BUKU AJAR

PENGANTAR RELIABILITAS

Oleh:

Di Asih I Maruddani, S.Si., M.Si.

Triastuti Wuryandari, S.Si., M.Si.

Program Studi Statistika
Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Diponegoro
Semarang

2007

DAFTAR ISI

MODUL 3 : UKURAN SISTEM RELIABILITAS

MODUL 4 : MODEL RELIABILITAS NON PARAMETRIK SATU SAMPEL

MATERI POKOK I

DISTRIBUSI TAHAN HIDUP DAN ESTIMASI PARAMETER

Di Asih I Maruddani, S.Si., M.Si.
Triastuti Wuryandari, S.Si., M.Si.

DAFTAR ISI

MODUL 1 : DISTRIBUSI TAHAN HIDUP DAN ESTIMASI PARAMETER

DISTRIBUSI TAHAN HIDUP DAN ESTIMASI PARAMETER

1. Pengantar

Pengantar Reliabilitas merupakan mata kuliah bidang statistik yang mempelajari tentang ketahanan suatu obyek. Mata kuliah ini memerlukan pengetahuan dasar tentang metode-metode statistik dan distribusi-distribusi penting dalam statistik.

Sebelum membahas mengenai teori reliabilitas, pada modul ini akan diperkenalkan beberapa distribusi penting yang mendasari data tahan hidup, yaitu distribusi Gamma, eksponensial, Weibull, Normal, Log Normal, dan Rayleigh. Untuk mengestimasi parameter-parameter pada distribusi-distribusi tersebut, pada modul ini juga akan diberikan metode-metode estimasi parameter, yaitu metode momen, metode maksimum likelihood, dan metode *least square*.

2. Tujuan Instruksional Umum

Dengan mempelajari buku ini, diharapkan mahasiswa dapat memahami berbagai bentuk fungsi-fungsi reliabilitas dan menggunakan uji reliabilitas dengan metode parametrik dan non parametrik.

3. Tujuan Instruksional Khusus

Setelah mempelajari modul ini, mahasiswa diharapkan dapat :

a. menjelaskan bentuk-bentuk distribusi-distribusi tahan hidup
b. menjelaskan sifat-sifat distribusi tahan hidup
c. melakukan estimasi parameter dengan metode momen untuk distribusi-distribusi tahan hidup
d. melakukan estimasi parameter dengan metode maksimum likelihood untuk distribusi-distribusi tahan hidup
e. melakukan estimasi parameter dengan metode *least square* untuk distribusi-distribusi tahan hidup

4. Kegiatan Belajar

4.1 Kegiatan Belajar 1

DISTRIBUSI TAHAN HIDUP

4.1.1 Uraian dan Contoh

Distribusi Gamma

Fungsi Gamma, yang dinotasikan dengan $\Gamma(\kappa)$ untuk setiap $\kappa > 0$ diberikan sebagai berikut:

$$\Gamma(\kappa) = \int_{t=0}^{\infty} t^{\kappa-1} e^{-t} dt \qquad (1.1.1)$$

Sebagai contoh:

Jika $\kappa = 1$, maka $\Gamma(1) = \int_{t=0}^{\infty} e^{-t} dt = 1$

Sifat-sifat dari Fungsi Gamma:

(1) $\Gamma(\kappa) = (\kappa-1)\,\Gamma(\kappa-1)$ (1.1.2)

(2) $\Gamma(n) = (n-1)\,!$ $\quad n = 1, 2, \ldots 1$ (1.1.3)

(3) $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ (1.1.4)

Suatu Variabel Random kontinu X berdistribusi Gamma dengan parameter $\kappa>0$ dan $\theta>0$, atau ditulis dengan $X \sim GAM(\theta,\kappa)$, jika X mempunyai fungsi densitas probabilitas (p.d.f) dalam bentuk:

$$f(x;\theta,\kappa) = \frac{1}{\theta^{\kappa}\Gamma(\kappa)} x^{\kappa-1} e^{-x/\theta} \qquad x > 0 \qquad (1.1.5)$$

Mean dan Variansi dari $X \sim GAM(\theta,\kappa)$ adalah:

$$E[X] = \kappa\theta \qquad (1.1.6)$$

$$\text{Var}[X] = \theta^2\,\kappa(1+\kappa) - (\kappa\theta)^2 = \kappa\theta^2 \qquad (1.1.7)$$

Distribusi Exponensial

Distribusi eksponensial adalah salah satu bentuk khusus dari distribusi Gamma. Jika $\kappa = 1$, maka distribusi Gamma akan menjadi distribusi eksponensial.

Suatu Variabel Random kontinu X berdistribusi eksponensial dengan parameter $\lambda>0$ atau ditulis dengan $X \sim EXP(\lambda)$, jika X mempunyai fungsi densitas probabilitas (p.d.f) dalam bentuk:

$$\begin{aligned} f(x,\lambda) &= \lambda e^{-\lambda x} \quad & x > 0 \\ &= 0 & \text{untuk } x \text{ lainnya} \end{aligned} \tag{1.1.8}$$

Mean dan Variansi dari $X \sim EXP(\lambda)$ adalah:

$$E[X] = \lambda \tag{1.1.9}$$

$$\text{Var}[X] = \lambda^2 \tag{1.1.10}$$

Distribusi Weibull

Suatu Variabel Random kontinu T berdistribusi Weibull dengan parameter $\gamma>0$ dan $\theta>0$ atau ditulis dengan $T \sim WEI(\gamma,\theta)$, jika T mempunyai fungsi densitas probabilitas (p.d.f) dalam bentuk :

$$f(t;\theta,\gamma) = \frac{\gamma}{\theta} t^{\gamma-1} \exp-\left(\frac{t^\gamma}{\theta}\right) \quad t > 0 \tag{1.1.11}$$

Mean dan Variansi dari $X \sim WEI(\gamma,\theta)$ adalah:

$$E[T] = \theta^{\frac{1}{\gamma}} \Gamma\left(1+\frac{1}{\gamma}\right) \tag{1.1.12}$$

$$\text{Var}[T] = \theta^{\frac{2}{\gamma}} \left[\Gamma\left(1+\frac{2}{\gamma}\right) - \left(\Gamma\left(1+\frac{1}{\gamma}\right)\right)^2\right] \tag{1.1.13}$$

Distribusi Rayleigh

Distribusi Rayleigh adalah salah satu bentuk khusus dari distribusi Weibull. Jika $\gamma=2$, maka distribusi Weibull akan menjadi distribusi Rayleigh.

Suatu Variabel Random kontinu T berdistribusi Rayleigh dengan parameter $\lambda>0$ atau ditulis dengan $T \sim RAY(\lambda)$, jika T mempunyai fungsi densitas probabilitas (p.d.f) dalam bentuk :

$$f(t;\lambda) = \lambda t \exp\left(-\frac{\lambda t^2}{2}\right) \qquad t > 0 \tag{1.1.14}$$

Mean dan Variansi dari $T \sim RAY(\lambda)$ adalah:

$$E[T] = \sqrt{\frac{\pi}{2\lambda}} \tag{1.1.15}$$

$$\mathrm{Var}[T] = \frac{2}{\lambda}\left(1 - \frac{\pi}{4}\right) \tag{1.1.16}$$

Distribusi Normal

Suatu Variabel Random kontinu T berdistribusi Normal dengan mean μ dan variansi σ^2 atau ditulis dengan $T \sim N(\mu, \sigma^2)$, jika T mempunyai fungsi densitas probabilitas (p.d.f) dalam bentuk:

$$f(t;\mu,\sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2\right]$$

$$-\infty < t < \infty \text{ dan } -\infty < \mu < \infty \; ; \; 0 < \sigma < \infty \tag{1.1.17}$$

Distribusi LogNormal

Suatu Variabel Random kontinu X berdistribusi LogNormal atau ditulis dengan $X \sim LN(\mu, \sigma^2)$, jika X mempunyai fungsi densitas probabilitas (p.d.f) dalam bentuk:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma x\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln x - \mu}{\sigma}\right)^2\right] \qquad -\infty < \mu < \infty \; ; \sigma > 0 \; ; x > 0 \tag{1.1.18}$$

Mean dan Variansi dari $X \sim LN(\mu, \sigma^2)$, adalah:

$$E[X] = \exp\left[\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right] \tag{1.1.19}$$

$$\mathrm{Var}[X] = \left[\exp\left(2\mu + \sigma^2\right)\right]\left[\exp\left(\sigma^2\right) - 1\right] \tag{1.1.20}$$

Jika suatu Variabel Random X didefinisikan sebagai $T = \ln X$, dengan X berdistribusi LogNormal, maka T adalah Variabel Random yang berdistribusi Normal dengan mean μ dan variansi σ^2.

$$E[T] = E[\ln(X)] = \mu \tag{1.1.21}$$

$$\mathrm{Var}[T] = \mathrm{Var}[\ln(X)] = \sigma^2 \tag{1.1.22}$$

4.1.3 Rangkuman

Sifat-sifat penting beberapa distribusi tahan hidup :

Distribusi	Notasi	pdf	Mean	Variansi
Gamma	$X \sim GAM(\theta,\kappa)$ $\theta > 0\ ;\ \kappa > 0$	$\frac{1}{\theta^{\kappa}\Gamma(\kappa)} x^{\kappa-1} e^{-x/\theta}$ $x > 0$	$\kappa\theta$	$\kappa\theta^2$
Eksponensial	$X \sim EXP(\lambda)$ $\lambda > 0$	$\lambda e^{-\lambda x}$ $x > 0$	λ	λ^2
Weibull	$X \sim WEI(\beta,\theta)$ $\beta > 0\ ;\ \theta > 0$	$\frac{\beta}{\theta^{\beta}} x^{\beta-1} e^{-(x/\theta)^{\beta}}$ $x > 0$	$\theta\Gamma\left(1+\frac{1}{\beta}\right)$	$\theta^2\left[\Gamma\left(1+\frac{2}{\beta}\right)-\Gamma^2\left(1+\frac{1}{\beta}\right)\right]$
Rayleigh	$X \sim RAY(\lambda)$ $\lambda > 0$	$\lambda x \exp\left(-\frac{\lambda x^2}{2}\right)$ $x > 0$	$\sqrt{\frac{\pi}{2\lambda}}$	$\frac{2}{\lambda}\left(1-\frac{\pi}{4}\right)$
Normal	$X \sim N(\mu,\sigma^2)$ $-\infty < \mu < \infty$ $-\infty < \sigma^2 < \infty$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right]$ $-\infty < x < \infty$	μ	σ^2
LogNormal	$X \sim LN(\mu,\sigma^2)$ $-\infty < \mu < \infty$ $\sigma > 0$	$\frac{1}{\sigma x\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln x-\mu}{\sigma}\right)^2\right]$ $x > 0$	$\exp\left[\mu+\frac{\sigma^2}{2}\right]$	$[\exp(2\mu+\sigma^2)]\,[\exp(\sigma^2)-1]$

4.1.5 Umpan Balik dan Tindak Lanjut

Cocokkanlah jawaban anda dengan kunci jawaban test formatif 1 yang ada di bagian akhir bab ini. Hitung jawaban anda yang benar dan gunakan rumus di bawah untuk menghitung tingkat penguasaaan anada terhadap materi kegiatan belajar pada bagian ini.

Rumus

$$\text{Tingkat penguasaan} = \frac{\text{jumlah benar}}{10} \times 100\%$$

Arti penguasaan yang anda capai:

90% – 100%	=	baik sekali
80% – 89%	=	baik
70% – 79%	=	cukup
– 69%	=	kurang

Kalau anda mencapai tingkat penguasaan 80% atau lebih anda dapat meneruskan kegiatan belajar selanjutnya. Tetapi kalau kurang anda harus mengulang terutama bagian yang belum anda kuasai

4.2 Kegiatan Belajar 2

ESTIMASI PARAMETER

4.2.1 Uraian dan Contoh

Metode Momen

Jika $x_1, x_2, \ldots, x_n$ adalah suatu himpunan data, maka momen sampel ke-k adalah

$$M_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^k \tag{1.2.1}$$

Jika θ_1, θ_2, ..., θ_m adalah parameter yang tidak diketahui dari suatu populasi, maka estimator momen $\hat{\theta}_1$, $\hat{\theta}_2$, ..., $\hat{\theta}_m$ diperoleh dari menyamakan m momen sampel pertama sebagai penyelesaian dari θ_1, θ_2, ..., θ_m

1. Distribusi Eksponensial

Misalkan x_1, x_2, ..., x_n adalah suatu sampel random dari distribusi eksponensial dengan parameter λ. Fungsi densitas probabilitas (p.d.f) dari distribusi eksponensial adalah

$$f(x;\lambda) = \lambda e^{-\lambda x}$$

dan

$$\mathrm{E[X]} = \frac{1}{\lambda}$$

Momen sampel pertama

$$M_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = E[X] = \frac{1}{\lambda}$$

Sehingga estimator untuk λ adalah

$$\hat{\lambda} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} x_i} \tag{1.2.2}$$

Contoh 1:

Suatu perusahaan sistem data non-kabel menggunakan sinar infra merah. Ukuran dari sinar infra merah tersebut berpengaruh langsung terhadap sistem reliabilitas dan kemampuan untuk mereduksi pengaruh dari keadaan cuaca. Data di bawah ini dikirimkan secara kontinu dengan menggunakan sinar infra merah, dan dicatat waktu kegagalan dalam jam. Waktu kegagalan adalaah saat data tidak dapat diterima. Waktu kegagalan adalah sebagai berikut:

47, 81, 127, 183, 188, 221, 253, 311, 323, 360, 489, 496, 511, 725, 772, 880, 1509, 1675, 1806, 2008, 2026, 2040, 2869, 3104, 3205

Diasumsikan bahwa waktu kegagalan mengikuti suatu distribusi eksponensial. Tentukan parameter dari distribusi dengan menggunakan metode momen. Estimasikan reliabilitas dari sistem tersebut pada saat waktu = 1000 jam. (Data di atas dibangkitkan dari distribusi exponensial dengan parameter $1/\lambda=1000$).

Jawab:

Parameter dari distribusi eksponensial adalah :

$$\hat{\lambda} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} x_i} = \frac{25}{26209} = 0{,}00095387$$

$$\frac{1}{\hat{\lambda}} = 1.048.36$$

Sehingga rata-rata waktu kegagalan dari sinar infra merah tersebut adalah 1.048.36 jam.

2. Distribusi Gamma

Misalkan $x_1, x_2, \ldots, x_n$ adalah suatu sampel random dari distribusi Gamma dengan p.d.f

$$f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^{\alpha}} x^{\alpha-1e^{-x/\beta}} \qquad x > 0, \alpha \geq 0, \beta > 0$$

Seperti ditunjukkan pada Kegiatan Belajar 1, mean dan variansi dari distribusi Gamma adalah

$$\mathrm{E}[X] = \alpha\beta$$

$$\mathrm{Var}[X] = \mathrm{E}[X^2] - \mathrm{E}[X]^2 = \alpha\beta^2$$

Dengan menggantikan $\mathrm{E}[X]$ dan $\mathrm{E}[X]^2$ dengan M_1 dan M_2 diperoleh

$$M_1 = \hat{\alpha}\hat{\beta}$$

$$M_2 - M_1^2 = \hat{\alpha}\hat{\beta}^2$$

Dengan menyelesaikan kedua persamaan di atas secara simultan diperoleh

$$\hat{\beta} = \frac{(M_2 - M_1^2)}{M_1} \qquad (1.2.3)$$

$$\hat{\alpha} = \frac{M_1^2}{(M_2 - M_1^2)} \qquad (1.2.4)$$

Contoh 2:

Suatu pabrik Personal Computer melakukan uji pada 20 monitor komputer dan diperoleh waktu kegagalan (dalam jam) sebagai berikut :

130, 150, 180, 40, 90, 125, 44, 128, 55, 102, 126, 77, 95, 43, 170, 130, 112, 106, 93, 71

Diasumsikan bahwa populasi utama dari waktu kegagalan mengikuti distribusi Gamma dengan parameter α dan β. Bagaimana estimasi dari parameter-parameter tersebut ?

Jawab:

Terlebih dahulu diturunkan

$$M_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \frac{2067}{20} = 103{,}35$$

$$M_2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n} = \frac{244{,}823}{20} = 12.241{,}15$$

Selanjutnya diperoleh

$$\hat{\beta} = \frac{(M_2 - M_1^2)}{M_1} = \frac{12.241{,}15 - (103{,}35)^2}{103{,}35} = 15{,}09$$

$$\hat{\alpha} = \frac{M_1^2}{(M_2 = M_1^2)} = \frac{(103{,}35)^2}{12.241{,}15 - (103{,}35)^2} = 6{,}847$$

Ekspektasi rata-rata waktu kegagalan dari sebuah monitor adalah

$$\hat{\alpha}\hat{\beta} = (15{,}09)(6{,}487) = 103{,}321$$

3. Distribusi Normal

Misalkan $x_1, x_2, \ldots, x_n$ adalah suatu sampel random dari distribusi Normal dengan p.d.f

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right)$$

Momen sampel pertama

$$M_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right) dx$$

Misalkan

$$z = \frac{x-\mu}{\sigma}$$

Maka

$$x = \mu + \sigma\ z \qquad \text{dan} \qquad dx = \sigma\ dz$$

Momen pertama menjadi

$$M_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\mu+\sigma\ z)}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) dz$$

$$M_1 = \mu \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) dz + \sigma \int_{-\infty}^{\infty} \frac{z}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) dz$$

karena

$$M_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) dz = 1$$

dan

$$M = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{z}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) dz = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) d\left(\frac{z^2}{2}\right)$$

Maka $= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right)\Big|_{-\infty}^{\infty} = 0$

$M_1 = \mu = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$

Momen sampel kedua, M_2, adalah

$$M_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right) dx$$

Ambil

Diperoleh $z = \frac{x-\mu}{\sigma}$

$$M_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (\mu + \sigma\, z)^2 \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) dz$$

$$M_2 = \mu^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) dz + 2\sigma\mu \int_{-\infty}^{\infty} \frac{z}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) dz$$

$$+ \sigma^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{z^2}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) dz$$

$$= \mu^2 + \sigma^2$$

Sehingga

$$M_2 = \mu^2 + \sigma^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^{\,2}$$

Maka estimasi parameter dari distribusi normal adalah

$$\hat{\mu} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \qquad (1.2.5)$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^{\,2} - \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 \quad \text{atau} \quad \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 \qquad (1.2.6)$$

Contoh 3:

Sebuah alat pemeriksa berat terdiri dari tiga komponen utama, yaitu: timbangan, pengontrol, dan pemisah. Pada suatu sistem produksi berkecepatan tinggi, alat ini berguna untuk memeriksa apakah berat produk yang dihasilkan sudah sesuai dengan batas spesifikasi. Jika berat produk tidak sesuai batas spesifikasi, maka produk akan dipisahkan dengan produk yang diterima. Komponen pemisah merupakan komponen yang dipandang paling memungkinkan untuk gagal. Berikut ini adalah waktu kegagalan sebuah alat pemisah:

14, 18, 18, 20, 21, 22, 22, 20, 17, 17, 15, 13

Diasumsikan bahwa data tersebut berdistribusi normal dengan mean μ dan variansi σ^2. Turunkan nilai $\hat{\mu}$ dan $\hat{\sigma}^2$.

Jawab:

Berdasarkan persamaan (1.2.5) dan (1.2.6) diturunkan

$$\hat{\mu} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{1}{12} \times 217 = 18.08$$

$$\hat{\sigma} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{12}\sum_{i=1}^{n}(x_i - 18.08)^2 = 8.409$$

Metode Maksimum Likelihood

Fungsi Likelihood

Diasumsikan dipunyai suatu distribusi p.d.f. $f(x,\theta)$ dengan parameter θ dan misalkan hasil observasi adalah $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Untuk sebarang Variabel Random kontinu, probabilitas untuk memperoleh x secara tepat adalah nol, untuk sebarang x. Bagaimanapun, probabilitas bahwa sebuah observasi x terjadi pada suatu interval dengan panjang dx dengan pusat pada x, adalah $f(x,\theta)$. Jika $x_1, x_2, \ldots, x_n$ independen, maka fungsi likelihoodnya adalah

$$l(\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i,\theta)dx_i \qquad (1.2.7)$$

Karena bentuk perkalian dx_1, dx_2, …, dx_n, tidak tergantung pada θ sehingga persamaan (2.2) dapat ditulis kembali sebagai berikut:

$$l(\theta) = K\prod_{i=1}^{n} f(x_i,\theta) \qquad (1.2.8)$$

Contoh 4:

Misalkan bahwa suatu pabrik IC mengambil tiga sampel random dari kelompok yang sama dengan ukuran 10, 15, dan 25. Pada pemeriksaan, ditemukan pada sampel-sampel tersebut diperoleh produk cacat sebanyak 5, 7, dan 9. Selain itu juga ditemukan bahwa cacat pada produksi tersebut mengikuti distribusi normal dengan mean μ dan variansi 1. Bagaimanakan fungsi likelihood dari probabilitas tersebut ?

Jawab:

P.d.f dari observasi x_i adalah

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{1}{2}(x_i-\mu)^2\right) \qquad i = 1, 2, 3$$

Fungsi likelihood

$$l(\mu) = \frac{1}{2\pi\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2\right]$$

$$l(\mu) = K - 2(7-\mu)^2$$

Diasumsikan n observasi x_1, x_2, …, x_n adalah sampel random yang diambil dari sebuah distribusi normal dengan mean μ dan variansi σ^2. P.d.f. dari observasi x_i adalah

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x_i-\mu}{\sigma}\right)^2\right) \qquad i = 1, 2, 3, \ldots, n$$

Fungsi likelihood adalah hasil perkalian dari p.d.f di atas, yaitu

$$l(\mu,\sigma^2) = \frac{(2\pi)^{-n/2}}{\sigma^n}\exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2\right)$$

Logaritma dari fungsi likelihood

$$L(\mu,\sigma^2) = -n\log\sqrt{2\pi} - n\log\sigma - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2 - \frac{n}{2\sigma^2}(\bar{x}-\mu)^2$$

<u>Metode Maksimum Likelihood</u>

1. Distribusi Ekponensial

p.d.f dari distribusi eksponensial dengan parameter λ adalah

$$f(x,\lambda) = \lambda e^{-\lambda x}$$

p.d.f. dari n observasi adalah :

$$f(x_i,\lambda) = \lambda e^{-\lambda x_i} \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

Fungsi likelihoood $l(x_1, x_2, \ldots, x_n ; \lambda)$ adalah

$$\begin{aligned} l(x_1,x_2,\ldots,x_n;\lambda) &= f(x_1,\lambda)f(x_2,\lambda)\ldots f(x_n,\lambda) \\ &= \prod_{i=1}^{n} f(x_i,\lambda) \\ &= \lambda^n\prod_{i=1}^{n} e^{-\lambda x_i} \\ &= \lambda^n e^{-\lambda\sum_{i=1}^{n}x_i} \end{aligned}$$

Logaritma dari fungsi likelihood adalah

$$L(x_1,x_2,\ldots,x_n;\lambda) = -n\log\lambda - \lambda\sum_{i=1}^{n}x_i$$

dan

$$\frac{\partial L(x_1,x_2,\ldots,x_n;\lambda)}{\partial\lambda} = -\frac{n}{\lambda}-\sum_{i=1}^{n}x_i = 0$$

Sehingga estimasi terbaik dari λ adalah $\dfrac{n}{\sum_{i=1}^{n}x_i}$ (1.2.9)

Hasil yang diperoleh sama dengan estimasi yang dihasilkan dengan metode momen

Contoh 5:

Sebuah sampel dengan 6 komponen elektronik dipilih untuk suatu uji reliabilitas dengan tujuan mengestimasi waktu kegagalan. Berikut ini adalah waktu kegagalan dari komponen tersebut: 25, 75, 150, 230, 430, dan 700. Berapakah rata-rata kegagalan? Estimasi parameter-parameter yang mendasari distribusi waktu kegagalan!

Jawab:

Rata-rata waktu kegagalan adalah 260 jam, sedangkan standar deviasi waktu kegagalan adalah 232. Karena nilai mean dan standar deviasi hampir sama, maka distribusi eksponensial dapat digunakan sebagai distribusi waktu kegagalan. Estimator untuk $\hat{\lambda}$ dengan menggunakan metode maksimum likelihood adalah:

$$\hat{\lambda} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n}x_i} = \frac{6}{1610} = 3{,}726 \text{ x } 10^{-3}$$

Sehingga dapat disimpulkan rata-rata waktu kegagalan adalah:

$$\frac{1}{\hat{\lambda}} = \frac{1}{3{,}726\times10^{-3}} = 268{,}384 \text{ jam}$$

2. Distribusi Rayleigh

P.d.f. dari distribusi Rayleigh adalah

$$f(x;\lambda) = \lambda x \exp\left(-\frac{\lambda x^2}{2}\right) \quad x>0$$

Fungsi likelihood dari n observasi adalah

$$\begin{aligned} l(x_1,x_2,\ldots,x_n;\lambda) &= f(x_1,\lambda)f(x_2,\lambda)\ldots.f(x_n,\lambda) \\ &= \prod_{i=1}^{n}\lambda x_i \exp\left(-\frac{\lambda x_1^2}{2}\right) \end{aligned}$$

Dengan mengambil $\prod_{i=1}^{n} x_i = X$, maka fungsi likelihood dapat ditulis kembali dengan:

$$l(x_1, x_2, \ldots, x_n; \lambda) \;=\; \lambda^n X \exp\left(-\frac{\lambda}{2}\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)$$

Logaritma dari fungsi di atas:

$$L(x_1, x_2, \ldots, x_n; \lambda) \;=\; n \log \lambda + \log X - \frac{\lambda}{2}\sum_{i=1}^{n} x_i^{\,2}$$

Dengan mengambil derivatif dari persamaan di atas terhadap λ dan disamakan dengan nol, maka

$$\frac{\partial L(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\partial \lambda} = \frac{n}{\lambda} - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 0$$

Atau

$$\hat{\lambda} = \frac{2n}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \qquad (1.2.10)$$

Contoh 6:

Berikut ini adalah waktu kegagalan yang diperoleh selama uji reliabilitas, yaitu: 15, 21, 30, 39, 52, dan 68. Diasumsikan data mengikuti distribusi Rayleigh. Turunkan parameter dari distribusi Rayleigh dan tentukan mean serta variansi waktu kegagalan!

Jawab:

Estimasi parameter dari distribusi Rayleigh adalah:

$$\hat{\lambda} = \frac{2 \times 6}{10.415} = 0{,}00115 \qquad \text{kegagalan per jam}$$

Mean dan standar deviasi dari waktu kegagalan adalah

$$\hat{\mu} = \sqrt{\frac{\pi}{2\hat{\lambda}}} = 36{,}92 \;\text{ jam}$$

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{2}{\hat{\lambda}}\left(1 - \frac{\pi}{4}\right)} = 19{,}3 \;\text{jam}$$

Elsayed, E.A., 1996, *Reliability Engineering*, Addison Wesley Longman, Inc, Reading, Massachusetts.

Walpole, R.E. dan Myers, R.H., 2004, *Probability and Statistics for Engineer and Scientist*, MacMillan Publishing Co. Inc., USA.

MATERI POKOK II

RELIABILITAS DAN FUNGSI HAZARD

Di Asih I Maruddani, S.Si., M.Si.

Triastuti Wuryandari, S.Si., M.Si.

DAFTAR ISI

MODUL 2 : RELIABILITAS DAN FUNGSI HAZARD

RELIABILITAS DAN FUNGSI HAZARD

1. Pengantar

Pada modul ini akan diberikan pengertian-pengertian yang mendasari teori reliabilitas serta fungsi-fungsi penting pada teori reliabilitas, yaitu fungsi densitas probabilitas ($f(t)$), fungsi distribusi kumulatif ($F(t)$), fungsi ketahanan ($R(t)$), serta fungsi kegagalan ($h(t)$). Selanjutnya akan diberikan bentuk-bentuk fungsi hazard untuk berbagai distribusi tahan hidup.

2. Tujuan Instruksional Umum

Dengan mempelajari buku ini, diharapkan mahasiswa dapat memahami berbagai bentuk fungsi-fungsi reliabilitas dan menggunakan uji reliabilitas dengan metode parametrik dan non parametrik.

3. Tujuan Instruksional Khusus

Setelah mempelajari modul ini, mahasiswa diharapkan dapat :

a. menjelaskan definisi dan pengertian reliabilitas
b. menjelaskan pengertian dan definisi data tahan hidup
c. menjelaskan berbagai macam fungsi tahan hidup
d. menjelaskan bentuk-bentuk fungsi hazard

4. Kegiatan Belajar

4.1 Kegiatan Belajar 1

DASAR-DASAR DAN FUNGSI-FUNGSI RELIABILITAS

4.1.1 Uraian dan Contoh

Reliabilitas adalah probabilitas suatu benda akan beroperasi tanpa adanya kegagalan untuk waktu yang ditentukan di bawah kondisi yang disyaratkan. Kegagalan tersebut dapat berupa tidak berfungsinya benda tersebut secara optimal atau mati.

Data tahan hidup merupakan interval waktu yang diamati dari suatu obyek saat pertama kali masuk ke dalam pengamatan sampai dengan obyek tersebut tidak berfungsi atau mati. Misalnya interval waktu yang mengukur kerusakan suatu produk, matinya suatu makhluk hidup, atau kambuhnya suatu penyakit. Waktu tahan hidup "T" merupakan variabel random non-negatif yang mewakili ketahanan hidup dari individu-individu dari suatu populasi. Variabel random "T" ini juga merupakan variabel random kontinu dalam selang $[0,\infty)$ atau ketahanan hidup pada waktu t dengan $t>0$. Waktu tahan hidup "T" ini akan membentuk suatu distribusi yang disebut dengan distribusi waktu hidup.

Distribusi waktu hidup terdiri dari tiga fungsi, yaitu :

1. Fungsi tahan hidup (reliabilitas)

   Fungsi ini dinotasikan dengan R(t), dan didefinisikan sebagai probabilitas suatu obyek bertahan hidup lebih dari waktu t, dengan t > 0, dirumuskan dengan :

$$\begin{aligned} R(t) &= P(\text{obyek hidup lebih dari waktu } t) \\ &= 1 - P(\text{obyek gagal sebelum waktu } t) \\ &= 1 - F(t) \\ &= \int_t^{\infty} f(x)dx \qquad (2.1.1) \end{aligned}$$

2. Fungsi densitas probabilitas

   Fungsi ini dinotasikan dengan $f(t)$, dan didefinisikan sebagai probabilitas suatu kegagalan suatu obyek pada suatu interval $(t, t + \Delta t)$ per satuan waktu. Fungsi densitas probabilitas dinyatakan dengan :

$$f(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \left[\frac{P(t < T < t + \Delta t)}{\Delta t} \right] \tag{2.1.2}$$

Misalkan T, T ≥ 0, adalah variabel random yang menyatakan waktu ketahanan, fungsi distribusi kumulatif kegagalan pada waktu t untuk suatu obyek yang dinyatakan dengan $F(t)$ adalah :

$$F(t) = P(\mathrm{T} \le t) = \int_0^t f(x)dx \tag{2.1.3}$$

3. Fungsi kegagalan (fungsi hazard)

   Fungsi ini dinotasikan dengan $h(t)$, dan didefinisikan sebagai probabilitas suatu obyek gagal di dalam interval waktu $(t, t + \Delta t)$ dengan diketahui bahwa obyek tersebut telah hidup selama waktu t. Fungsi kegagalan dinyatakan dengan :

$$h(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \left[\frac{P(t < T < t + \Delta t | T > t)}{\Delta t} \right] \tag{2.1.4}$$

Reliabilitas dapat juga digunakan sebagai ukuran kesuksesan suatu sistem yang berjalan dengan baik. Andaikan dipunyai sebanyak n_0 obyek akan diuji di bawah kondisi yang disyaratkan. Selama interval waktu $(t - \Delta t)$, diperoleh obyek yang gagal sebanyak $n_f(t)$ dan obyek yang bertahan hidup sebanyak $n_s(t)$, sehingga $n_f(t) + n_s(t) = n_0$.

Karena reliabilitas didefinisikan sebagai fungsi probabilitas kumulatif dari kesuksesan, maka pada waktu t, reliabilitas $R(t)$ adalah

$$R(t) = \frac{n_s(t)}{n_s(t) + n_f(t)} = \frac{n_s(t)}{n_0} \tag{2.1.5}$$

Jika T adalah variabel random dari waktu kegagalan, maka fungsi reliabilitas pada waktu t dapat ditulis sebagai berikut

$$R(t) = P(\mathrm{T} > t) \tag{2.1.6}$$

Fungsi distribusi kumulatif dari kegagalan $F(t)$ adalah kompelen dari $R(t)$, sehingga

$$R(t) + F(t) = 1 \tag{2.1.7}$$

Jika waktu kegagalan T mempunyai fungsi probabilitas densitas $f(t)$, maka persamaan (2.1.7) dapat ditulis menjadi

$$R(t) = 1 - F(t) = 1 - \int_0^t f(x)dx \tag{2.1.8}$$

Dengan mengambil derivatif terhadap t dari (2.1.8) diperoleh

$$\frac{dR(t)}{dt} = -f(t) \tag{2.1.9}$$

Sehingga probabilitas kegagalan suatu obyek pada interval $[t_1,t_2]$ adalah

$$\int_{t_1}^{t_2} f(t)dt = R(t_1) - R(t_2) \tag{2.1.10}$$

Didefinisikan rata-rata kegagalan pada interval $[t_1,t_2]$ sebagai probabilitas kegagalan per unit waktu terjadi pada interval dengan syarat tidak terjadi kegagalan sebelum t_1. Maka rata-rata kegagalan dapat dinyatakan sebagai

$$\frac{R(t_1) - R(t_2)}{(t_2 - t_1)R(t_1)} \tag{2.1.11}$$

Jika notasi t_1 diganti dengan t, dan t_2 diganti dengan $t + \Delta t$, maka persamaan (2.1.11) dapat ditulis kembali menjadi

$$\frac{R(t) - R(t + \Delta t)}{\Delta t R(t)} \tag{2.1.12}$$

Fungsi hazard didefinisikan sebagai limit rata-rata kegagalan pada saat Δt mendekati nol. Dengan kata lain fungsi hazard diperoleh dari persamaan (1.12)

$$\begin{aligned} h(t) &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{R(t) - R(t + \Delta t)}{\Delta t R(t)} = \frac{1}{R(t)}\left[-\frac{d}{dt}R(t)\right] \\ &= \frac{f(t)}{R(t)} \end{aligned} \tag{2.1.13}$$

Dari persamaan (1.9) dan (1.13) diperoleh

$$R(t) = e^{\left[-\int_0^t h(x)dx\right]} \tag{2.1.14}$$

$$R(t) = 1 - \int_0^t f(x)dx \tag{2.1.15}$$

Dan

$$h(t) = \frac{f(t)}{R(t)} \tag{2.1.16}$$

Sehingga disimpulkan, ketiga fungsi tahan hidup tersebut mempunyai hubungan matematik, sehingga jika salah satu fungsi diketahui, maka fungsi yang lain juga dapat diturunkan. Jika $f(t)$ diketahui, maka hubungan tersebut adalah sebagai berikut :

$$F(t) = \int_0^t f(x)dx \tag{2.1.17}$$

$$R(t) = 1 - F(t) \tag{2.1.18}$$

$$h(t) = \frac{f(t)}{1-F(t)} = \frac{f(t)}{R(t)} \qquad (2.1.19)$$

Contoh 1:

Jika distribusi waktu kegagalan adalah eksponensial dengan parameter λ, maka :

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$$

$$F(t) = \int_0^t f(x)dx = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x}dx$$

$$= 1 - e^{-\lambda t}$$

$$R(t) = 1 - F(t)$$

$$= 1 - (1 - e^{-\lambda t})$$

$$= e^{-\lambda t}$$

$$h(t) = \frac{f(t)}{R(t)}$$

$$= \frac{\lambda e^{-\lambda t}}{e^{-\lambda t}} = \lambda$$

Berdasarkan persamaan (2.1.17), (2.1.18), dan (2.1.19), maka dari persamaan (2.1.5) dapat diturunkan estimasi reliabilitas sebagai berikut :

$$\hat{f}(t) = \frac{n_f(t)}{n_0 \Delta t} \qquad (2.1.20)$$

$$\hat{F}(t) = 1 - \hat{R}(t) = 1 - \frac{n_s(t)}{n_0} = \frac{n_0 - n_s(t)}{n_0} \qquad (2.1.21)$$

$$\hat{R}(t) = \frac{\hat{f}(t)}{\hat{h}(t)} = \frac{\frac{n_f(t)}{n_0 \Delta t}}{\frac{n_f(t)}{n_s(t)\Delta t}} = \frac{n_s(t)}{n_0} \qquad (2.1.22)$$

$$\hat{h}(t) = \frac{n_f(t)}{n_s(t)\Delta t} \qquad (2.1.23)$$

dengan :

n_0 = banyaknya obyek yang dites

$n_s(t)$ = banyakya obyek yang hidup pada waktu t

$n_f(t)$ = banyaknya obyek yang gagal/mati pada waktu t

Δt = lebar interval waktu

$\hat{f}(t)$ = estimasi fungsi densitas pada waktu t

$\hat{h}(t)$ = estimasi fungsi hazard pada waktu t

$\hat{R}(t)$ = estimasi fungsi tahan hidup (reliabilitas) pada waktu t

$\hat{F}(t)$ = estimasi fungsi kumulatif pada waktu t

Contoh 2:

Suatu pabrik bola lampu akan melakukan estimasi rata-rata waktu hidup lampu produksinya. 200 lampu diuji reliabilitasnya. Data ditampilkan pada tabel 2.1, perhitungan untuk $\hat{f}(t)$, $\hat{h}(t)$, $\hat{F}(t)$, dan $\hat{R}(t)$ ditampilkan dalam tabel 2.2.

Tabel 2.1

Data Jumlah Kegagalan

Interval waktu (jam)	Jumlah kegagalan
0 – 1000	100
1001 – 2000	40
2001 – 3000	20
3001 – 4000	15
4001 – 5000	10
5001 – 6000	8
6001 – 7000	7
Total	**200**

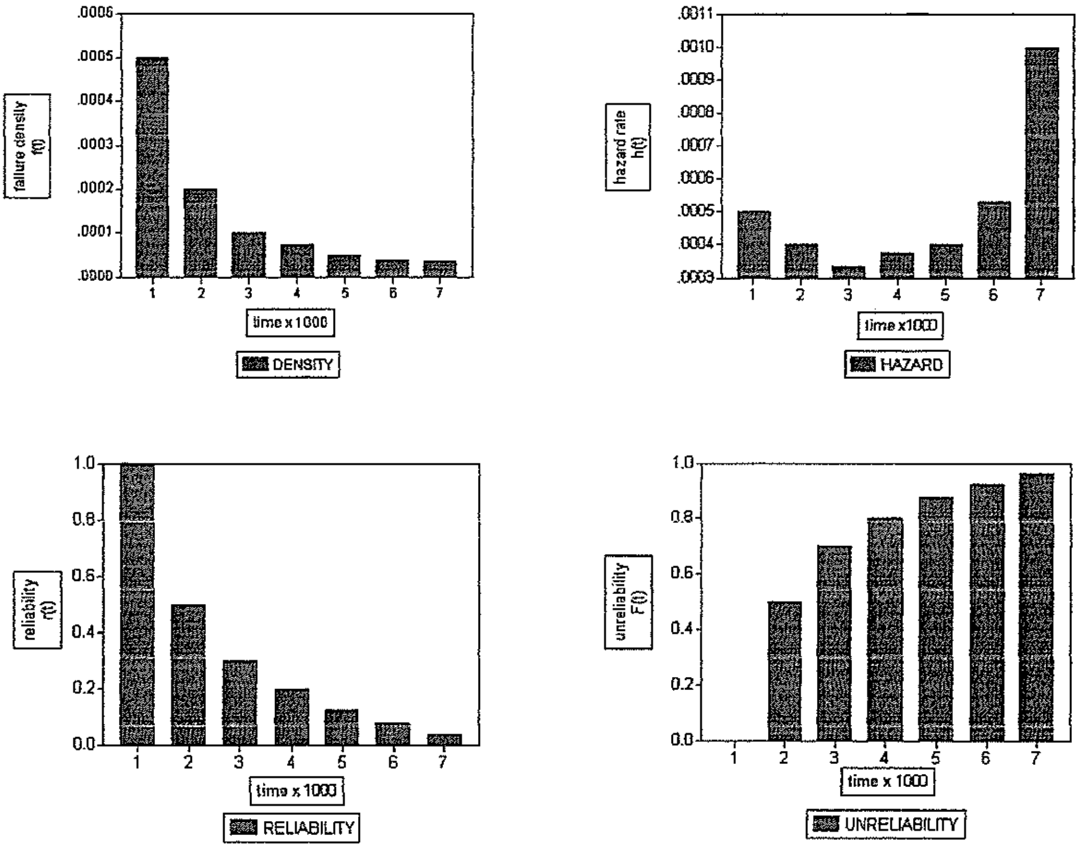
Tabel 2.2

Perhitungan untuk $\hat{f}(t), \hat{R}(t), \hat{F}(t)$, dan $\hat{h}(t)$

Time interval (hours)	Failure density $\hat{f}(t)$	Reliability $\hat{R}(t)$	Unreliability $\hat{F}(t)$	Hazard Rate $\hat{h}(t)$
0 – 1000	$\frac{100}{200\times1000}=5\times10^{-4}$	$\frac{200}{200}=1$	$1-\frac{200}{200}=0$	$\frac{100}{200\times1000}=5\times10^{-4}$
1001 – 2000	$\frac{40}{200\times1000}=2\times10^{-4}$	$\frac{100}{200}=0.5$	$1-\frac{100}{200}=0.5$	$\frac{40}{100\times1000}=4\times10^{-4}$
2001 – 3000	$\frac{20}{200\times1000}=1\times10^{-4}$	$\frac{60}{200}=0.3$	$1-\frac{60}{200}=0.7$	$\frac{20}{60\times1000}=3.33\times10^{-4}$
3001 – 4000	$\frac{15}{200\times1000}=0.75\times10^{-4}$	$\frac{40}{200}=0.2$	$1-\frac{40}{200}=0.8$	$\frac{15}{40\times1000}=3.75\times10^{-4}$

4001 – 5000	$\frac{10}{200\times1000}=0.5\times10^{-4}$	$\frac{25}{200}=0.125$	$1-\frac{25}{200}=0.875$	$\frac{10}{25\times1000}=4\times10^{-4}$
5001 – 6000	$\frac{8}{200\times1000}=0.4\times10^{-4}$	$\frac{15}{200}=0.075$	$1-\frac{15}{200}=0.925$	$\frac{8}{15\times1000}=5.3\times10^{-4}$
6001 – 7000	$\frac{7}{200\times1000}=0.35\times10^{-4}$	$\frac{7}{200}=0.035$	$1-\frac{7}{200}=0.965$	$\frac{7}{7\times1000}=10\times10^{-4}$

Plot masing-masing fungsi reliabilitas ditampilkan pada gambar 2.1.



Gambar 2.1

Plot fungsi $\hat{f}(t), \hat{R}(t), \hat{F}(t)$, dan $\hat{h}(t)$

4.1.2 Latihan 1

Soal Bagian A

Reliabilitas dari sebuah *disk drive* dapat diprediksi dari peningkatan lamanya operasional mesin di lapangan atau di laboratorium sebagai bagian dari proses desain awal. Waktu kegagalan *disk drive* diberikan pada tabel 2.4.

Tabel 2.4
Data Kegagalan *disk drive*

Lama beroperasi (10^5 jam)	Jumlah *disk* gagal
0 – 10.0	0
10.1 – 14.0	10
14.1 – 18.0	15
18.1 – 22.0	18
22.1 – 26.00	20
26.1 – 30.00	16
30.1 – 34.0	22
34.1 – 38.0	20

1. Estimasikan nilai-nilai $\hat{f}(t), \hat{R}(t), \hat{F}(t)$, dan $\hat{h}(t)$
2. Buatlah plot fungsi $\hat{f}(t), \hat{R}(t), \hat{F}(t)$, dan $\hat{h}(t)$

4.1.3 <u>Rangkuman</u>

Fungsi-fungsi tahan hidup mempunyai hubungan matematik. Jika $f(t)$ diketahui, maka

$$F(t) = \int_0^t f(x)dx$$

$$R(t) = 1 - F(t)$$

$$h(t) = \frac{f(t)}{1-F(t)} = \frac{f(t)}{R(t)}$$

Estimasi reliabilitas juga dapat diturunkan dengan rumus sebagai berikut:

$$\hat{f}(t) = \frac{n_f(t)}{n_0 \Delta t}$$

$$\hat{F}(t) = 1 - \hat{R}(t) = 1 - \frac{n_s(t)}{n_0} = \frac{n_0 - n_s(t)}{n_0}$$

$$\hat{R}(t) = \frac{\hat{f}(t)}{\hat{h}(t)} = \frac{\dfrac{n_f(t)}{n_0 \Delta t}}{\dfrac{n_f(t)}{n_s(t)\Delta t}} = \frac{n_s(t)}{n_0}$$

$$\hat{h}(t) = \frac{n_f(t)}{n_s(t)\Delta t}$$

dengan :

n_0 = banyaknya obyek yang dites

$n_s(t)$ = banyakya obyek yang hidup pada waktu t

$n_f(t)$ = banyaknya obyek yang gagal/mati pada waktu t

Δt = lebar interval waktu

4.1.4 Tes Formatif 1

Soal Bagian A

Jika distribusi waktu kegagalan adalah dengan parameter γ>0 dan θ>0 dan fungsi densitas probabilitas (p.d.f) distribusi Weibull berbentuk:

$$f(t;\theta,\gamma) = \frac{\gamma}{\theta} t^{\gamma-1} \exp-\left(\frac{t^\gamma}{\theta}\right) \qquad t > 0$$

1. Fungsi Densitas Kumulatif, F(t) dari distribusi Weibull adalah :

   a. $\exp-\left(\frac{t^\gamma}{\theta}\right)$
   b. $1-\exp-\left(\frac{t^\gamma}{\theta}\right)$
   c. $\frac{\gamma}{\theta}\exp-\left(\frac{t^\gamma}{\theta}\right)$
   d. $\frac{\gamma}{\theta}-\exp-\left(\frac{t^\gamma}{\theta}\right)$

2. Fungsi reliabilitas, R(t), dari distribusi Weibull adalah :

   a. $\exp-\left(\frac{t^\gamma}{\theta}\right)$
   b. $1-\exp-\left(\frac{t^\gamma}{\theta}\right)$
   c. $\frac{\gamma}{\theta}\exp-\left(\frac{t^\gamma}{\theta}\right)$
   d. $\frac{\gamma}{\theta}-\exp-\left(\frac{t^\gamma}{\theta}\right)$

3. Fungsi hazard, h(t), dari distribusi Weibull adalah :

   a. $\frac{\gamma^t}{\theta}t^{\gamma-1}$
   b. $\gamma\theta t^{\gamma-1}$
   c. $\frac{t^\gamma}{\theta}t^{\gamma-1}$
   d. $\frac{\gamma}{\theta}t^{\gamma-1}$

Soal Bagian B

Suatu perusahaan yang memproduksi mesin fax melakukan uji reliabilitas untuk mengestimasi rata-rata waktu hidup dari komponen *reading head* dengan melakukan uji terhadap 180 *head*. Waktu dimana kualitas dari dokumen yang diterima tidak terbaca, diberikan pada tabel 2.3

Tabel 2.3
Data Kegagalan dari Mesin Fax

Interval waktu (jam)	0 – 150	151 – 300	301 – 450	451 – 600	601 – 750	751 – 900
Jumlah Kegagalan	20	28	27	32	33	40

4. Nilai fungsi densitas pada interval waktu 451 – 600 adalah:
   a. 0.0010370 b. 0.0011852
   c. 0.0010000 d. 0.0012222
5. Nilai fungsi densitas kumulatif pada interval waktu 451 – 600 adalah:
   a. 0.9989630 b. 0.9988148
   c. 0.9990000 d. 0.9987778
6. Nilai fungsi reliabilitas pada interval waktu 451 – 600 adalah:
   a. 0.583 b. 0.406
   c. 0.733 d. 0.222
7. Nilai fungsi hazard pada interval waktu 451 – 600 adalah:
   a. 11.666 b. 13.636
   c. 66.667 d. 20.317

4.1.5 Umpan Balik dan Tindak Lanjut

Cocokkanlah hasil jawaban Anda dengan Kunci Jawaban Tes Formatif 1 yang ada di bagian belakang modul ini. Kemudian hitunglah jumlah jawaban Anda yang benar dan gunakanlah rumus di bawah ini untuk mengetahui tingkat penguasaan Anda terhadap materi Kegiatan Belajar 1.

Rumus:

$$\text{Tingkat penguasaan} = \frac{\text{Jumlah Jawaban Anda yang Benar}}{10} \times 100\%$$

Arti tingkat penguasaan yang Anda capai:

90% – 100% = baik sekali
80% – 89% = baik
70% – 79% = cukup
– 69% = kurang

Jika tingkat penguasaan Anda mencapai 80% ke atas, Anda dapat melanjutkan dengan modul selanjutnya. **Bagus!**. Tetapi bila tingkat penguasaan Anda masih di bawah 80%, Anda harus mengulangi Kegiatan Belajar 1, terutama bagian yang belum Anda kuasai.

4.2 Kegiatan Belajar 2

FUNGSI HAZARD

4.2.1 Uraian dan Contoh

Fungsi hazard atau *hazard rate*, $h(t)$, adalah probabilitas bersyarat kegagalan pada interval waktu $(t, t + \Delta t)$ dengan diketahui tidak ada kegagalan pada waktu t. Fungsi kegagalan dinyatakan dengan

$$h(t) = \frac{f(t)}{R(t)} \qquad (2.2.1)$$

Fungsi Kumulatif Hazard, $H(t)$ adalah probabilitas bersyarat kegagalan pada interval waktu $(0,t)$.

$$H(t) = \int_0^t h(x)dx \qquad (2.2.2)$$

Hazard Konstan

Beberapa komponen elektronik, seperti transistor, resistor, IC, dan kapasitor, memperlihatkan kegagalan bersifat konstan sepanjang waktu hidup. Fungsi hazard konstan dinyatakan dengan

$$h(t) = \lambda \qquad (2.2.3)$$

dengan λ adalah sebarang konstanta.

Berdasarkan persamaan (2.2.1), fungsi densitas probabilitas, $f(t)$, adalah:

$$f(t) = h(t)\exp\left[-\int_0^t h(x)dx\right] \qquad (2.2.4)$$

atau

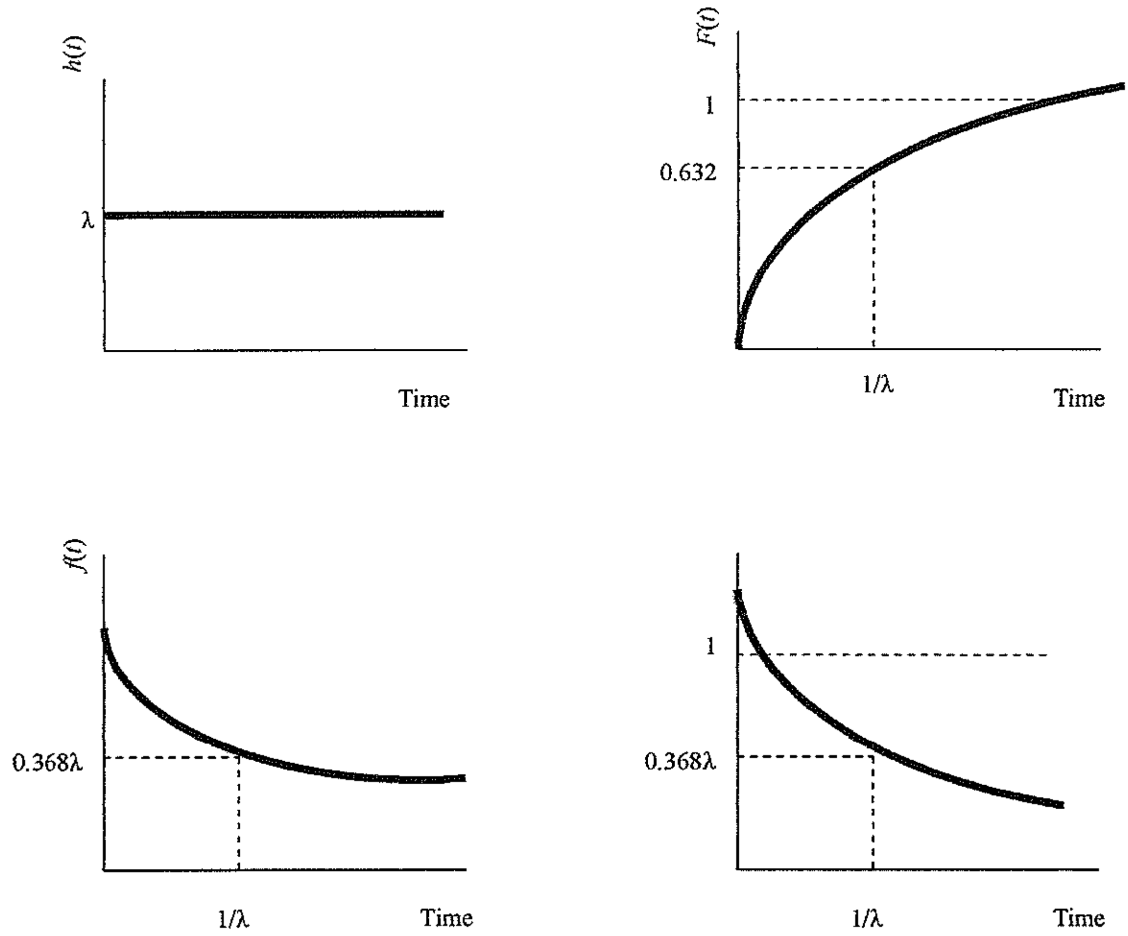
$$f(t) = \lambda\exp-(\lambda t) \qquad (2.2.5)$$

sehingga diperoleh:

$$F(t) = \int_0^t \lambda\exp-(\lambda x)dx = 1-\exp-(\lambda t) \qquad (2.2.6)$$

$$R(t) = 1-F(t) = \exp-(\lambda t) \qquad (2.2.7)$$

Plot dari $f(t)$, $F(t)$, $R(t)$, dan $h(t)$ diberikan pada gambar 2.2.



Gambar 2.2

Plot fungsi $f(t)$, $F(t)$, $R(t)$, dan $h(t)$ dari fungsi hazard konstan

Pada saat $t = 1/\lambda$, $f(1/\lambda) = \lambda/e$, $F(1/\lambda) = 1 - 1/e = 0.632$, dan $R(1/\lambda) = 1/e = 0.368$. Berdasarkan hasil di atas, maka dapat dinyatakan bahwa probabilitas kegagalan suatu produk dengan estimasi rata-rata waktu kegagalan $(1/\lambda)$ adalah 0.632. Disimpulkan juga bahwa waktu kegagalan untuk model hazard konstan berdistribusi eksponensial.

Contoh 3:

Sebuah perusahaan melakukan *Operational Life Test* (OLT) pada kapasitor keramik dan diperoleh bahwa rata-rata kegagalan terlihat konstan dengan nilai $3\text{x}10^{-8}$ kegagalan per jam. Berapakah reliabilitas dari sebuah kapasitor setelah satu tahun (10^4 jam)? Uji dilakukan selama 5000 jam pada 2000 sampel kapasitor. Berapakah kapasitor yang diharapkan akan gagal selama uji berlangsung?

Jawab

Dipunyai data

$$h(t) = 3 \times 10^{-8} \text{ kegagalan per jam}$$

Sehingga

$$R(t) = \exp-(\lambda t) = \exp-(3 \times 10^{-8})\, t$$

$$R(10^4) = \exp-(3 \times 10^{-8})(10^4) = 0.99970$$

Untuk menentukan jumlah kegagalan kapasitor yang diharapkan selama uji berlangsung, dari persamaan (2.1.22) pada kegiatan belajar 1, diperoleh:

$$\hat{R}(t) = \frac{n_s(t)}{n_0} \qquad \text{atau} \qquad n_s(t) = \hat{R}(t) \times n_0$$

$$n_s = [\exp-(3 \times 10^{-8})(5000)] \times 2000 = 1999$$

$$n_f = 2000 - 1999 = 1$$

dengan

n_0 = jumlah kapasitor yang diuji

n_s = jumlah kapasitor yang diharapkan tetap hidup setelah uji berakhir

n_f = jumlah kapasitor yang diharapkan gagal selama uji berlangsung

Hazard Naik Linier

Fungsi hazard naik linier dinyatakan dengan

$$h(t) = \lambda t \tag{2.2.8}$$

dengan λ adalah sebarang konstanta.

Fungsi densitas probabilitas, $f(t)$, dari fungsi hazard naik linier akan berdistribusi Rayleigh, yaitu:

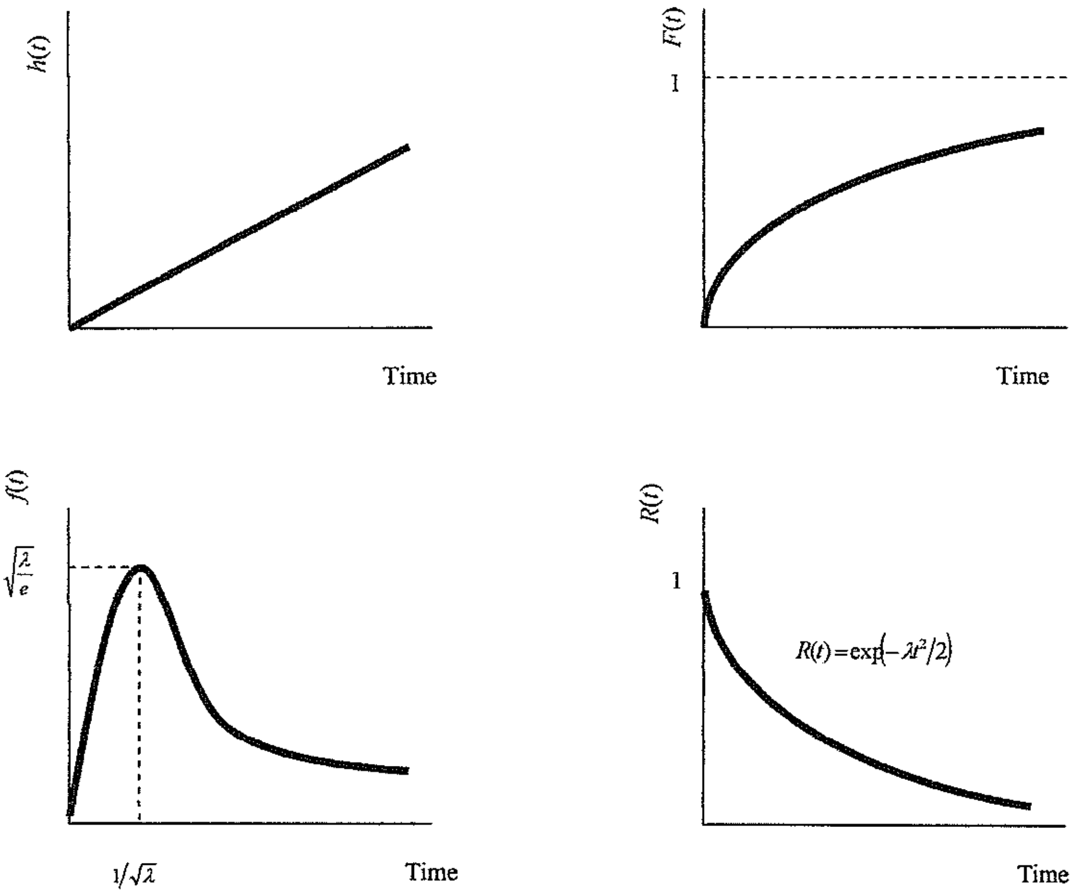
$$f(t) = \lambda t \exp\left(-\frac{\lambda t^2}{2}\right) \tag{2.2.9}$$

sehingga diperoleh:

$$F(t) = 1 - \exp\left(-\frac{\lambda t^2}{2}\right) \tag{2.2.10}$$

$$R(t) = \exp\left(-\frac{\lambda t^2}{2}\right) \tag{2.2.11}$$

Plot dari $f(t)$, $F(t)$, $R(t)$, dan $h(t)$ diberikan pada gambar 2.3.



Gambar 2.2

Plot fungsi $f(t)$, $F(t)$, $R(t)$, dan $h(t)$ dari fungsi hazard naik linier

Hazard Turun Linier

Fungsi hazard turun linier dinyatakan dengan

$$h(t) = a - bt \tag{2.2.12}$$

dengan $a \geq bt$, dan a dan b adalah sebarang konstanta.

Penurunan fungsi $f(t)$, $F(t)$, dan $R(t)$ dapat diperoleh dengan cara yang sama. Model kegagalan serta reliabilitas dari komponen yang mempunyai fungsi hazard turun linier tergantung dari nilai a dan b.

Model Weibull

Bentuk fungsi hazard yang tidak linier (*nonlinear*) digunakan jika grafiknya tidak menunjukkan secara jelas sifat linier. Model nonlinier (naik maupun turun) dapat dinyatakan dalam bentuk berikut ini:

$$h(t) = \frac{\gamma}{\theta} t^{\gamma-1} \tag{2.2.13}$$

Model ini mengacu pada distribusi Weibull, dengan fungsi densitas probabilitas, $f(t)$, adalah:

$$f(t) = \frac{\gamma}{\theta} t^{\gamma-1} \exp-\left(\frac{t^{\gamma}}{\theta}\right) \quad t > 0 \tag{2.2.14}$$

$$F(t) = 1 - \exp\left(-\frac{t^{\gamma}}{\theta}\right) \tag{2.2.15}$$

$$R(t) = \exp\left(-\frac{t^{\gamma}}{\theta}\right) \tag{2.2.16}$$

Dari fungsi hazard, $h(t)$, terlihat bahwa jika $\gamma > 1$, *hazard rate* merupakan fungsi naik monoton tanpa batas atas. Jika $\gamma = 1$, *hazard rate* akan konstan, dan jika $\gamma < 1$, fungsi *hazard rate* akan turun dengan bertambahnya waktu.

Model Eksponensial

Model ini berguna pada kasus dimana fungsi hazard terlihat konstan pada awal waktu dan akan naik secara cepat dengan bertambahnya waktu. Distribusi ini juga dapat menggambarkan waktu kegagalan dari suatu produk atau komponen yang beroperasi pada kondisi normal, tetapi terjadi penyebab khusus seperti kerusakan mesin yang ekstrim.

Fungsi hazard, fungsi densitas probabilitas, dan fungsi reliabilitas dari model eksponensial adalah sebagai berikut:

$$h(t) = b \exp(\alpha t) \tag{2.2.17}$$

$$f(t) = b \exp(\alpha t) \exp\left(-\frac{b}{\alpha}(\exp(\alpha t) - 1)\right) \tag{2.2.18}$$

$$R(t) = \exp\left(-\frac{b}{\alpha}(\exp(\alpha t) - 1)\right) \tag{2.2.19}$$

Dengan b sebarang konstanta dan $\exp(\alpha)$ menggambarkan kenaikan rata-rata kegagalan per unit waktu.

Fungsi $f(t)$ pada persamaan (2.2.18) juga dikenal dengan nama distribusi *Gompertz.*

Bentuk fungsi hazard yang tidak linier (*nonlinear*) digunakan jika grafiknya tidak menunjukkan secara jelas sifat linier. Model nonlinier (naik maupun turun) dapat dinyatakan dalam bentuk berikut ini:

$$h(t) = \frac{\gamma}{\theta} t^{\gamma-1} \tag{2.2.13}$$

Model ini mengacu pada distribusi Weibull, dengan fungsi densitas probabilitas, $f(t)$, adalah:

$$f(t) = \frac{\gamma}{\theta} t^{\gamma-1} \exp-\left(\frac{t^{\gamma}}{\theta}\right) \qquad t > 0 \tag{2.2.14}$$

$$F(t) = 1 - \exp\left(-\frac{t^{\gamma}}{\theta}\right) \tag{2.2.15}$$

$$R(t) = \exp\left(-\frac{t^{\gamma}}{\theta}\right) \tag{2.2.16}$$

Dari fungsi hazard, $h(t)$, terlihat bahwa jika $\gamma > 1$, *hazard rate* merupakan fungsi naik monoton tanpa batas atas. Jika $\gamma = 1$, *hazard rate* akan konstan, dan jika $\gamma < 1$, fungsi *hazard rate* akan turun dengan bertambahnya waktu.

Model Eksponensial

Model ini berguna pada kasus dimana fungsi hazard terlihat konstan pada awal waktu dan akan naik secara cepat dengan bertambahnya waktu. Distribusi ini juga dapat menggambarkan waktu kegagalan dari suatu produk atau komponen yang beroperasi pada kondisi normal, tetapi terjadi penyebab khusus seperti kerusakan mesin yang ekstrim.

Fungsi hazard, fungsi densitas probabilitas, dan fungsi reliabilitas dari model eksponensial adalah sebagai berikut:

$$h(t) = b \exp(\alpha t) \tag{2.2.17}$$

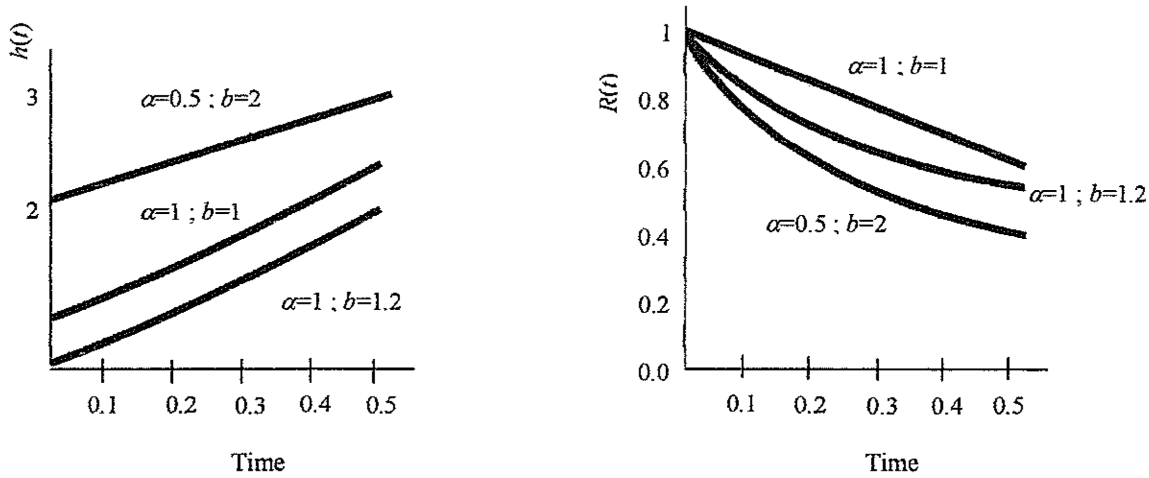
$$f(t) = b \exp(\alpha t) \exp\left(-\frac{b}{\alpha}(\exp(\alpha t) - 1)\right) \tag{2.2.18}$$

$$R(t) = \exp\left(-\frac{b}{\alpha}(\exp(\alpha t) - 1)\right) \tag{2.2.19}$$

Dengan b sebarang konstanta dan $\exp(\alpha)$ menggambarkan kenaikan rata-rata kegagalan per unit waktu.

Fungsi $f(t)$ pada persamaan (2.2.18) juga dikenal dengan nama distribusi *Gompertz*.

Plot dari $h(t)$ dan $R(t)$ terlihat pada gambar 2.4.



Gambar 2.3

Plot fungsi $R(t)$, dan $h(t)$ dari model eksponensial

4.2.3 Rangkuman

Karakteristik dari fungsi hazard

Fungsi Hazard	$h(t)$	$f(t)$	$R(t)$	**parameter**
Konstan	λ	$\lambda \exp-(\lambda t)$	$\exp-(\lambda t)$	λ
Linier naik	λt	$\lambda t\ \exp\left(-\frac{\lambda t^2}{2}\right)$	$\exp\left(-\frac{\lambda t^2}{2}\right)$	λ
Weibull	$\frac{\gamma}{\theta} t^{\gamma-1}$	$\frac{\gamma}{\theta} t^{\gamma-1} \exp-\left(\frac{t^\gamma}{\theta}\right)$	$\exp\left(-\frac{t^\gamma}{\theta}\right)$	γ dan θ
Eksponensial	$b\ \exp(\alpha t)$	$b\ \exp(\alpha t)\ \exp\left(-\frac{b}{\alpha}(\exp(\alpha t)-1)\right)$	$\exp\left(-\frac{b}{\alpha}(\exp(\alpha t)-1)\right)$	α dan b

4.2.4 Tes Formatif 2

Misalkan suatu mesin mempunyai fungsi hazard dalam bentuk:

$$h(t) = \frac{\frac{1}{\theta}\left(\frac{t}{\theta}\right)^{n-1}}{(n-1)!\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(t/\theta)^k}{k!}} \qquad \text{dengan n} = 3 \text{ dan } \theta = 290 \text{ jam.}$$

1. Fungsi reliabilitas $R(t)$ adalah

a. $R(t) = \left(-\frac{t}{290}\right)\exp\left(\sum_{k=0}^{2}\frac{(t/290)^k}{k!}\right)$

b. $R(t) = \exp\left(-\frac{t}{290}\right)\sum_{k=0}^{2}\frac{(t/290)^k}{k!}$

c. $R(t) = \left(-\frac{t}{290}\right)\sum_{k=0}^{2}\frac{\exp(t/290)^k}{k!}$

d. $R(t) = \left(-\frac{\exp(t)}{290}\right)\sum_{k=0}^{2}\frac{(t/290)^k}{k!}$

2. Fungsi reliabilitas pada saat $t = 100$ adalah

a. 0.8765

b. 0.8967

c. 0.9945

d. 0.9982

3. Nilai harapan waktu hidup adalah

a. 870 jam

b. 689 jam

c. 925 jam

d. 768 jam

4.2.5 Umpan Balik dan Tindak Lanjut

Cocokkanlah hasil jawaban Anda dengan Kunci Jawaban Tes Formatif 2 yang ada di bagian belakang modul ini. Kemudian hitunglah jumlah jawaban Anda yang benar dan gunakanlah rumus di bawah ini untuk mengetahui tingkat penguasaan Anda terhadap materi Kegiatan Belajar 2.

Rumus:

$$\text{Tingkat penguasaan} = \frac{\text{Jumlah Jawaban Anda yang Benar}}{10} \times 100\%$$

Arti tingkat penguasaan yang Anda capai:

90% – 100%	=	baik sekali
80% – 89%	=	baik
70% – 79%	=	cukup
– 69%	=	kurang

Jika tingkat penguasaan Anda mencapai 80% ke atas, Anda dapat melanjutkan dengan modul selanjutnya. **Bagus!**. Tetapi bila tingkat penguasaan Anda masih di bawah 80%, Anda harus mengulangi Kegiatan Belajar 2, terutama bagian yang belum Anda kuasai.

5. Kunci Jawaban Tes Formatif

5.1 Kunci Jawaban Tes Formatif 1

1. b
2. a
3. d
4. b
5. b
6. a
7. d

5.2 Kunci Jawaban Tes Formatif 2

1. b
2. c
3. a

6. Referensi

Elsayed, E.A., 1996, *Reliability Engineering*, Addison Wesley Longman, Inc, Reading, Massachusetts.

Mann, N.R., Schafer, R.E., dan Singpurwala, N.D., 1974, *Methods for Statistical Analysis of Reliability and Life Data*, John Wiley & Sons, New York.

MATERI POKOK III

UKURAN SISTEM RELIABILITAS

Di Asih I Maruddani, S.Si., M.Si.
Triastuti Wuryandari, S.Si., M.Si.

DAFTAR ISI

MODUL 1 : UKURAN SISTEM RELIABILITAS

UKURAN SISTEM RELIABILITAS

1. Pengantar

Nilai reliabilitas (ketahanan) suatu obyek tidak hanya tergantung terhadap waktu, karena reliabilitas suatu obyek bisa diasumsikan konstan dan distribusi waktu kegagalannya tidak bersesuaian dengan estimasi pada sistem reliabilitas. Pada modul ini akan diberikan beberapa ukuran dari suatu sistem reliabilitas, yaitu Mean Time To Failure (MTTF) dan Mean Residual Life (MRL). Dalam hal ini akan diperlihatkan ukuran sistem reliabilitas untuk sistem yang dapat diperbaiki(*repairable system*) maupun sistem yang tidak dapat diperbaiki (*non repairable system*).

2. Tujuan Instruksional Umum

Dengan mempelajari buku ini, diharapkan mahasiswa dapat memahami berbagai bentuk fungsi-fungsi reliabilitas dan menggunakan uji reliabilitas dengan metode parametrik dan non parametrik.

3. Tujuan Instruksional Khusus

Setelah mempelajari modul ini, mahasiswa diharapkan dapat :

a. Menghitung nilai MTTF suatu sistem
b. Menghitung nilai MRL suatu sistem

4. Kegiatan Belajar

4.1 Kegiatan Belajar 1

MEAN TIME TO FAILURE (MTTF)

4.1.1 Uraian dan Contoh

Salah satu ukuran dari sistem reliabilitas adalah Mean Time To Failure (MTTF) atau Waktu Rata-rata Kegagalan. MTTF adalah ekspektasi waktu antara dua kegagalan ketika sistem tidak bisa diperbaiki (*nonrepairable*). Ukuran lain dari sistem reliabilitas adalah Mean Time Between Failure (MTBF). MTBF adalah ekspektasi waktu antara dua kegagalan ketika sistem dapat diperbaiki (*repairable*).

Misalkan n adalah jumlah sistem yang tidak dapat diperbaiki yang identik. Waktu kegagalan yang diobservasi adalah $t_1, t_2, \ldots, t_n$. Maka estimasi dari MTTF atau $\hat{T}F$,

yaitu:

$$MT\hat{T}F = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} t_i \qquad (3.1.1)$$

Karena t_i adalah variabel random, maka nilai ekspektasi dapat diturunkan dengan

$$MT\hat{T}F = \int_{t=0}^{\infty} tf(t)dt \qquad (3.1.2)$$

Karena $R(t) = 1 - F(t)$ dan $f(t) = \frac{dF(t)}{dt} = -\frac{dR(t)}{dt}$, maka

$$\text{MTTF} = -\int_{t=0}^{\infty} t \, \frac{dR(t)}{dt} dt \qquad (3.1.2)$$

$$= -\int_{t=0}^{\infty} t \, dR(t)$$

$$= tR(t)\Big|_0^{\infty} + \int_{t=0}^{\infty} R(t)dt \qquad (3.1.3)$$

Karena $R(\infty) = 0$ dan $R(0) = 1$, maka

$$\text{MTTF} = \int_{t=0}^{\infty} R(t) \, dt \qquad (3.1.4)$$

MTTF dari model hazard konstan adalah

$$\text{MTTF} = \int_{t=0}^{\infty} \exp(-\lambda t)\, dt = \frac{1}{\lambda} \qquad (3.1.5)$$

MTTF dari model hazard naik linier adalah

$$\text{MTTF} = \int_{t=0}^{\infty} \exp\left(\frac{-\lambda t^2}{2}\right) dt = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{2\sqrt{\frac{\lambda}{2}}} = \sqrt{\frac{\pi}{2\lambda}} \qquad (3.1.6)$$

MTTF dari model Weibull adalah

$$\text{MTTF} = \int_{t=0}^{\infty} \exp\left(-\frac{t^\gamma}{\theta}\right) dt$$

Dengan mengambil $x = \frac{t^\gamma}{\theta}$ maka persamaan di atas menjadi

$$\begin{aligned}
\text{MTTF} &= \frac{\theta}{\gamma}\int_{0}^{\infty} \exp(-x)\left(\frac{1}{\theta^{1-1/\gamma}}\right) x^{1/\gamma - 1} dx \\
&= \frac{\theta^{1/\gamma}}{\gamma}\int_{0}^{\infty} \exp(-x) x^{1/\gamma - 1} dx \\
&= \theta^{1/\gamma}\frac{1}{\gamma}\Gamma\left(\frac{1}{\gamma}\right) \\
&= \theta^{1/\gamma}\Gamma\left(1+\frac{1}{\gamma}\right) \qquad (3.1.7)
\end{aligned}$$

Contoh 1:

MTTF dari pengontrol robot akan dioperasikan pada tegangan berbeda yang didefinisikan untuk garansi 20000 jam. Fungsi hazard dari pengontrol tipe ini diprediksi sesuai dengan model Weibull dengan $\theta = 100$ dan $\gamma = 1{,}5$. Apakah pengontrol ini memenuhi spesifikasi garansi? Jika tidak, berapakah waktu hidup karakteristik bisa memenuhi spesifikasi (ukuran dalam 10^3 jam)?

Jawab

Untuk model Weibull dengan $\theta = 100$ dan $\gamma = 1{,}5$ diperoleh MTTF

$$\text{MTTF} = 100^{1/1,5}\Gamma\left(1+\frac{1}{1{,}5}\right) = 19{,}383$$

Sehingga MTTF = 19,383 x 10^3 jam = 19.383 jam. Karena 19.383 jam lebih kecil dari spesifikasi garansi = 20.000 jam, maka pengontrol robot tersebut tidak memenuhi spesifikasi.

Karakteristik waktu hidup yang memenuhi spesifikasi adalah

$$20.000 = \theta^{1/1,5}\Gamma\left(1+\frac{1}{1,5}\right) = \theta^{1/1,5}\Gamma(1,666)$$

Sehingga θ seharusnya bernilai 104,46

4.1.2 Latihan 1

1. Waktu kegagalan dari suatu alat elektronik digambarkan sebagai distribusi Pearson type V. Fungsi Densitas waktu kegagalannya adalah :

$$f(t) = \begin{cases} \dfrac{t^{-(\alpha+1)\exp\left(-\beta/t\right)}}{\beta^{-6}\Gamma(\alpha)} & \textit{jika } t > 0 \\ \\ 0 & \textit{untuk } t \textit{ lainnya} \end{cases}$$

   Parameter α = 3 dan β = 4.000 jam. Tentukan nilai MTTF untuk alat elektronik tersebut.

2. Dengan mengasumsikan

$$h(t) = \frac{1}{25} t^{-1/4}$$

   Tentukan :

   a. $f(t)$, $F(t)$, $R(t)$, dan MTTF
   b. Jika 200 unit ditempatkan pada operasi pada waktu yang sama, berapakah jumlah kegagalan yang diperkirakan selama satu tahun masa operasi?

4.1.3 Rangkuman

Mean Time To Failure (MTTF) adalah ekspektasi waktu di antara dua kegagalan yang terjadi pada suatu sistem yang tidak dapat diperbaiki. Sedangkan pada sistem yang bisa diperbaiki, disebut dengan Mean Time Between Failure (MTBF).

Pada n sistem yang tidak dapat diperbaiki yang identik dan data waktu sampai dengan gagal adalah $t_1, t_2, \ldots, t_n$, maka nilai estimasi dari MTTF adalah :

$$\text{MTTF} = \int_{t=0}^{\infty} R(t)\ dt$$

Karena t_i adalah variabel random, maka nilai ekspektasinya dapat diturunkan menjadi

$$\text{MTTF} = \int_{t=0}^{\infty} R(t)\ dt$$

4.1.4 Tes Formatif 1

Soal Bagian A

Jika rata-rata kegagalan dari suatu sistem hidrolik adalah:

$$h(t) = 0{,}003\left(1 + 2{,}5\ e^{-3t} + e^{-t/50}\right) \qquad \text{kegagalan per tahun}$$

1. Reliabilitas pada saat $t = 10^5$ jam adalah :
   - a. 0.47904
   - b. 0.87646
   - c. 0.53699
   - d. 0.94205
2. Nilai MTTF adalah
   - a. 100 jam
   - b. Tidak ada bentuk yang sesuai
   - c. ∞ jam
   - d. 0 jam
3. Jika 10 sistem ditempatkan pada suatu uji pada saat yang sama, berapa sistem yang akan bertahan pada saat $t = 10^3$ jam ?
   - a. 9 sistem
   - b. 10 sistem
   - c. 11 sistem
   - d. 8 sistem

Soal Bagian B

Waktu kegagalan dari suatu sistem rem diasumsikan berdistribusi Gamma dengan p.d.f :

$$f(t) = \frac{\lambda(\lambda t)^{\gamma-1} e^{-\lambda t}}{\Gamma(\gamma)}$$

Untuk $\gamma = 2$ dan $\lambda = 0{,}0002$, maka

4. Jumlah kegagalan pada satu tahun operasi adalah
   - a. 0,876 kegagalan
   - b. 0,786 kegagalan
   - c. 0,687 kegagalan
   - d. 0,768 kegagalan

5. MTTF sama dengan

a. 10^4 jam　　b. 10^5 jam

c. 10^3 jam　　d. 10^2 jam

6. Reliabilitas pada saat t = 1000 jam adalah

a. 0,6458　　b. 0,7424

c. 0,9824　　d. 0,9522

4.1.5 Umpan Balik dan Tindak Lanjut

Cocokkanlah hasil jawaban Anda dengan Kunci Jawaban Tes Formatif 1 yang ada di bagian belakang modul ini. Kemudian hitunglah jumlah jawaban Anda yang benar dan gunakanlah rumus di bawah ini untuk mengetahui tingkat penguasaan Anda terhadap materi Kegiatan Belajar 1.

Rumus:

$$\text{Tingkat penguasaan} = \frac{\text{Jumlah Jawaban Anda yang Benar}}{10} \times 100\%$$

Arti tingkat penguasaan yang Anda capai:

90% – 100% = baik sekali

80% – 89% = baik

70% – 79% = cukup

– 69% = kurang

Jika tingkat penguasaan Anda mencapai 80% ke atas, Anda dapat melanjutkan dengan modul selanjutnya. **Bagus!**. Tetapi bila tingkat penguasaan Anda masih di bawah 80%, Anda harus mengulangi Kegiatan Belajar 1, terutama bagian yang belum Anda kuasai.

4.2 Kegiatan Belajar 2

MEAN RESIDUAL LIFE (MRL)

4.2.1 Uraian dan Contoh

Ukuran karakteristik reliabilitas dari suatu produk, komponen, atau sistem adalah *Mean Residual Life Function* (MRL), $L(t)$, yaitu

$$L(t) = E[T - t | T \geq t] \qquad t \geq 0 \tag{3.2.1}$$

Dengan kata lain, Fungsi MRL adalah ekspektasi waktu yang tersisa, $T - t$, dengan diketahui bahwa produk, komponen atau sistem tetap hidup sampai dengan waktu t. Fungsi densitas probabilitas bersyarat untuk sebarang waktu $\tau \geq t$ adalah

$$f_{T|T\geq t}(\tau) = \frac{f(\tau)}{R(t)} \qquad \tau \geq t \tag{3.2.2}$$

Ekspektasi bersyarat dari fungsi (3.2.2) adalah

$$E[T - t | T \geq t] = \int_{\tau=t}^{\infty} \tau \, f_{T|T\geq t}(\tau) d\tau = \int_{\tau=t}^{\infty} \tau \frac{f(\tau)}{R(t)} d\tau \tag{3.2.3}$$

Karena produk, komponen, atau sistem tetap hidup sampai waktu t, maka MRL diperoleh dengan mengurangi t dari (3.10)

$$\begin{aligned} L(t) &= E[T - t | T \geq t] \\ &= \int_{\tau=t}^{\infty} (\tau - t) \frac{f(\tau)}{R(t)} d\tau \\ &= \int_{\tau=t}^{\infty} \tau \frac{f(\tau)}{R(t)} d\tau - t \\ &= \frac{1}{R(t)} \int_{\tau=t}^{\infty} \tau \, f(\tau) d\tau - t \end{aligned} \tag{3.2.4}$$

Contoh 2:

Sebuah pabrik menggunakan kompresor yang berputar untuk menyediakan cairan dingin untuk unit pembangkit tenaga. Data percobaan menunjukkan bahwa waktu kegagalan (antara 0 dan 1 tahun) dari kompresor tersebut berdistribusi Beta dengan $\alpha = 4$ dan $\beta = 2$. Berapakah Mean Residual Life (MRL) dari kompresor dengan diberikan bahwa kompresor telah hidup selama 5 bulan ?

Jawab:

Diketahui fungsi densitas probabilitas dari waktu kegagalan adalah:

$$f(t)=\begin{cases}\dfrac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1} & 0<t<1\\[2em] 0 & t \text{ yang lain}\end{cases}$$

Atau

$$f(t)=\frac{\Gamma(6)}{\Gamma(4)\Gamma(2)}t^{3}(1-t)=200\ (t^{3}-t^{4})$$

Tetapi

$$R(t)=1-F(t)=1-\int_{\tau=0}^{t}20\left(\tau^{3}-\tau^{4}\right)d\psi$$

Nilai yang bersesuaian dengan 5 bulan adalah $\frac{5}{12}$ tahun = 0,416 tahun, sehingga

$$R(0{,}416)=1-\ 20\int_{\tau=0}^{0{,}416}\left(t^{3}-t^{4}\right)dt\ =\ 0{,}900$$

Dengan menggunakan persamaan (3.2.4) diperoleh MRL kompresor yang telah hidup selama 5 bulan adalah

$$L(0{,}416)\ =\ \frac{20}{0{,}900}\int_{\tau=0{,}416}^{1}t\left(t^{3}-t^{4}\right)dt-0{,}416\ =\ 0{,}288$$

Atau MRL = 0,288 tahun = 3,46 bulan.

4.1.2 Latihan 1

Waktu kegagalan dari suatu komponen berdistribusi Pareto dengan p.d.f.

$$f(t)=\frac{\gamma\lambda^{\gamma}}{t^{\gamma-1}}\qquad \lambda>0,\ \gamma>0,\ \lambda<t<\infty$$

Turunkan nilai MRL dari komponen tersebut.

4.1.3 Rangkuman

Fungsi MRL adalah ekspektasi waktu yang tersisa, $T - t$, dengan diketahui bahwa produk, komponen atau sistem tetap hidup sampai dengan waktu t.

Karena produk, komponen, atau sistem tetap hidup sampai waktu t, maka MRL diperoleh dengan

$$L(t) = \frac{1}{R(t)} \int_{\tau=t}^{\infty} \tau \, f(\tau) d\tau - t$$

4.1.4 Tes Formatif 1

Suatu alat sambungan putaran muatan akan rusak akibat kelelahan material. Kelelahan tersebut dikaraketristikkan dengan bagian kecil dari material terlepas dari putaran dan menimbulkan lubang. Lubang tersebut akan mengakibatkan keretakan yang membuat sambungan tersebut rusak. Jika sejumlah sambungan yang identik dijalankan pada kondisi yang sama sampai dengan 10% sejumlah sambungan tersebut gagal akibat kelelahan material, maka sejumlah sambungan tersebut dikatakan mencapai waktu L_{10}. Dengan kata lain, sisanya sebesar 90% dari sambungan-sambungan tersebut akan tetap hidup untuk periode yang lebih panjang dari waktu L_{10}. Andaikan sebuah sambungan putaran mempunyai fungsi hazard dalam bentuk :

$$h(t) = \frac{\frac{1}{\theta}\left(\frac{t}{\theta}\right)^{n-1}}{(n-1)! \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\left(\frac{t}{\theta}\right)^{k}}{k!}}$$

Dengan $n = 3$ dan $\theta = 290$ jam,

1. Reliabilitas dari sambungan tersebut pada saat $t = 100$ jam adalah
   a. 0,6489 b. 0,8425
   c. 0,9945 d. 0,6425
2. Diasumsikan bahwa $L_{10} = 100$ jam, maka MRL dari sambungan tersebut sama dengan
   a. 774 jam b. 770 jam
   c. 447 jam d. 707 jam

4.1.5 Umpan Balik dan Tindak Lanjut

Cocokkanlah hasil jawaban Anda dengan Kunci Jawaban Tes Formatif 1 yang ada di bagian belakang modul ini. Kemudian hitunglah jumlah jawaban Anda yang benar dan gunakanlah rumus di bawah ini untuk mengetahui tingkat penguasaan Anda terhadap materi Kegiatan Belajar 1.

Rumus:

$$\text{Tingkat penguasaan} = \frac{\text{Jumlah Jawaban Anda yang Benar}}{10} \times 100\%$$

Arti tingkat penguasaan yang Anda capai:

90% – 100% = baik sekali

80% – 89% = baik

70% – 79% = cukup

– 69% = kurang

Jika tingkat penguasaan Anda mencapai 80% ke atas, Anda dapat melanjutkan dengan modul selanjutnya. **Bagus!**. Tetapi bila tingkat penguasaan Anda masih di bawah 80%, Anda harus mengulangi Kegiatan Belajar 1, terutama bagian yang belum Anda kuasai.

5. Kunci Jawaban Tes Formatif

Tes Formatif 1

1. d
2. b
3. a
4. d
5. a
6. c

Tes Formatif 2

1. c
2. b

6. Referensi

Bain, L.J. dan Engelhardt, M., 1992, *Introduction to Probability and Mathematical Statistics*, second edition, Duxbury Press, USA.

Elsayed, E.A., 1996, *Reliability Engineering*, Addison Wesley Longman, Inc, Reading, Massachusetts.

Walpole, R.E. dan Myers, R.H., 2004, *Probability and Statistics for Engineer and Scientist*, MacMillan Publishing Co. Inc., USA.

MATERI POKOK IV

MODEL RELIABILITAS NON PARAMETRIK SATU SAMPEL

Di Asih I Maruddani, S.Si., M.Si.
Triastuti Wuryandari, S.Si., M.Si.

DAFTAR ISI

MODUL 4 : MODEL RELIABILITAS NON PARAMETRIK SATU SAMPEL

MODEL RELIABILITAS NON PARAMETRIK SATU SAMPEL

1. Pengantar

Dalam mengestimasi fungsi ketahanan dari data uji hidup dapat digunakan dua metode yaitu metode nonparametrik dan metode parametrik. Metode parametrik adalah metode yang masih bergantung pada fungsi distribusinya, sedangkan metode nonparametrik tidak tergantung pada fungsi distribusinya sehingga memudahkan untuk estimasinya. Fungsi reliabilitas dikenal dengan istilah reliabilitas yang sering dijumpai di bidang teknik atau Survival yang sering dijumpai di bidang kedokteran. Pada modul ini akan dibahas Fungsi Ketahanan (Survival) non parametrik untuk satu sampel.

Untuk mengestimasi fungsi ketahanan dengan metode nonparametrik dapat dilakukan cara Metode *Product Limit* (*Kaplan Meier*) atau analisis *Life Table* untuk satu sample dimana metode Kaplan Meier biasanya untuk tahan hidup dengan jumlah pengamatan kecil sedangkan Life Table untuk jumlah pengamatan besar sehingga berbentuk interval.

2. Tujuan Instruksional Umum

Dengan mempelajari buku ini, diharapkan mahasiswa dapat memahami dan menggunakan uji reliabilitas nonparametrik untuk satu sampel.

3. Tujuan Instruksional Khusus

Setelah mempelajari bab ini, mahasiswa diharapkan mampu untuk:

a. Menggunakan metode Kaplan Meier dan Life Table untuk data ketahanan satu sample
b. Menghitung rata-rata tahan hidup dan median tahan hidup
c. Menghitung fungsi ketahanan hidup, fungsi densitas dan fungsi hazardnya

4. Kegiatan Belajar

4.1 Kegiatan Belajar 1

METODE KAPLAN MEIER

4.1.1 Uraian Materi dan Contoh

Metode *Kaplan Meier* adalah suatu metode untuk menganalisa data ketahanan yang berisi observasi tersensor dan tidak tersensor. Metode ini menggunakan waktu ketahanan di dalam perhitungan peluang dan memberikan suatu estimasi fungsi ketahanan dari beberapa individu yang umurnya saat mati (gagal) akan melewati waktu t jika tidak ada observasi yang tersensor. Estimator diperoleh dari perkalian beberapa probabilitas bersyarat hasil dalam sebuah estimasi fungsi ketahanan dalam bentuk fungsi langkah. Estimator Kaplan Meier digunakan untuk menghitung estimasi dari fungsi kumulatif ketahanan yang kemudian dapat digunakan untuk menghitung nilai hazard kumulatif.

Hal-hal yang berhubungan dengan estimasi Kaplan Meier (K-M) adalah sbb:

1. Estimasi Kaplan Meier terbatas untuk interval waktu pada observasi gagal. Jika observasi terbesarnya adalah tidak tersensor maka estimasi K-M adalah nol. Jika observasi terbesarnya tersensor, maka estimasi K-M bisa bernilai bukan nol
2. Dengan estimasi K-M bisa dihitung median waktu ketahanan hidupnya
3. Jika observasi tidak tersensornya kurang dari 50% dan observasi terbesarnya tersensor, maka median waktu ketahanannya tidak dapat diestimasi
4. Asumsi waktu tersensornya adalah independen

Misalnya $t_1, t_2, ..., t_n$ adalah waktu tahan hidup n individu dari sekelompok pasien sedemikian hingga $t_1 \leq t_2 \leq ..... \leq t_n$

Fungsi survival pada saat $t_{(1)}$ adalah $S(t_{(1)} = \frac{n-i}{n} = 1 - \frac{i}{n}$

yang merupakan fungsi langkah dari 0 sampai 1 dimana (n-1) adalah jumlah individu yang tahan hidupnya lebih dari $t_{(1)}$

Jika ada $t_{(1)}$ yang sama maka diambil i yang terbesar misalnya $t_{(2)} = t_{(3)} = t_{(4)}$ maka

$$S(t_{(2)}) = S(t_{(3)}) = S(t_{(4)}) = \frac{n-4}{n}$$

Diasumsikan setiap individu hidup pada permulaan studi dan tidak ada yang tahan hidupnya lebih dari $t_{(n)}$, sehingga $S(t_{(0)}) = 1$ dan $S(t_{(n)}) = 0$

Contoh 1:

10 pasien kanker dihitung waktu hidupnya (t) dalam bulan dan tidak ada observasi yang tersensor. Data waktu hidupnya dan fungsi ketahannya diberikan pada tabel 5.1

Tabel 4.1 Data Pasien Kanker

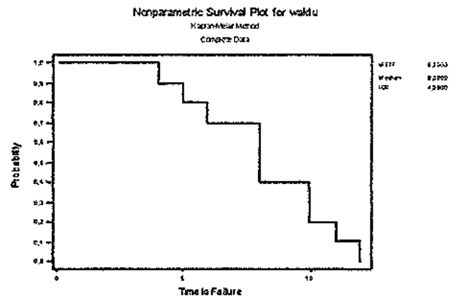
T	I	S(t)
4	1	9/10
5	2	8/10
6	3	7/10
8	4	6/10
8	5	5/10
8	6	4/10
10	7	3/10
10	8	2/10
11	9	1/10
12	10	0/10

Dari tabel di atas diketahui median waktu hidup adalah 8 bulan atau dengan interpolasi

t	S(t)
6	0.7
m	0.5
8	0.4

$$\frac{8-6}{0.4-0.7} = \frac{8-m}{0.4-0.5} \rightarrow m = 8 - \frac{2(0.1)}{0.3} = 7.3 \text{ bulan}$$

Grafik $S(t)$ nya adalah sbb:



Gambar 4.1
Grafik S(t) untuk Data Pasien Kanker

Jika terdapat observasi yang tersensor maka estimasi K-M dihitung dengan tabel sbb:

- Kolom 1: waktu tahan hidup baik tersensor maupun tidak tersensor secara urut dari terkecil
- Kolom 2 : Ranking dari kolom1 (i)
- Kolom 3 : Ranking hanya untuk observasi tidak tersensor (r)
- Kolom 4 : pi = (n-r) / (n-r+1)
- Kolom 5 : $S(t_{(1)}) = \prod_{t_r \leq t} \frac{n-r}{n-r+1}$

n adalah jumlah individu yang dihitung waktu hidup

Contoh 2:

Diamati 10 pasien tumor ganas. Dari hasil pengamatan diperoleh 6 pasien kambuh setelah 3.5; 6.5; 6.5; 10; 12 dan 15 bulan. 1 pasien *lost to follow up* setelah 8.4 bulan. 3 pasien masih sehat setelah 4; 5.7; 10 bulan. Jadi dalam hal ini waktu tahan hidupnya adalah waktu sampai pasien tersebut kambuh. Observasi tersensornya adalah jika pasien tetap sahat dan *lost to follow up*. Hasil pengamatannya diberikan pada tabel 5.2.

Tabel 4.2 Data Pasien Tumor Ganas

Waktu t	**i**	**R**	**(n-r)/(n-r+1)**	**S(t)**
3.0	1	1	9/10	9/10
4.0+	2	-	-	-
5.7+	3	-	-	-
6.5	4	4	6/7	9/10*6/7
6.5	5	5	5/6	9/10*6/7*5/6
8.4+	6	-	-	-

10.0	7	7	¾	9/10*6/7*5/6*3/4
10.0+	8	-	-	-
12.0	9	9	½	9/10*6/7*5/6*3/4*1/2
15.0	10	10	0	0

Dari hasil perhitungan di atas terlihat bahwa terdapat hubungan matematik sbb:

$$S(t_{(i)}) = S(t_{(i-1)}) * \frac{n-i}{n-i+1}$$

dimana $t_{(i)} = t_{(i-1)}$ merupakan observasi yang tidak tersensor

Sehingga untuk $S(12) = S(10) * \frac{1}{2} = 0.241$

Untuk menentukan estimasi intervalnya lebih dahulu dicari variansi dari fungsi survivalnya yaitu

$$Var[S(t)] \cong [S(t)]^2 \sum_r \frac{1}{(n-r)(n-r+1)}$$

r adalah bilangan bulat positif sedemikian hingga $t_{(r)} \leq t$

Dari contoh di atas diperoleh

$$Var[S(10)] = 0.482^2 \left(\frac{1}{9*10} + \frac{1}{6*7} + \frac{1}{5*6} + \frac{1}{3*4} \right) = 0.0352$$

sehingga standard errornya

$$SE(S(t)) = \sqrt{0.0352} = 0.1876$$

Diperoleh interval konfidensi 95% ketahanan hidupnya adalah

$$S(t) \pm SE(S(t))$$

Selain median, dalam estimasi K-M juga bisa diketahui rata-rata waktu tahan hidup (*Mean Time To Failure = MTTF*). *MTTF* didefinisikan sebagai harga harapan suatu individu akan tetap hidup sampai waktu *t* atau ada yang berpendapat rata-rata hingga gagal.

Rata-rata waktu ketahanan dapat dicari dengan menggunakan persamaan

$$\mu = E(T) = \int_0^\infty S(t)dt$$

μ adalah sama dengan luas di bawah kurva fungsi ketahanan, sehingga jika waktu kegagalan diurutkan yaitu $t^{(1)} \leq t^{(2)} \leq ..... \leq t^{(m)}$ dan terdapat m observasi tidak tersensor dengan $t^{(m)}$ adalah observasi terbesar dari n observasi. Jika $t^{(m)} = t_{(n)}$ maka $t_{(n)}$adalah observasi yang tidak tersernsor, sehingga μ dapat diestimasi sebagai berikut:

$$\mu = 1 * t^{(1)} + S(t^{(1)}) * (t^{(2)} - t^{(1)}) + S(t^{(2)}) * (t^{(3)} - t^{(2)}) + ... + S(t^{(m-1)})(t^{(m)} - t^{(m-1)})$$

Dari contoh 2 di atas, m=6; $t^{(1)} = 3.0$; $t^{(12} = 6.5$; $t^{(31} = 6.5$; $t^{(41} = 10.00$; $t^{(51} = 12.0$; $t^{(61)} = 15.0$, sehingga rata-rata waktu tahan hidupnya

$$\mu = 1 * 3.0 + 0.9 * (6.5 - 3.0) + 0.643 * (10 - 6.5) + 0.482 * (12 - 10) + 0.241 * (15 - 12)$$

$$= 10.088 \text{ bulan}$$

Variansi dari μ dapat diestimasi dengan

$$Var(\mu) = \sum_r \frac{A_r^{\ 2}}{(R_i - \delta_i)(R_i - \delta_i + 1)}$$

Dimana r berjalan seiring dengan t_r yang menandakan kegagalan dan A_r adalah luas daerah di bawah kurva *S*(*t*). A_r ke-*k* dalam bentuk observasi tidak tersensor *m* adalah

$$S(t^{(k)})(t^{(k+1)} - t^{(k)}) + S(t^{(k+1)})(t^{(k+2)} - t^{(k+1)}) + ... + S(t^{(m-1)})(t^{(m)} - t^{(m-1)})$$

4.1.2 Latihan 1

1. Diketahui 15 pasien melanoma dengan waktu tahan hidupnya sbb:

no	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
T	34	4	11	5	20	24	8	17	17	34	8	27	21	18	17

a. Hitung *S*(*t*)dengan metode Kaplan Meier
b. Hitung variansi (*S*(*t*))
c. Hitung interval kepercayaan 95% untuk *S*(*t*)
d. Hitung median waktu hidupnya
e. Hitung Rata-rata tingkat kegagalannya (*MTTF*)
f. Plot fungsi ketahanannya dan fungsi hazardnya

2. Diketahui 10 pasien penderita jantung dengan waktu hidup sbb:

No	1	2	4	4	5	6	7	8	9	10
waktu	5.8	3.0	11+	22.1	23+	6.8	10.8+	2.8	9.2	15.9

a. Hitung $S(t)$ dengan metode Kaplan Meier
b. Hitung variansi ($S(t)$)
c. Hitung interval kepercayaan 95% untuk $S(t)$
d. Hitung median waktu hidupnya
e. Hitung Rata-rata tingkat kegagalannya (*MTTF*)
f. Plot fungsi ketahanannya dan fungsi hazardnya

4.1.3 Rangkuman

Metode Kaplan Meier adalah suatu metode untuk menganalisa data ketahanan yang berisi observasi tersensor dan tidak tersensor. Metode ini menggunakan waktu ketahanan di dalam perhitungan peluang dan memberikan suatu estimasi fungsi ketahanan dari beberapa individu yang umurnya saat mati (gagal) akan melewati waktu t jika tidak ada observasi yang tersensor.

4.1.4 Test Formatif 1

Soal Bagian A

Diketahui 10 tikus penderita tumor dengan waktu tahan hidupnya (dalam hari) sbb:

No	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
waktu	140	177	50	65	86	153	181	191	77	84

1. Tahan hidup pada saat t=50 ($S(50)$) adalah
   a. 0.8 b. 0.09
   c. 0.10 d. 0.11
2. Tahan hidup pada saat t=153 ($S(153)$) adalah
   a. 0.3 b. 0.4
   c. 0.5 d. 0.6
3. Tahan hidup pada saat t=77 ($S(77)$) adalah
   a. 0.9 b. 0.8
   c. 0.7 d. 0.6
4. Rata-rata tahan hidup (Mean Time To Failure) adalah
   a. 120.4 b. 120.8
   c. 121.2 d. 121.6

5. Median tahan hidupnya

a. 80 b. 82

c. 84 d. 86

Soal Bagian B

Diketahui waktu kambuh 10 pasien leukimia adalah sbb:

Pasien	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
t	5.8	3.0	11+	22.1	23+	6.8	10.8+	2.8	9.2	15.9

6. Tahan hidup pada saat t=3.0 adalah

a. 0.9 b. 0.8

c. 0.7 d. 0.6

7. Variansi $S(3)$ nya adalah

a. 0.008 b. 0.012

c. 0.016 d. 0.020

8. Median waktu hidupnya adalah

a. 9.0 b. 9.2

c. 9.4 d. 9.6

9. Rata-rata waktu kegagalannya (MTTF) adalah

a. 9.78 b. 10.78

c. 11.78 d. 12.78

10. Fungsi hazard kumulatif pada saat t=3 ($H(3)$) adalah

a. 0.41 c. 0.21

b. 0.31 d. 0.11

4.1.5 Umpan Balik dan Tindak Lanjut

Cocokkanlah jawaban anda dengan kunci jawaban test formatif 1 yang ada di bagian akhir bab ini. Hitung jawaban anda yang benar dan gunakan rumus di bawah untuk menghitung tingkat penguasaaan anada terhadap materi kegiatan belajar pada bagian ini.

Rumus

$$\text{Tingkat penguasaan} = \frac{\text{jumlah benar}}{10} \times 100\%$$

Arti penguasaan yang anda capai:

90% – 100%	=	baik sekali
80% – 89%	=	baik
70% – 79%	=	cukup
– 69%	=	kurang

Kalau anda mencapai tingkat penguasaan 80% atau lebih anda dapat meneruskan kegiatan belajar selanjutnya. Tetapi kalau kurang anda harus mengulang terutama bagian yang belum anda kuasai

4.2 Kegiatan Belajar 2

ANALISIS LIFE TABLE

4.2.1 Uraian Materi dan contoh

Metode *Life Table* adalah salah satu metode untuk mengukur angka kematian dan menggambarkan waktu ketahanan suatu populasi. Life Table banyak digunakan di bidang aktuaria, demografi, pemerintahan, dan penelitian di bidang kesehatan untuk mengetahui ketahanan hidup pasien.

Metode Life Table memerlukan sejumlah besar observasi sehingga waktu tahan hidupnya dikelompokkan dalam interval-interval. Seperti dalam estimasi Kaplan Meier, metode Life Table memasukkan semua informasi tahan hidup yang dikumpulkan pada akhir pengamatan. Misalnya dalam menghitung tingkat ketahanan penderita kanker dalam 5 tahun, yang dipelukan adalah hanya pasien yang masuk pengamatan untuk 5 tahun atau lebih. Pasien yang diamati untuk 4, 3, 2 dan bahkan 1 tahun memberikan informasi untuk evaluasi ketahanan 5 tahun. Dengan kata lain, teknik life table menggunkan data tidak lengkap *losses to follow-up* dan *individu withdrawn alive* sama baiknya dengan data kematian lengkap.

Adapun format life table adalah sebagai berikut:

1. Kolom 1 : interval $[t_i - t_{i+1}]$.yaitu interval waktu tahan hidup dan waktu *losses to follow-up dan individu withdrawn alive* . Interval ini dari t_i sampai dengan sebelum t_{i+1}, dengan i = 1, 2, 3, ..., s. Interval ini mempunyai panjang tidak terbatas.

2. Kolom 2 : titik tengah interval (t_{mi}) dengan $i = 1, 2, \ldots, s-1$

3. Kolom 3 : lebar interval (b_i). $b_i = t_{i+1} - t_i$ dengan $i = 1, 2, \ldots, s-1$

4. Kolom 4 : Jumlah *loss to Follow up* (l_i) dengan $i = 1, 2, \ldots., s$.

5. Kolom 5 : Jumlah *Withdrawn Alive up* (w_i)

6. Kolom 6 : Jumlah yang mati *up* (d_i) dalam interval ke i.

7. Kolom 7 : Jumlah individu yang masuk interval i (n_i'). Jumlah individu yang masuk interval pertama merupakan ukuran sampel total (n_1'). Untuk interval selanjutnya berlaku $n_i' = n_{i-1}' - l_{i-1} - w_{i-1} - d_{i-1}$.

8. Kolom 8 : Jumlah individu yang beresiko (n_i) dimana $n_i = n_i' - \frac{1}{2}(l_i + w_i)$

9. Kolom 9 : Proporsi Kegagalan bersyarat (q_i). dimana $q_i = \frac{d_i}{n_i}$ untuk i=1, 2, …, s-1 dan $q_s = 1$

10. Kolom 10 : Proporsi ketahanan bersyarat (p_i) dan $p_i = 1 - q_i$

11. Kolom 11 : Proporsi ketahanan kumulatif ($S(t_i)$) dimana $S(t_1) = 1$ dan ($S(t_i) = p_{i-1}S(t_{i-1})$)

12. Kolom 12 : Estimasi fungsi densitas probabilitas ($f(t_{mi})$) dimana ($f(t_{mi}) = \frac{S(t_i) - S(t_{i+1})}{b_i} = \frac{S(t_i)q_i}{b_i}$) ; i=1, 2, ... , s-1

13. Kolom 13 : Fungsi Hazard ($h(t_{mi})$) dimana $h(t_{mi}) = \frac{d_i}{b_i(n_i - \frac{1}{2}d_i)} = \frac{2q_i}{b_i(1+p_i)}$ atau

dari $S(t_{mi}) = \frac{1}{2}[S(t_{i+1}) + S(t_i)]$

diperoleh $h(t_{mi}) = \frac{f(t_{mi})}{S(t_{mi})} = \frac{S(t_i)q_i / b_i}{\frac{1}{2}S(t_i)(p_i + 1)}$

Contoh 1:

Dari 2418 laki-laki dengan *Angina Pectoris* (kejang jantung) tahan hidupnya seperti tabel 5.3 lengkap dengan perhitungan fungsi tahan hidup, fungsi densitas dan fungsi hazardnya:

Tabel 4.3 Data Pasien Angina Pectoris

int	t_{mi}	b_i	l_i	w_i	d_i	n_i'	n_i	q_i	p_i	$S(t_i)$	$f(t_{mi})$	$h(t_{mi})$
(1)	**(2)**	**(3)**	**(4)**	**(5)**	**(6)**	**(7)**	**(8)**	**(9)**	**(10)**	**(11)**	**(12)**	**(13)**
0	0.5	1	0	0	456	2418	2418.0	0.1886	0.8114	1.0000	0.1886	0.2082
1	1.5	1	39	0	226	1962	1942.5	0.1163	0.8837	0.8114	0.0944	0.1235
2	2.5	1	22	0	152	1697	1686.0	0.0902	0.9098	0.7170	0.0646	0.0944
3	3.5	1	23	0	171	1523	1511.5	0.1131	0.8869	0.6524	0.0738	0.1199
4	4.5	1	24	0	135	1329	1317.0	0.1025	0.8975	0.5786	0.0593	0.1080
5	5.5	1	107	0	125	1170	1116.5	0.1120	0.8880	0.5193	0.0581	0.1186
6	6.5	1	133	0	83	938	871.5	0.0952	0.9048	0.4611	0.0439	0.1000
7	7.5	1	102	0	74	722	671.0	0.1103	0.8897	0.4172	0.0460	0.1167
8	8.5	1	68	0	51	546	512.0	0.0996	0.9004	0.3712	0.0370	0.1048
9	9.5	1	64	0	42	427	395.0	0.1063	0.8937	0.3342	0.0355	0.1123
10	10.5	1	45	0	43	321	298.5	0.1441	0.8559	0.2987	0.0430	0.1552
11	11.5	1	53	0	34	233	206.5	0.1646	0.8354	0.2557	0.0421	0.1794
12	12.5	1	33	0	18	146	129.5	0.1390	0.8610	0.2136	0.0297	0.1494
13	13.5	1	27	0	9	95	81.5	0.1104	0.8896	0.1839	0.0203	0.1169
14	14.5	1	23	0	6	59	47.5	0.1263	0.8737	0.1636	0.0207	0.1348
15	15.5	1	0	0	0	30	30.0	1.000	0.0000	0.1429	-------	------

4.2.2 Latihan

1. Diketahui data waktu tahan hidup pasien diabetes melitus sbb:

int	l_i	w_i
0 – 1	111	1
1 - 2	110	3
2 - 3	107	1
3 - 4	106	3
4 - 5	103	2
5 - 6	101	2
6 - 7	98	2
7 - 8	95	3
8 - 9	92	4
9- 10	88	1

Hitung Fungsi Kumulatif tahan hidupnya, fungsi densitas dan fungsi hazardnya

4.2.3 Rangkuman

Metode *Life Table* pada dasarnya sama dengan metode *Kaplan Meier*, hanya saja pada Life Table memerlukan sejumlah besar observasi sehingga waktu tahan hidupnya dikelompokkan dalam interval-interval.

4.2.4 Test formatif 2

Diketahui data pasien penyakit DM sbb:

int	l_i	w_i
0 – 1	59	0
1 – 2	59	4
2 – 3	55	0
3 – 4	53	2
4 – 5	49	1
5 – 6	48	3
6 – 7	44	2
7 – 8	41	2
8 – 9	38	2
9- 10	36	5
10-11	33	5
11-12	27	3
12-13	24	8
13-14	14	6
14-15	7	3
15-16	4	2
>=16	2	2

1. Nilai fungsi ketahanan kumulatif pada saat 1 – 2 (S(1-2)) adalah
   a. 1   b. 0.8
   c. 0.9   d. 0.7
2. Nilai fungsi densitas probabilitasnya pada saat (1; 2) adalah
   a. 0.3   b. 0.2
   c. 0.1   d. 0
3. Tingkat hazard pada saat (1 ; 2) adalah
   a. 0.3   b. 0.2
   c. 0.1   d. 0

4. Median waktu tahan hidupnya adalah

   a. 12   c. 18

   b. 16   d. 18

5. Standard Error ($S(t)$) untuk (1 ; 2) adalah

   a. 0   b. 0.02

   c. 0.04   d. 0.06

6. Standard Error ($f(t)$) untuk (1 ; 2) adalah

   a. 0   b. 0.02

   c. 0.04   d. 0.06

7. Standard Error ($h(t)$) untuk (1 ; 2) adalah

   a. 0   b. 0.02

   c. 0.04   d. 0.06

8. Fungsi ketahanan kumulatif pada saat 1 – 2 (S(3 ; 4)) adalah

   a. 0.66   b. 0.76

   c. 0.96   d. 1

9. Fungsi densitas probabilitasnya pada saat (3; 4) adalah

   a. 0.017   b. 0.037

   c. 0.057   d. 0.077

10. Tingkat hazard pada saat (3 ; 4) adalah

   a. 0.019   c. 0.039

   c. 0.059   d. 0.079

4.2.5. Umpan Balik dan Tindak Lanjut

Cocokkanlah jawaban anda dengan kunci jawaban test formatif 1 yang ada di bagian akhir bab ini. Hitung jawaban anda yang benar dan gunakan rumus di bawah untuk menghitung tingkat penguasaaan anada terhadap materi kegiatan belajar pada bagian ini.

Rumus

$$\text{Tingkat penguasaan} = \frac{\text{jumlah benar}}{10} \times 100\%$$

Arti penguasaan yang anda capai:

90% – 100% = baik sekali

80% – 89% = baik

70% – 79% = cukup

– 69% = kurang

Kalau anda mencapai tingkat penguasaan 80% atau lebih anda dapat meneruskan kegiatan belajar selanjutnya. Tetapi kalau kurang anda harus mengulang terutama bagian yang belum anda kuasai

5. Kunci Jawaban Test Formatif 1

Test Formatif 1

1. b	6. b
2. a	7. c
3. c	8. b
4. a	9. d
5. d	10. d

Test Formatif 2

1. a	6. a
2. d	7. A
3. d	8. c
4. d	9. B
5. a	10. a

6. Daftar Pustaka

Lee, E.T. 1992. *Statistical Methods for Survival Data Analysis.* John Wiley and Sons, Inc, Canada.

Lawless, J.F. 1982. *Statistical Model and Methods for Lifetime Data.* John Wiley and Sons, Inc, *Canada*.

MATERI POKOK V

MODEL RELIABILITAS NON PARAMETRIK DUA SAMPEL

Di Asih I Maruddani, S.Si., M.Si.
Triastuti Wuryandari, S.Si., M.Si.

DAFTAR ISI

MODUL 5 : MODEL RELIABILITAS NON PARAMETRIK DUA SAMPEL

MODEL RELIABILITAS NON PARAMETRIK DUA SAMPEL

1. Pengantar

Jika ada 2 kelompok fungsi ketahanan, bisa dilakukan perbandingan ketahanan antara keduanya. Uji non parametrik untuk membandingkan 2 distribusi ketahanan dari observasi yang tersensor dan tidak tersensor dibagi menjadi lima cara yaitu *Gehan* sebagai generalisasi *Wilcoxon Test*, *Cox_Mantel Test*, *Logrank Test*, serta *Peto and P*eto sebagai generalisasi *Wilcoxon Test* dan *Cox_F test.*

Misalnya terdapat n_1 individu yang diberikan perlakuan kesatu dan n_2 individu yang diberi perlakuan kedua. Jika terdapat r_1 observasi yang gagal yaitu $X_1, X_2, \ldots\ldots, X_{r1}$ dan $(n_1 - r_1)$ observasi tersensor pada kelompok 1, r_2 observasi gagal yaitu $Y_1, Y_2, \ldots\ldots, Y_{r2}$ dan $(n_2 - r_2)$ observasi tersensor pada kelompok 2 maka bisa dibandingkan ketahanan hidup dari dua kelompok

$$H_0 : S_1(t) = S_2(t)$$

$$H_1 : S_1(t) \neq S_2(t)$$

2. Tujuan Instruksional Umum

Dengan mempelajari buku ini, diharapkan mahasiswa dapat memahami berbagai bentuk fungsi-fungsi reliabilitas dan menggunakan uji reliabilitas dengan metode parametrik dan non parametrik.

3. Tujuan Instruksional Khusus

Setelah mempelajari bab ini, mahasiswa diharapkan mampu untuk:

a. *Gehan* sebagai generalisasi *Wilcoxon Test*, *Cox_Mantel Test*, *Logrank Test*, serta *Peto and P*eto sebagai generalisasi *Wilcoxon Test* dan *Cox_F test.*

b. Menghitung fungsi ketahanan hidup, fungsi densitas dan fungsi hazardnya

4. Kegiatan Belajar

4.1 Kegiatan Belajar 1

GEHAN'S SEBAGAI GENERALISASI UJI WILCOXON

4.1.1 Uraian Materi dan contoh

Dalam uji Gehan's sebagai generalisasi uji Wilcoxon, setiap observasi x_i atau x_i^+ dalam kelompok 1 dibandingkan dengan setiap observasi y_i atau y_i^+ dalam kelompok 2 dan diberi score U_{ij}.

Didefinisikan

$$U_{ij} = \begin{cases} +1 \ ; & x_i > y_i \text{ atau } x_i^+ \geq y_j \\ 0 \ ; & x_i = y_j \text{ atau } x_i^+ < y_j \text{ atau } y_j^+ < x_i \text{ atau } (x_i^+, y_j^+) \\ -1 \ ; & x_i < y_j \text{ atau } x_i \leq y_j^+ \end{cases}$$

dan hitung statistik ujinya $W = \sum_{i=1}^{n_1}\sum_{j=1}^{n_2} U_{ij}$ sehingga jumlah yang dibandingkan lebih dari $n_1 n_2$. Dalam perhitungan Gehan's, setiap observasi dalam sample 2 dibandingkan dengan setiap observasi pada sampel 2. Jika dua sampel digabung maka terdapat $n_1 + n_2$ observasi. Jika $n_1 + n_2$ adalah populasi yang terbatas dengan mean nol maka berdasarkan sample 1, didefinisikan $W = \sum_{i=1}^{n_1} U_i$ dan $\text{var}(W) = \dfrac{n_1 n_2 \sum_{i=1}^{n_1+n_2} U_i^2}{(n_1+n_2)(n_1+n_2-1)}$ sehingga $Z = \dfrac{W}{\sqrt{\text{var}(W)}}$ berdistribusi normal standart. Daerah Penolakannya $|Z| > Z_{\alpha/2}$ (uji 2 sisi).

Mantel (1967) mengemukakan alternative untuk menghitung U_i dengan menandai score setiap observasi berdasarkan ranking. U_i dihitung dengan 2 tingkat yaitu R_{ii} dan R_{2i}. Prosedur Mantel adalah sbb:

- Menghitung R_{ii}
  1. Ranking semua observasi dari kiri ke kanan untuk observasi yang tidak tersensor

2. Untuk observasi yang tersensor tandai ranking dengan rank yang lebih besar dari pada rank observasi sebelumnya pada observasi tidak tersensor
3. Untuk observasi yang sama tandai pilih rank yang paling kecil
4. Diperoleh R_{1i}

- Menghitung R_{2i}
  1. Ranking dari kanan ke kiri semua observasinya
  2. Untuk observasi yang sama pilih rank yang paling kecil
  3. Untuk observasi tersensor tandai dengan 1
  4. Diperoleh R_{2i}
  5. $U_i = R_{1i} - R_{2i}$

Contoh 1 :

10 pasien diberi 2 macam perlakuan yaitu CMF (Cyclic administration of cyclophosphamide, Methatrexate and Fluorouracil) sebagai kelompok 1 dan Kontrol sebagai kelompok 2. Pada akhir dua tahun diketahui waktu kambuhnya sbb:

CMF (kelompok 1) : 23; 16+; 18+; 20+; 24+

Control (kelompok 2): 15; 18; 19; 19; 20

Hipotesis

$H_0 : S_1(t) = S_2(t)$

$H_1 : S_1(t) > S_2(t)$ (CMF lebih efisien daripada Kontrol)

Observasi 2 sampel	**15**	**16+**	**18**	**18+**	**19**	**19**	**20**	**20+**	**23**	**24+**
Menghitung R_{1i}										
1. Rank dari kiri ke kanan utk obs tidak tersensor	1		2		3	4	5		6	
2. Rank untuk obs tersensor		2		3				6		7
3. Rank untk obs sama					3	3				
4. R_{1i}	1	2	2	3	3	3	5	6	6	7
Menghitung R_{2i}										
5. Rank semua obs dari kanan ke kiri	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1

6. Rank untuk obs sama					5					
6. Rank untuk obs tersensor		1		1				1		1
8. R_{2i}	10	1	8	1	5	5	4	1	2	1
$U_i = R_{1i} - R_{2i}$	-9	1(*)	-6	2(*)	-2	-2	1	5(*)	4(*)	6(*)

Diperoleh

$$W = 1+2+5+4+6 = 18 \; .$$

$$Var(W) = (5)(5)[(-9)^2 + 1^2 + (-6)^2 + 2^2 + (-2)^2 + (-2)^2 + 1^2 + 5^2 + 4^2 + 6^2]/(10*9)$$

$$= 57.78$$

Statistik ujinya

$$Z = \frac{W}{\sqrt{\mathrm{var}(W)}_i} = \frac{18}{\sqrt{57.78}} = 2.368 \quad \text{dan diketahui} \quad Z_{0.05} = 1.64$$

sehingga Z> $Z_{0.05} = 1.64$ atau dikatakan $S_1(t) > S_2(t)$.

4.1.2 Latihan 1

Dua perlakuan dicobakan pada penderita Leukimia dan waktu kambuhnya sbb:

Perlakuan 1	4 28	5 28	9 29	10 31	12 32	13 37	10 41	23 41	28 41
Perlakuan 2	8 99	10 103	10 162	12 169	14 195	20 220	48 161+	70 199+	75 217

Gunakan metode Gehan's generalisasi Wilcoxon untuk membandingkan perlakuan mana yang lebih baik

4.1.3. Rangkuman

Dalam uji Gehan's sebagai generalisasai uji Wilcoxon, setiap observasi x_i atau x_i^+ dalam kelompok 1 dibandingkan dengan setiap observasi y_i atau y_i^+ dalam kelompok 2 dan diberi score U_{ij}.

4.1.4 Test formatif 1

12 pasien diabetes Melitus diberi dua macam perlakuan. Berikut adalah waktu kambuhnya

Perlakuan 1	33.7+	3.8	6.3	2.3	6.4	23.8
Perlakuan 2	4.3	26.9+	21.4+	18.1+	5.8	3.0

1. Dengan uji Gehan's generalisasi uji Wilcoxon, yang merupakan hasil $R_{ii} - R_{2i}$ kecuali

   a. 2 b. 2

   c. 3 d. 5

2. Hasil dari $R_{ii} - R_{2i}$ dari kelompok 1 adalah

   a. 2 b. 3

   c. 4 d. 5

3. W nya adalah

   a. 1 b. 2

   c. 3 d. 4

4. Variansi (W) nya adalah

   a. 10.9 b. 11.9

   c. 12.9 d. 13.9

5. Z nya adalah

   a. 0.14 b. 0.34

   c. 0.54 d. 0.74

4.1.5. Umpan Balik dan Tindak Lanjut

Cocokkanlah jawaban anda dengan kunci jawaban test formatif 1 yang ada di bagian akhir bab ini. Hitung jawaban anda yang benar dan gunakan rumus di bawah untuk menghitung tingkat penguasaaan anada terhadap materi kegiatan belajar pada bagian ini.

Rumus

$$\text{Tingkat penguasaan} = \frac{\text{jumlah benar}}{10} \times 100\%$$

Arti penguasaan yang anda capai:

$90\% - 100\%$ = baik sekali

$80\% - 89\%$ = baik

$70\% - 79\%$ = cukup

$- 69\%$ = kurang

Kalau anda mencapai tingkat penguasaan 80% atau lebih anda dapat meneruskan kegiatan belajar selanjutnya. Tetapi kalau kurang anda harus mengulang terutama bagian yang belum anda kuasai

4.2 Kegiatan Belajar 2

TEST COX MANTEL

4.2.1 Uraian dan Contoh

Ambil $t_1 < t_2 < ... < t_{(k)}$ adalah waktu kegagalan dalam 2 kelompok . $m_{(i)}$ adalah waktu kegagalan yang sama dengan t_i sehingga $\sum_{i=1}^{k} m_{(i)} = r_1 + r_2$. Jika n_{1t} dan n_{2t} adalah jumlah pasien yang beresiko dalam R(t) dimana R(t) adalah himpunan individu yang beresiko gagal pada waktu t, maka jumlah total observasi gagal atau tetrsensor dalam R(t) adalah $r_{(i)} = n_{1i} + n_{2i}$. Didefinisikan

$$U = r_2 - \sum_{i=1}^{k} m_{(i)} A_{(i)} \quad \text{dan } I = \sum_{i=1}^{k} \frac{m_{(i)}(r_{(i)} - m_{(i)})}{r_{(i)} - 1} A_{(i)}(1 - A_{(i)})$$

dengan $r_{(i)}$ adalah jumlah observasi gagal atau tersensor dalam $R(t_i)$ dan $A_{(i)}$ adalah proporsi dari $r_{(i)}$ untuk kelompok 2.

Statistik ujinya

$$C = \frac{U}{\sqrt{I}}$$

Contoh 2:

Dari contoh diatas (metode Gehan's), diperoleh $r_1 = 1$ dan $r_2 = 5$.

t_i	$m_{(i)}$	n_{1i}	n_{2i}	r_i	$A_{i(i)}$
15	1	5	5	10	0.50
18	1	4	4	8	0.50
19	2	3	3	6	0.50
20	1	3	1	4	0.25
23	1	2	0	2	0.00

Sehingga

$$U = 5-(0.5+0.5+2(0.5)+0.25)$$
$$= 5-2.25$$
$$= 2.75$$

$$I = \frac{1(9)}{9}(0.5*0.5)+\frac{1(7)}{7}(0.5*0.5)+\frac{2(4)}{5}(0.5*0.5)+\frac{1(3)}{3}(0.25*0.75)$$
$$= 0.25+0.25+0.4+0.1875 = 1.0875$$

Disimpulkan

$C = 2.75/\sqrt{1.0875} = 2.637 > Z_{0.05} = 1.64$ sehingga $Z > Z_{0.05}$

atau dikatakan $S_1(t) > S_2(t)$.

4.2.2 Latihan 2

10 Pasien Diabetes Melitus di catat waktu tahan hidupnya sbb

Pasien	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Kel 1	33.7+	3.9	10.5	5.4	19.5	23.8+	7.9	16.9+	16.6+	33.7
Kel 2	8.0	26.9+	21.4+	18.1+	16+	6.9	8.3	24.4	7.7	7.8+

Ujilah menggunakan Cox-Mantel test untuk membandingkan antara kelompok1 dan kel2

4.2.3 Rangkuman

Test Cox Mantel pada dasarnya sama dengan test Gehan. Test Cox Mantel, jika n_{1t} dan n_{2t} adalah jumlah pasien yang beresiko dalam R(t) dimana R(t) adalah himpunan individu yang beresiko gagal pada waktu t, maka jumlah total observasi gagal atau tetrsensor dalam R(t) adalah $r_{(i)} = n_{1i} + n_{2i}$.

4.2.4 Test Formatif 2

Menggunakan data pada Test Formatif 1, untuk soal 1-5

1. Dengan uji Cox-Mantel, r_1- nya adalah
   a. 3 b. 5
   c. 4 d. 6
2. r_2 - nya adalah
   a. 3 b. 5
   b. 4 d. 6

3. Nilai U - nya adalah

a. 1.47	b. 2.47
b. 3.47	d. 4.47

4. Nilai I - nya adalah

a. 1.5	c. 5.5
b. 3.5	d. 7.5

5. A_i yang ke-3 adalah

a. 0.9	b. 0.7
b. 0.5	d. 0.3

4.2.5 Umpan Balik dan Tindak Lanjut

Cocokkanlah jawaban anda dengan kunci jawaban test formatif 1 yang ada di bagian akhir bab ini. Hitung jawaban anda yang benar dan gunakan rumus di bawah untuk menghitung tingkat penguasaaan anada terhadap materi kegiatan belajar pada bagian ini.

Rumus

$$\text{Tingkat penguasaan} = \frac{\text{jumlah benar}}{10} \times 100\%$$

Arti penguasaan yang anda capai:

90% – 100%	=	baik sekali
80% – 89%	=	baik
70% – 79%	=	cukup
– 69%	=	kurang

Kalau anda mencapai tingkat penguasaan 80% atau lebih anda dapat meneruskan kegiatan belajar selanjutnya. Tetapi kalau kurang anda harus mengulang terutama bagian yang belum anda kuasai

4.3 Kegiatan Belajar 3

LOGRANK TEST

4.3.1 Uraian Materi dan Contoh

Mantel's (1996) sebagai generalisasi Savage test, seringkali dimaksudkan sebagai Logrank Test (Peto and Peto 1972), yaitu atas dasar himpunan skor-skor Wi yang ditentukan untuk observasi. Skor tersebut berupa fungsi logaritma dari fungsi survival. Altshuler (1970) mengestimasi fungsi log survival pada $t(i)$ menggunakan :

$$-e(t_{(i)}) = -\sum_{j \le t_{(i)}} \frac{m_{(j)}}{r_{(j)}}$$

Dimana $m(i)$ adalah jumlah kegagalan pada saat t_i, $r(i)$ adalah jumlah observasi tersensor atau gagal dalam $R(t(i))$ dan $r(t(i))$ adalah himpunan individu beresiko pada waktu $t(i)$. Skor yang disarankan oleh Peto dan Peto adalah :

$W_i = 1 - e(t(i))$; untuk observasi tidak tersensor $t(i)$

$W_i = -e(T)$; untuk observasi tersensor pada T

Dalam penerapannya,

$W_i = - e(t(i))$; untuk observasi tersensor t_i+

Dimana $t(i)$adalah observasi tidak tersensor terbesar sehingga $t_{(j)} \le t_i^{+}$. Oleh karena itu observation tidak tersensor terbesar mempunyai skor terkecil dan observation tersensor mendapat skor negatif. Jumlah dari skor-skor $t(i)$ dianggap sama dengan nol untuk kedua kelompok sekaligus. Logrank test berdasarkan pada jumlah skor w dalam salah satu dari dua kelompok tersebut.

$$Var(S) = \frac{n_1 n_2 \sum_{i=1}^{n_1+n_2} w_i^2}{(n_1+n_2)(n_1+n_2-1)}$$

atau dapat ditulis sebagai

$$V = \left\{ \sum_{j=1}^{k} \frac{m_{(j)}(r_{(j)} - m_{(j)})}{r_{(j)}} \right\} \frac{n_1 n_2}{(n_1+n_2)(n_1+n_2-1)}$$

Statistik uji :

$$L = \frac{S}{\sqrt{Var(S)}}$$ yang berdistribusi normal standart .

Jika S diperoleh dari kelompok 1 maka daerah kritisnya adalah L< -Z dan jika S diperoleh dari kelompok 2 maka daerah kritisnya adalah L> Z

Contoh 3:

10 pasien kanker dengan perlakuan CMF dan kontrol

CMF (grup 1)	23	16+	18+	20+	24+
Kontrol (grup 2)	15	18	19	19	20

Prosedur perhitungan uji Logrank Test sbb:

Kolom 1 : Waktu tahan hidup pasien (t_i) baik tersensor ataupun tidak tersensor

Kolom 2 : $m_{(i)}$ yaitu jumlah kegagalan pada saat t_i

Kolom 3 : $r_{(i)}$ yaitu jumlah observasi yang bertahan sampai dengan t_i

Kolom 4 : $m_{(i)} / r_{(i)i}$

Kolom 5 : $e(t_{(i)})$

Kolom 6 : $w_{(i)} = 1 - e(t_{(i)})$

Dengan uji logrank diperoleh

t_i	$m_{(i)}$	$r_{(i)}$	$m_{(i)} / r_{(i)i}$	$e(t_{(i)})$	$w_{(i)} = 1 - e(t_{(i)})$
15	1	10	0.100	0.100	0.900(*)
16+	--	--	--	--	-0.100
18	1	8	0.125	0.225	0.775(*)
18+	--	--	--	--	-0.225
19	2	6	0.333	0.558	0.442(*)
20	1	4	0.250	0.808	0.192(*)
20+	--	--	--	--	-0.808
23	1	2	0.500	1.308	-0.308
24+	--	--	--	--	-1.308

(*) dari sampel 2

Diperoleh

S = 0,900+0,775+0,442+0,442+0,192 =2,751

Var (S) = 1,210

Statistik uji

$$L = S / \sqrt{Var(S)} = 2.751 / \sqrt{1.21} = 2.5.$$

Ternyata $L > Z_\alpha$ maka H_0 ditolak.

Statistik Logrank S hampir sama dengan jumlah observasi kegagalan dikurangi ekspektasi kegagalan bersyarat yang dihitung setiap waktu kegagalan atau selisih antara observasi dengan ekspektasi kegagalan dalam satu kelompok. Hal ini serupa dengan Chi-square test, yang membandingkan jumlah observasi kegagalan dengan ekspektasi nya. Misalkan O_1 dan O_2 adalah jumlah observasi dan E_1 dan E_2 adalah Ekspektasi jumlah yang kematian dalam dua kelompok.

Statistik ujinya adalah

$$\chi^2 = \frac{(O_1 - E_1)^2}{E_1} + \frac{(O_2 - E_2)}{E_2}$$

yang mendekati diastribusi Chi-Square dengan derajat bebas 1. Untuk menghitung E_1 dan E_2, ambil d_t adalah jumlah yang mati pada waktu t. n_{1t} dan jumlah yang beresiko mati lebih dari t dalam kelompok 1 dan 2. Ekspektasi kematian untuk kelompok 1 dan 2 adalah

$$e_{1t} = \frac{n_{1t}}{n_{1t} + n_{2t}} d_t \qquad e_{2t} = \frac{n_{2t}}{n_{1t} + n_{2t}} d_t$$

Sehingga ekspektasi kematian total dalam dua kelompok adalah sbb:

$$E_1 = \sum_t e_{1t} \qquad E_2 = \sum_t e_{2t}$$

Dari contoh di atas diperoleh

T	d_t	n_{1t}	n_{2t}	e_{1t}	e_{2t}
15	1	5	5	0.50	0.50
18	1	4	4	0.50	0.50
19	2	3	3	1.00	1.00
20	1	3	1	0.75	0.25
23	1	2	0	1.00	0.00
Total				**3.75**	**2.25**

Di sini $O_1 = 1$ dan $O_2 = 5$

$$\chi^2 = \frac{(1 - 3.75)^2}{3.75} + \frac{(5 - 2.25)^2}{2.25} = 5.378 > \chi_1^2 \text{ yang berarti } H_0$$

4.3.2 Latihan 3

10 pasien kanker diberi tambahan obat jenis A dan 10 pasien lainnya tidak diberi obat tambahan (kontrol), dicatat waktu kambuhnya sbb

Obat A	6	6	6	7	9+	10+	10	11+	13	16
Kontrol	1	2	2	3	4	4	5	5	8	8

Ujilah dengan metode logrank test untuk mengetahui apakah tambahan obat jenis A lebih efektif dibandingkan jika tidak diberi tambahan obat A!

4.3.3 Rangkuman

Logrank Test adalah uji dua sampel berdasarkan himpunan skor-skor W_i yang ditentukan untuk observasi. Skor tersebut berupa fungsi logaritma dari fungsi survival yaitu

$$-e(t_{(i)}) = -\sum_{j \le t_{(i)}} \frac{m_{(j)}}{r_{(j)}}$$

Dimana $m(i)$ adalah jumlah kegagalan pada saat t_i, $r(i)$ adalah jumlah observasi tersensor atau gagal dalam $R(t(i))$ dan $r(t(i))$ adalah himpunan individu beresiko pada waktu $t(i)$

Skor yang disarankan adalah :

$W_i = 1 - e(t(i))$; untuk observasi tidak tersensor $t(i)$

$W_i = -e(T)$; untuk observasi tersensor pada T

Dalam penerapannya,

$W_i = - e(t(i))$; untuk observasi tersensor t_i+

Dimana $t(i)$ adalah observasi tidak tersensor terbesar sehingga $t_{(j)} \le t_i^+$.

4.3.4 Test Formatif 3

Dibawah ini adalah data waktu kambuh dan data kegagalan (mati) dari 12 pasien yang diberi 2 macam perlakuan masing-masing 6 pasien.

Pasien	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Perlakuan	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2
kambuh	34+	4	6	2	6	24	4	27+	21+	18+	6	3
Mati	34+	4	11	5	20	24+	8	27+	21+	18+	16+	7

1. Dengan uji logrank test untuk data waktu kambuh , $m_{(i)} / r_{(i)}$ untuk t=2 adalah

   a. 0.04 b. 0.08

   c. 0.12 d. 0.16

2. Untuk data waktu kambuh $m_{(i)} / r_{(i)}$ untuk t=4 adalah

   a. 0.2 b. 0.4

   c. 0.6 d. 0.8

3. Untuk data waktu kambuh $e(t_i)$ untuk t=2 adalah

   a. 0.023 b. 0.053

   c. 0.083 d. 0.113

4. Untuk data waktu kambuh $e(t_i)$ untuk t=4 adalah

   a. 0.174 b. 0.374

   c. 0.474 d. 0.674

5. Untuk data waktu kambuh w_i untuk t=2 adalah

   a. 0.017 b. 0.317

   c. 0.617 d. 0.917

6. Untuk data waktu kegagalan $m_{(i)} / r_{(i)}$ untuk t=4 adalah

   a. 0.043 b. 0.083

   c. 0.123 d. 0.163

7. Untuk data waktu kegagalan $m_{(i)} / r_{(i)}$ untuk t=8 adalah

   a. 0.11 b. 0.22

   c. 0.33 d. 0.44

8. Untuk data waktu kegagalan $e(t_i)$ untuk t=4 adalah

   a. 0.043 c. 0.083

   b. 0.123 d. 0.163

9. Untuk data waktu kegagalan $e(t_i)$ untuk t=8 adalah

   a. 0.184 c. 0.284

   b. 0.384 d. 0.484

10. Untuk data waktu kegagalan w_i untuk t=4 adalah

    a. 0.317 c. 0.317

    c. 0.717 d. 0.917

4.3.5 Umpan Balik dan Tindak Lanjut

Cocokkanlah jawaban anda dengan kunci jawaban test formatif 1 yang ada di bagian akhir bab ini. Hitung jawaban anda yang benar dan gunakan rumus di bawah untuk menghitung tingkat penguasaaan anada terhadap materi kegiatan belajar pada bagian ini.

Rumus

$$\text{Tingkat penguasaan} = \frac{\text{jumlah benar}}{10} \times 100\%$$

Arti penguasaan yang anda capai:

90% – 100% = baik sekali

80% – 89% = baik

70% – 79% = cukup

– 69% = kurang

Kalau anda mencapai tingkat penguasaan 80% atau lebih anda dapat meneruskan kegiatan belajar selanjutnya. Tetapi kalau kurang anda harus mengulang terutama bagian yang belum anda kuasai

4.4 Kegiatan Belajar 4

PETO DAN PETO SEBAGAI GENERALISASI UJI WILCOXON

4.4.1 Uraian dan contoh

Generalisasi yang lain dariWilcoxon's Test tentang penggolongan dua sampel dijelaskan oleh Peto and Peto (1972). Serupa dengan Logrank Test, test ini menentukan skor/nilai setiap observasi. Untuk observasi tidak tersensor skornya adalah $u_i = S(t_i) + S(t_{i-1}) - 1$ sedangkan untuk observasi tersensor $u_i = S(t_i) - 1$. $S(t_i)$ diperoleh dari estimasi Kaplan Meier dengan

$$S(t_i) = S(t_{i-1})\frac{n-i}{n-i+1} \text{ dan } S(t_0) = 0.$$

t_i	S(t)	u_i
15	0.900	1 + 0.900 – 1 = 0.900
16+	---	0.900 - 1 = -0.100(*)
18	0.788	0.900 + 0.788 – 1 = 0.688
18+	---	0.788 - 1 = -0.212(*)

19	0.657	0.788 + 0.657 – 1 = 0.445
19	0.526	0.526 + 0.657 - 1 = 0.183
20	0.395	0.395 + 0.526 – 1 = -0.079
20+	---	0.395 - 1 = -0.605(*)
23	0.197	0.197 + 0.395 – 1 = -0.408(*)
24+	---	0.197 - 1 = -0.803(*)

Diperoleh

$$S = -0.100 - 0.212 - 0.605 - 0.408 - 0.803 = -2.128$$

$$Var(S) = \frac{(5)(5)[(0.9)^2 + \ldots + (-0.803)^2]}{(10)(9)} = 0.765$$

Statistik ujinya

$$Z = \frac{-2.128}{\sqrt{0.765}} = -2.433 < -Z_{0.05}$$

yang berarti H_0 ditolak

4.4.2 Latihan 4

Dua puluh satu pasien leukimia diberi obat 6-MP dan kelompok lainnya sebagai kontrol. Diamati waktu kambuhnya sbb:

Kel 1 (obat 6-MP)	6+ 6 6 6 7 9+ 10+ 10 11+ 13 16 17+ 19+ 20+ 22 23 25+ 32+ 32+ 34+ 35+
Kel 2 (kontrol)	1 1 2 2 3 4 4 5 5 8 8 8 8 11 11 12 12 15 17 22 23

Dengan metode Peto and Peto, hitunglah

a. Fungsi Ketahan kumulatifnya (S(t)) masing-masing perlakuan
b. Fungsi hazardnya kumulatifnya (H(t)) masing-masing perlakuan
c. Variansi S(t) masing-masing perlakuan
d. Variansi H(t) masing-masing perlakuan
e. Rata-rata waktu ketahannya dan variansi nya masing-masing perlakuan
f. Interval kepercayaan rata-rata waktu ketahannya masing-masing perlakuan
g. Ujilah ketahanan kedua kelompok

4.4.3 Rangkuman

Uji Peto and Peto (1972) sebagai generalisasi dari Wilcoxon's test serupa dengan Logrank test yaitu dengan cata menentukan skor/nilai setiap observasi. Untuk observasi tidak tersensor skornya adalah $u_i = S(t_i) + S(t_{i-1}) - 1$ sedangkan untuk observasi tersensor $u_i = S(t_i) - 1$. $S(t_i)$ diperoleh dari estimasi Kaplan Meier dengan $S(t_i) = S(t_{i-1})\frac{n-i}{n-i+1}$ dan $S(t_0) = 0$.

4.4.4 Test formatif 4

Dua puluh satu pasien leukimia diberi obat 6-MP dan kelompok lainnya sebagai kontrol. Diamati waktu kambuhnya sbb:

Kel 1 (obat 6-MP)	6+ 6 6 6 7 9+ 10+ 10 11+ 13 16 17+ 19+ 20+ 22 23 25+ 32+ 32+ 34+ 35+
Kel 2 (kontrol)	1 1 2 2 3 4 4 5 5 8 8 8 8 11 11 12 12 15 17 22 23

1. Untuk kelompok 1 (obat 6-MP), S(6) adalah
   a 0.90 b. 0.85
   c. 0.80 d. 0.75
2. Variansi S(6)
   a. 0.006 b. 0.009
   b. 0.011 d. 0.013
3. Rata-rata waktu ketahanannya
   a. 17.9 b. 18.9
   c. 19.9 d. 20.9
4. Variansi dari rata-rata waktu ketahannya
   a. 4.71 b. 3.71
   c. 2.71 d. 1.71
5. Untuk kelompok 2 (kontrol), S(5) adalah
   a. 0.27 b. 0.37
   c. 0.47 d. 0.57
6. Variansi S(50)
   a. 0.01 b. 0.02
   b. 0.03 d. 0.04

7. Rata-rata waktu ketahanannya

   a. 5.67 b. 6.67

   c. 8.67 d. 9.67

8. Variansi waktu ketahanannya

   a. 1.39 b. 1.59

   c. 1.79 d. 1.99

9. S untuk kelompok 1 dan S untuk kelompok 2

   a. -6 dan 6 c. -7 dan 7

   c. -8 dan 8 d. -9 dan 9

10. Statistik uji untuk uji Peto and Peto berdasarkan kelompok 1

    a. -1.36 b. -2.36

    c. -3.36 d. -4.46

4.4.5 Umpan Balik dan tindak lanjut

Cocokkanlah jawaban anda dengan kunci jawaban test formatif 1 yang ada di bagian akhir bab ini. Hitung jawaban anda yang benar dan gunakan rumus di bawah untuk menghitung tingkat penguasaaan anada terhadap materi kegiatan belajar pada bagian ini.

Rumus

$$\text{Tingkat penguasaan} = \frac{\text{jumlah benar}}{10} \times 100\%$$

Arti penguasaan yang anda capai:

90% – 100% = baik sekali

80% – 89% = baik

70% – 79% = cukup

– 69% = kurang

Kalau anda mencapai tingkat penguasaan 80% atau lebih anda dapat meneruskan kegiatan belajar selanjutnya. Tetapi kalau kurang anda harus mengulang terutama bagian yang belum anda kuasai

4.5 Kegiatan Belajar 5

UJI COX'S F

4.5.1 Uraian dan Contoh

Langkah-langkah Uji Cox's F

1. Susun Observasi dari dua kelompok dengan urutan naik
2. Hitung $t_{rnt} = \frac{1}{n} + ... + \frac{1}{n-r+1}$ dengan n adalah observasi total dalam dua kelompok
3. Untuk data tidak tersensor himpunan n observasi ditentukan oleh $\{t_{rn}\}$. Score rata-rata sampel untuk masing-masing kelompok dinotasikan $\overline{t_1}$ dan $\overline{t_2}$. Statistik ujinya $\overline{t_1}/\overline{t_2}$ yang berdistribusi F dengan derajat bebas $(2n_1;2n_2)$
4. Untuk observasi tersensor, skor rata-rata kelompok 1 adalah $\overline{t_1} = \frac{r_1\overline{t_1}' + (n_1 - r_1)t_{(p+1)n}}{r_1}$ dimana $\overline{t_1}$ adalah skor rata-rata individu yang mati pada kelompok 1. Dengan cara yang sama untuk kelompok 2, $\overline{t_2} = \frac{r_2\overline{t_2}' + (n_2 - r_2)t_{(p+1)n}}{r_2}$ dimana $\overline{t_2}$ adalah skor rata-rata individu yang mati pada kelompok 2. Statistik uji $\frac{\overline{t_1}}{\overline{t_2}}$ yang berdistribusi F dengan derajat bebas $(2r_1,2r_2)$

Contoh 4 :

Percobaan untuk membandingkan dua perlakuan terhadap tumor dengan menggunakan 6 tikus untuk perlakuan 1 dan 6 tikus untuk perlakuan 2. Percobaan berhenti setelah 30 hari. Waktu tahan hidupnya sbb:

Perlakuan A : 8; 8; 10; 12; 12; 13

Perlakuan B : 9; 12; 15; 20; 30+; 30+

Hasil perhitungannya sbb:

t_1	t_{rn}	t_{rn} **dari sampel A**	t_{rn} **dari sampel B**

8	$\frac{1}{12} = 0.0831$	$\frac{(0.0831 + 0.174)}{2} = 0.129$	--
8	$\frac{1}{12} + \frac{1}{11} = 0.174$	0.129	--
9	$\frac{1}{12} + \frac{1}{11} + \frac{1}{10} = 0.274$	--	0.274
10	$\frac{1}{12} + \frac{1}{11} + \frac{1}{10} + \frac{1}{9} = 0.385$	0.385	--
12	$0.385 + \frac{1}{8} = 0.510$	$\frac{(0.510 + 0.653 + 0.820)}{3} = 0.661$	--
12	$0.510 + \frac{1}{7} = 0.653$	0.661	--
12	$0.653 + \frac{1}{6} = 0.820$	--	0.661
13	$0.820 + \frac{1}{5} = 1.020$	1.020	--
15	$1.020 + \frac{1}{4} = 1.270$	--	1.270
20	$1.270 + \frac{1}{3} = 1.603$	--	1.603
30+	$1.603 + \frac{1}{2} = 2.103$	--	2.103
30+	2.103	--	2.103
	Jumlah	2.985	8.014

Dari tabel di atas diperoleh

$$\bar{t}_1 = \frac{2.985}{6} = 0.498$$

$$\bar{t}_1' = \frac{(0.129 + 0.129 + 0.385 + 0.661 + 0.661 + 1.020)}{6} = 0.498$$

$$\bar{t}_2 = \frac{8.014}{4} = 2.004$$

$$\bar{t}_2' = \frac{(0.274 + 0.661 + 1.270 + 1.603)}{4} = 0.952$$

Statistik uji

$$\frac{\bar{t}_1}{\bar{t}_2} = \frac{0.498}{2.004} = 0.249 < F_{(!@::)}$$

4.5.2 Latihan 5

Dua puluh satu pasien leukimia diberi obat 6-MP dan kelompok lainnya sebagai kontrol. Diamati waktu kambuhnya sbb:

Kelompok 1 (obat 6-MP)	6+ 6 6 6 7 9+ 10+ 10 11+ 13 16 17+ 19+ 20+ 22 23 25+ 32+ 32+ 34+ 35+
Kelompok 2 (kontrol)	1 1 2 2 3 4 4 5 5 8 8 8 8 11 11 12 12 15 17 22 23

Lakukan uji untuk membandingkan 2 perkuan diatas dengan uji Cox's F

4.5.3 Rangkuman

Uji Cox's F juga bertujuan untuk menguji perbedaan dua distribusi ketahanan. Uji Cox's F mendasarkan pada Score rata-rata sampel untuk masing-masing kelompok dinotasikan $\bar{t}_1$ dan $\bar{t}_2$. Statistik ujinya $\bar{t}_1/\bar{t}_2$ yang berdistribusi F dengan derajat bebas $(2n_1;2n_2)$

4.5.4 Test Formatif 5

Diketahui data waktu kegagalan pasien leukimia dengan dua macam perlakuan masing-masing 5 pasien adalah sbb:

Perlakuan A	24	2	6	17	34+
Perlakuan B	16	5	9	8	8

1. t_{mi} pada saat $t_i = 2$ adalah
   a. 0.1 b. 0.2
   c. 0.3 d. 0.4
2. t_{mi} pada saat $t_i = 24$ adalah
   a. 0.83 b. 1.83
   c. 0.43 d. 1.43

3. $\overline{t_1}$ adalah

a. 0.27 b. 0.47

c. 0.67 d. 0.87

4. $\overline{t_2}$ adalah

a. 0.42 b. 0.82

c. 1.42 d. 1.82

5. Statistik ujinya bernilai

a. 0.06 b. 0.09

c. 1.06 d. 1.09

4.4.5 Umpan Balik dan tindak lanjut

Cocokkanlah jawaban anda dengan kunci jawaban test formatif 1 yang ada di bagian akhir bab ini. Hitung jawaban anda yang benar dan gunakan rumus di bawah untuk menghitung tingkat penguasaaan anada terhadap materi kegiatan belajar pada bagian ini.

Rumus

$$\text{Tingkat penguasaan} = \frac{\text{jumlah benar}}{10} \times 100\%$$

Arti penguasaan yang anda capai:

90% – 100% = baik sekali

80% – 89% = baik

70% – 79% = cukup

– 69% = kurang

Kalau anda mencapai tingkat penguasaan 80% atau lebih anda dapat meneruskan kegiatan belajar selanjutnya. Tetapi kalau kurang anda harus mengulang terutama bagian yang belum anda kuasai

5. Kunci Jawaban Test Formatif 1

<u>Test Formatif 1</u>

1. d 2. a 3. b 4. d 5. c

<u>Test Formatif 2</u>

1. c 2. a 3. b 4. a 5. c

Test Formatif 3

1. b	2. a	3. c	4. b	5. d
6. b	7. a	8. b	9. c	10. d

Test Formatif 4

1. b	2. a	3. a	4. c	5. d
6. c	7. c	8. d	9. a	10. c

Test Formatif 5

1. a	2. b	3. d	4. b	5. c

6. Daftar Pustaka

Lee, E.T. 1992. *Statistical Methods for Survival Data Analysis.* Canada: John Wiley and Sons, Inc

Lawless, J.F. 1982. *Statistical Model and Methods for Lifetime Data. Canada:* John Wiley and Sons, Inc