesaian

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{2x}$$

kemudian ruas kiri dan kanan masing – masing diintegralkan

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{2x}$$

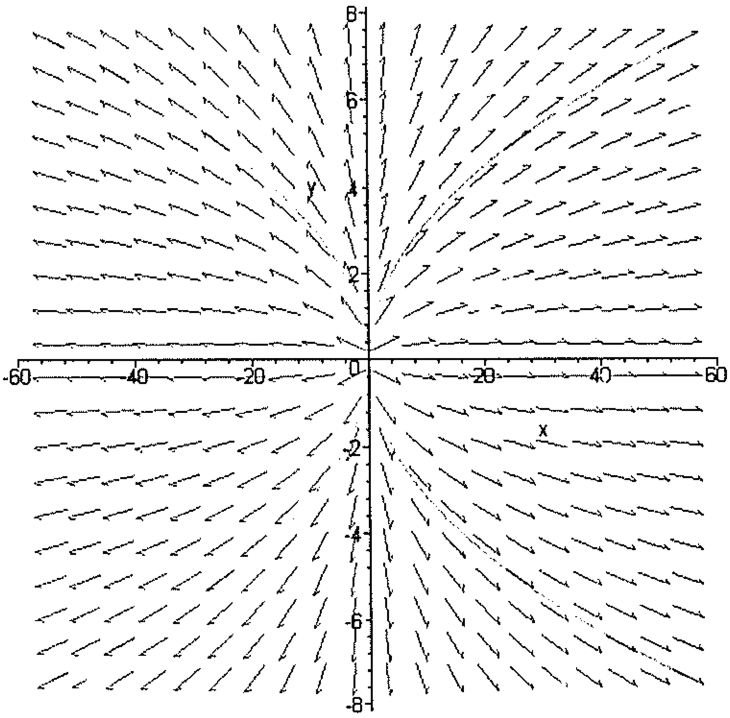
$$2\ln|y| = \ln|x| + c$$

sehingga solusi yang dihasilkan adalah

$$x = ky^2$$

Karena akar – akar karakteristik positif, maka titik kesetimbangan (0,0) merupakan titik simpul yang tidak stabil. Hal ini terlihat dari tanda panah dalam trayektori yang menjauhi titik kritis / kesetimbangan.

Dari solusi yang dihasilkan dapat digambarkan kurva trayektori dalam bidang fase berikut



Gambar 6.2. Trayektori titik simpul tidak stabil pada bidang fase

c. Titik spiral ***(spiral point)***

Apabila sistem dua persamaan diferensial linear mempunyai bentuk $(\Delta < 0, p \neq 0)$ dan akar – akar karakteristik polinomialnya kompleks konjugat maka titik kesetimbangan pada sistem dua persamaan diferensial linear tersebut dinamakan titik spiral *(spiral point)*.

Contoh 4 :

Pandang sistem dua persamaan diferensial linear berikut

$$\frac{dx}{dt} = 2x + 3y$$

$$\frac{dy}{dt} = -3x + 2y$$

akar – akar karakteristik ditentukan dari persamaan karakteristik berikut

$$\lambda^2 - (2+2)\lambda + (2.2 - 3.(-3)) = 0$$

$$\lambda^2 - 4\lambda + 13 = 0$$

sehingga dihasilkan $\lambda_1 = 2+3i$ dan $\lambda_2 = 2-3i$ yaitu akar - akar kompleks konjugat dengan bagian real positif dan sistem dua persamaan diferensial linear tersebut memiliki titik kesetimbangan $(0,0)$.

Sedangkan bidang fase *(phase plane)* persamaan diferensialnya adalah

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-3x+2y}{2x+3y}.$$

Persamaan membentuk persamaan diferensial order satu dan dapat disederhanakan menjadi

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-3+2\dfrac{y}{x}}{2+3\dfrac{y}{x}},$$

dengan memisalkan variabel $\frac{y}{x} = v$ atau $y = xv$, maka $\frac{dy}{dx} = x\left(\frac{dv}{dx}\right) + v$.

Sehingga persamaan menjadi $x\frac{dv}{dx} = -v + \frac{-3+2v}{2+3v}$ atau $\frac{(2+3v)dv}{-3(1+v^2)} = \frac{dx}{x}$.

Ruas kiri dan ruas kanan diintegralkan

$$-\frac{2}{3}\tan^{-1} v - \frac{1}{2}\ln(1+v^2) = \ln|x| + c,$$

dengan c : konstanta.

Kemudian dengan substitusi $v = \frac{y}{x}$ dan penyederhanaan, diperoleh

$$-\frac{2}{3}\tan^{-1}\frac{y}{x} = \ln|x| + \frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{y^2}{x^2}\right) + c$$

$$-\frac{2}{3}\tan^{-1}\frac{y}{x} = \ln(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}} + c$$

Untuk menganalisis persamaan diatas akan dibawa ke dalam koordinat polar .

Dengan memisalkan $\theta = \tan^{-1}\frac{y}{x}$ dan $r = (x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}$. Maka persamaan menjadi

$$-\frac{2}{3}\theta = c + \ln r$$

$$\ln r = -\frac{2}{3}\theta - c$$

$$r = e^{\left(-\frac{2}{3}\theta - c\right)}$$

Jika $\theta = 0$, maka diperoleh $r_0 = e^{-c}$ dan persamaan diatas menjadi

$$r = r_0\, e^{-\left(\frac{2}{3}\right)\theta}$$

Jadi apabila sistem persamaan differensial yang mempunyai bentuk

$$\frac{dx}{dt} = ax + by$$

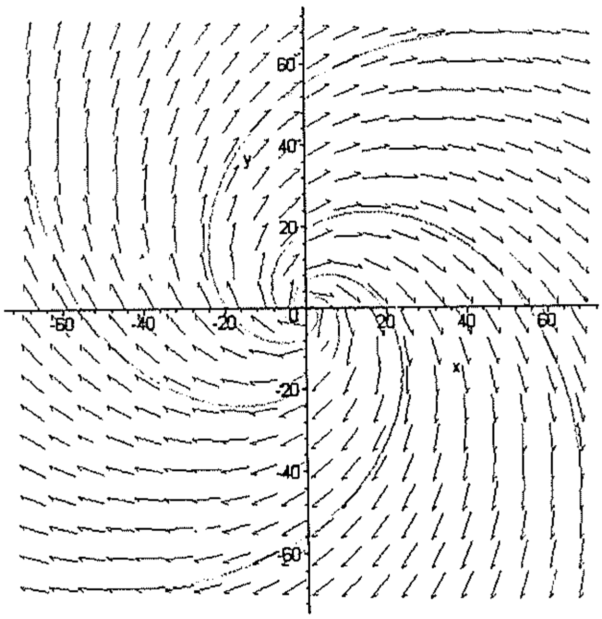
$$\frac{dy}{dt} = -bx + ay$$

Dan solusinya $r = r_0 e^{-\left(\frac{a}{b}\right)\theta}$. Maka diperoleh dua kasus berbeda yaitu

1. Jika $a \neq 0$ maka lintasan yang diperoleh disebut spiral eksponensial.
2. Jika $a = 0$ maka persamaan ( ) menjadi $r = r_0$ sehingga lintasan yang diperoleh berupa lingkaran.

   Untuk $a \neq 0$ terdapat dua kasus sebagai berikut:

1. Jika $\frac{a}{b} < 0$ maka r naik seiring dengan naiknya θ.
2. Jika $\frac{a}{b} > 0$ maka r turun seiring dengan naiknya θ.



Gambar 6.3. Trayektori titik spiral tidak stabil pada bidang fase

Contoh 5 :

Pandang sistem dua persamaan diferensial linear berikut

$$\frac{dx}{dt} = -x - 3y$$

$$\frac{dy}{dt} = 3x - 2y$$

Sistem persamaan diferensial linear tersebut memiliki titik kesetimbangan $(0,0)$. Sedangkan akar – akar karakteristik ditentukan dari persamaan karakteristik berikut

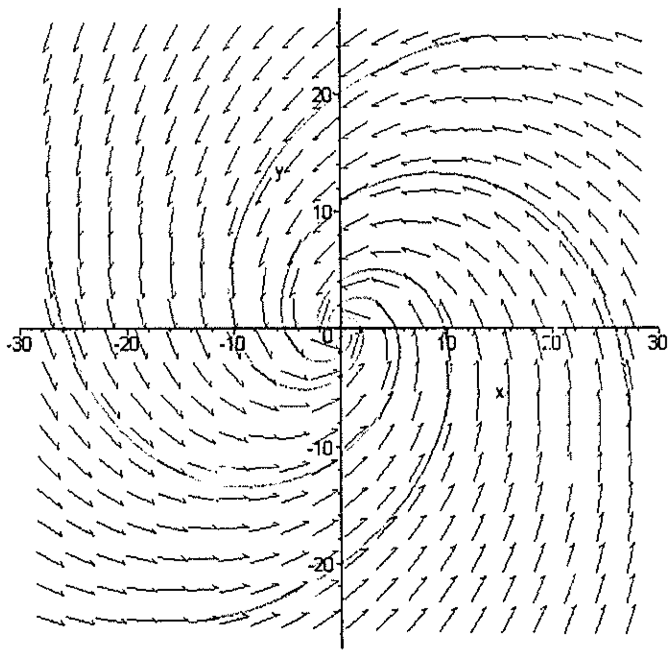
$$\lambda^2 - (-1 + -2)\lambda + ((-1).(-2) - (-3).3) = 0$$

$$\lambda^2 + 3\lambda + 11 = 0$$

telah dihasilkan $\lambda_1 = \dfrac{-3 + \sqrt{35}i}{2}$ dan $\lambda_2 = \dfrac{-3 - \sqrt{35}i}{2}$ yaitu akar – akar kompleks konjugat dengan bagian real yang negatif, sedangkan bidang fase *(phase plane)* persamaan diferensialnya adalah

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x - 2y}{-x - 3y}$$

Karena dihasilkan akar – akar kompleks konjugat dengan bagian real yang negatif, maka titik kesetimbangan (0,0) merupakan titik spiral yang stabil.



Gambar 6.4. Trayektori titik spiral stabil pada bidang fase

Latihan Soal:

1. Diberikan sistem persamaan diferensial linear seperti berikut

$$\frac{dx}{dt} = 3x - y,$$
$$\frac{dy}{dt} = x + 2y.$$

   a. Tentukan kestabilan dari solusi kesetimbangan x = 0, y = 0.

   b. Gambarkanlah solusi tersebut dalam bidang fase !

2. Diketahui dua sistem persamaan diferensial linear seperti berikut

$$i.\ \frac{dx}{dt} = 2x, \qquad\qquad ii.\ \frac{dx}{dt} = 4x,$$
$$\frac{dy}{dt} = x - 3y. \qquad\qquad \frac{dy}{dt} = 2x - 6y$$

   Perlihatkan bahwa analisis bidang fase dari dua sistem tersebut adalah sama meskipun solusinya cenderung berbeda !

3. Pandang sistem linear di bawah ini

$$\frac{dx}{dt} = ax + by,$$
$$\frac{dy}{dt} = -bx + ay.$$

   a. Tentukan kestabilan dari titik kesetimbangan (0, 0) jika diambil $a = 1$ dan $b = 2$!

   b. Sketsalah trayektori dalam bidang fase jika a = -1 dan b = 2 !

4. Diberikan suatu persamaan yang mendeskripsikan pendulum non linear

$$L\frac{d^2\theta}{dt^2} = -g\sin\theta - k\frac{d\theta}{dt},$$

   dengan $k = \frac{cL}{m} > 0$, c: koefisien friksional, g: gaya gravitasi, dan L: panjang pendulum.

   Sketsalah solusi dalam bidang fase ($\frac{d\theta}{dt}$ sebagai fungsi dari θ) di persekitaran dari $\theta = \pi$.

DAFTAR PUSTAKA

1. Alligood, K.T, Sauer, T.D, & Yorke, J.A, *Chaos an Introduction to Dynamical Systems*, Springer, 1993.
2. Bambang S, *Pengantar Model Matematika*, FMIPA Universitas Gajah Mada Yogyakarta.
3. Boyce, W.E. and Richard C. Di Prima, *Elementary Differential Equations and Boundary Value problem,* fifth Edition, john Wiley & Sons, Inc., New York, 1992.
4. Fowkes, N.D and Mahony, J.J., *An Introduction to Mathematical Modelling*, John Wiley & Sons, 1994.
5. Haberman, R, *Mathematical Models in Mechanical Vibrations, Population Dynamic, and Traffic Flow*, Prentice Hall Inc, Englewood Cliffs, New Jersey 07632, 1971.
6. Murray, J.D, *Mathematical Biology*. Heidelberg Berlin : Springer Verlag, 1993.
7. Painter. 2005. *ODE models in mathematical biology,* www.hw.ac.uk/painter/F14ZS2/chap1.pdf, diakses terakhir bulan Agustus 2007
8. Susanta, B. dan Bambang S, *Model Matematik*, Karunika Jakarta Univesitas Terbuka, 1989