BUKU AJAR
MATA KULIAH MATEMATIKA II

MODUL :

DIFFERENSIAL/TURUNAN

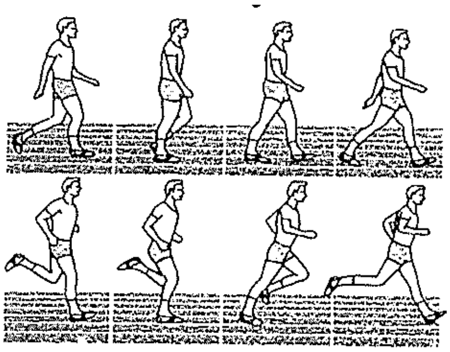
Oleh :
Ir. Dwi Haryo Ismunarti, MSi
NIP. 131 993 343

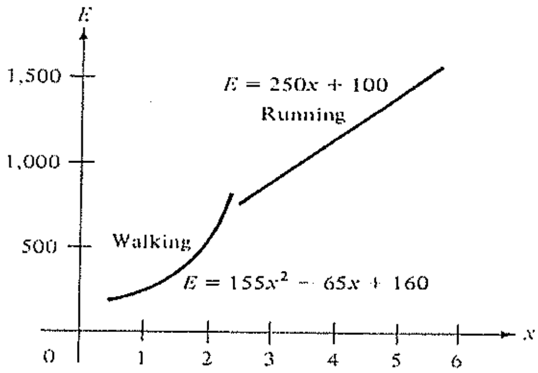
PROGRAM STUDI ILMU KELAUTAN
JURUSAN ILMU KELAUTAN
FAKULTAS PERIKANAN DAN ILMU KELAUTAN
UNIVERSITAS DIPONEGORO

MATERI : DIFFERENTIAL/TURUNAN

Oleh : Ir. Dwi Haryo Ismunarti, MSi

Semakin cepat seseorang berjalan atau berlari semakin besar energi yang diperlukan. Ada perbedaan pola energi yang diperlukan untuk berjalan dan berlari. Energi yang diperlukan untuk berlari mengikuti pola linear dimana kemiringan garis sepanjang kurva sama atau konstan. Sedangkan untuk berjalan energi yang diperlukan mengikuti pola kuadratik, dimana kemiringan garis berbeda/meningkat sepanjang grafik.

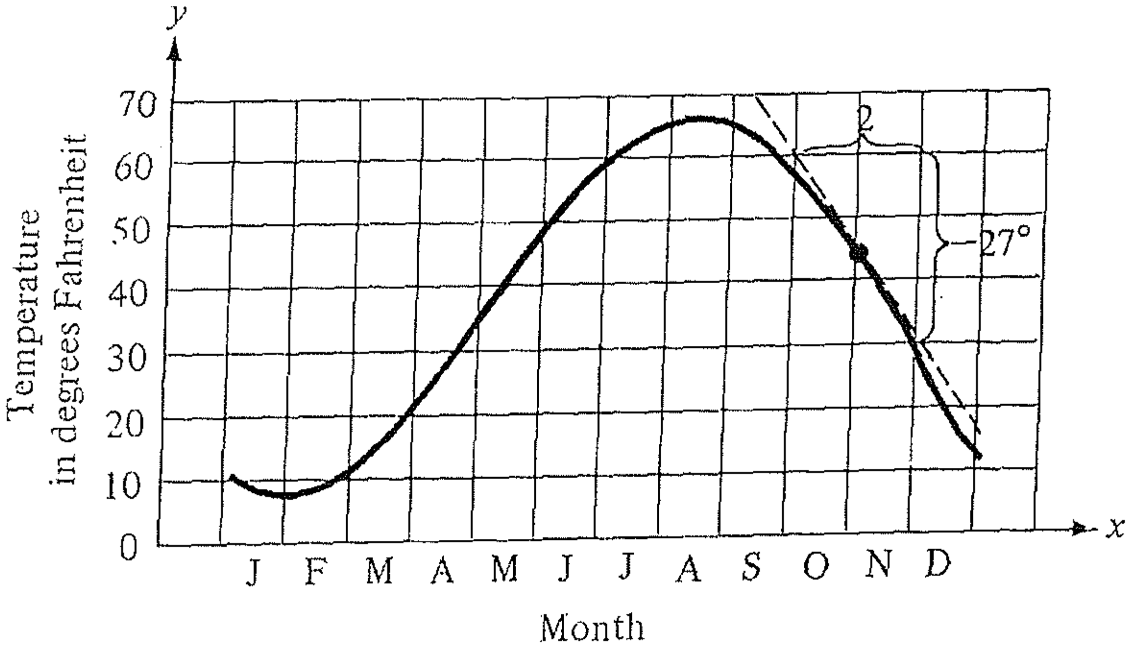




Gambar 1. (Larson and Hostetler,1987)

Pada bab sebelumnya tentang persamaan garis telah dibahas kemiringan menunjukkan perubahan pada sumbu tegak Y (energi) setiap satu satuan pada sumbu mendatar X (kecepatan). Kemirimgam garis didefinisikan sebagai $m = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ Untuk selanjutnya permasalahan adalah mencari kemiringan garis di titik sepanjang kurva.

Gambar berikut menunjukkan suhu rerata harian (Fahrenheit) selama satu tahun di Duluth, Minnesota. Ada kenaikan suhu pada bulan Januari sampai Juli kemudian suhu turun sampai bulan Desember. Pada 2 bulan terakhir terjadi penurunan suhu sebesar 27°F besarnya perubahan suhu adalah $m = \frac{perubahan\ y}{perubahan\ x} = \frac{-27}{2} = -13{,}5$.



Gambar2.Rerata suhu harian di Duluth, Minnesota (Larson and Hostetler,1987)

Artinya dari bulan Oktober ke bulan Nopember terjadi penurunan suhu rata-rata harian sebesar 13,5°F

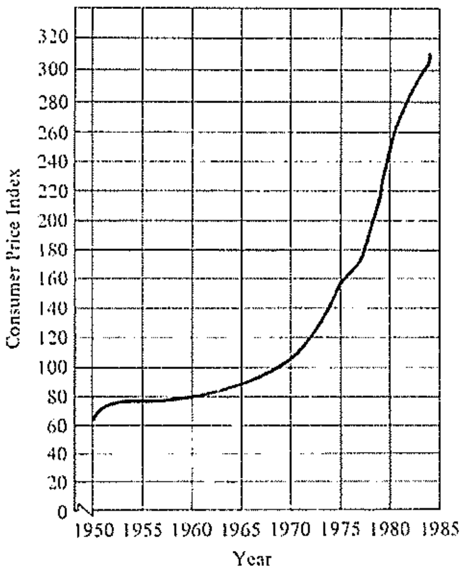
Didalam kalkulus fungsi dari kemiringan garis dinamakan *derivative fungsi* dinotasikan $\frac{dy}{dx}$ atau $f'(x)$. Suatu fungsi yang pada titik x memiliki *derivative* dikatakan dapat diturunkan (*differentiable*) pada x dan prosesnya dinamakan turunan (*differentiation*)

Definisi derivative/turunan Turunan fungsi f adalah fungsi f' yang nilainya pada sembarang titik x adalah : $f'(x) = \frac{df(x)}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ jika limitnya ada

Diferential dalam aplikasinya juga digunakan untuk menghitung rata-rata perubahan. Misalkan rata-rata perubahan Consumer Price Index(CPI) pada tahun 1979 berdasarkan table berikut adalah

$$\frac{CPI(1980)-CPI(1979)}{1980-1979}=29{,}3$$ dan tingkat inflasi pada tahun 1979 adalah 23,9/217.7 = 13.5 %

Year	CPI (all items)	Inflation rate (%)
1967	100.0	4.2
1968	104.2	5.4
1969	109.8	5.9
1970	116.3	4.3
1971	121.3	3.3
1972	125.3	6.2
1973	133.1	11.0
1974	147.7	9.1
1975	161.2	5.8
1976	170.5	6.5
1977	181.5	7.7
1978	195.3	11.5
1979	217.7	13.5
1980	247.0	10.2
1981	272.3	6.0
1982	288.6	3.0
1983	297.4	4.5
1984	310.7	—



Teorema

1. Jika f(x) = k, k adalah konstanta maka f '(x) = 0
2. Jika f(x) = x, maka f ' (x) = 1
3. Jika f(x) = x^n , dimana n bilangan bulat positip maka f '(x) = n x^{n-1}
4. Jika f suatu fungsi dan k konstanta maka (kf)' (x) = k f '(x)
5. Jika f dan g fungsi terdefinisikan maka (f ± g)'(x) = f '(x) ± g '(x)
6. Jika f dan g fungsi terdefinisi maka (f.g)'(x) = f (x) g' (x) + f '(x) g(x)
7. Jika f dan g fungsi terdefinisi maka $\left(\frac{f}{g}\right)'(x)=\frac{g(x)f'(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}$

Teladan Cari diferensial dari

$$y = \frac{2x^2 - 4x + 3}{2 - 3x}$$

f (x) = 2x ^{2} – 4x + 3 maka f '(x) = 4x – 4

g (x) = 2 -3x maka g' (x) = -3 sehingga

y' adalah

$$= \frac{(2 - 3x)(4x - 4) - (2x^2 - 4x + 3)(-3)}{(2 - 3x)^2}$$

$$= \frac{-12x^2 + 20x - 8 + (6x^2 - 12x + 9)}{(2 - 3x)^2}$$

$$= \frac{-6x^2 + 8x + 1}{(2 - 3x)^2}$$

Teladan

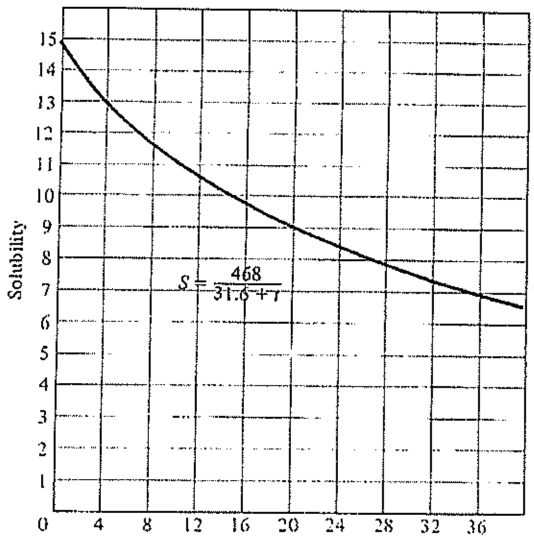
Jumlah oksigen terlarut dalam perairan tergantung pada suhu, salinitas dan tekanan. Perairan yang dingin lebih tinggi oksigen terlarutnya dibanding perairan yang hangat. Air tawar memiliki oksigen terlarut lebih tinggi dibanding air laut. Sedangkan di dasar perairan oksigen terlarut lebih tinggi dibanding di permukaan perairan. Hubungan antara suhu dan oksigen terlarut di perairan tawar adalah (Thom &Cockburn dalam Larson &Hostetler) $S(mg/liter) = \frac{468}{31,6 + t}$ $,0 \le t(^oC)$

Rata-rata perubahan oksigen terlarut setiap kenaikan suhu 1°C adalah.

$$\frac{dS}{dt} = \frac{(31.6 + t)(0) - (468)(1)}{(31.6 + t)^2}$$

$$= -\frac{468}{(31.6 + t)^2}$$

tanda negative menunjukkan oksigen terlarut berkurang setiap kenaikan suhu

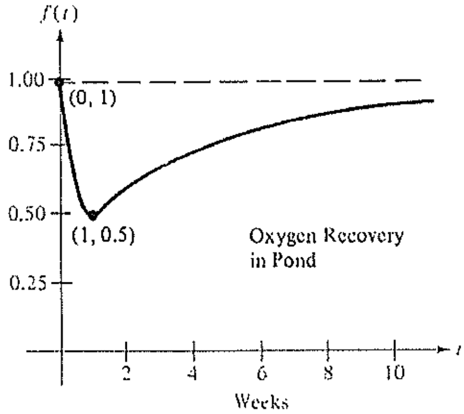


Solubility of Oxygen in Pure Water at Sea Level

Teladan

Jika f(t) adalah jumlah oksigen dari proses oksidasi sampah organic setelah minggu ke t.

dan fungsi f(t) adalah $f(t) = \dfrac{t^2 - t + 1}{t^2 + 1}\, 0 \le t \le \infty$



g(t) = $t^2 - t + 1$ maka g '(t) = 2t – 1 dan h(t) = $t^2 + 1$ maka h' (t) = 2t sehingga

$$
\begin{aligned}
f'(t) &= \frac{(t^2+1)(2t-1)-(t^2-t+1)(2t)}{(t^2+1)^2} \\
&= \frac{2t^3-t^2+2t-1-2t^3+2t^2-2t}{(t^2+1)^2} \\
&= \frac{t^2-1}{(t^2+1)^2}
\end{aligned}
$$

Aturan rantai

Misalkan C (total cost dalam Rupiah) sebagai fungsi dari banyaknya unit (q) yang diproduksi atau $C = f(q)$. Sedangkan q (unit) adalah fungsi dari waktu produksi (t jam) atau $q = f(t)$. Rata-rata cost per unit produk (Rp/unit) adalah dC / dq sedangkan rata-rata unit yang diproduksi per satuan waktu (unit/jam) adalah dq / dt. Rata-rata cost yang dikeluarkan setiap satuan waktu (Rupiah/jam) adalah $\frac{dC}{dt} = \frac{dC}{dq}\frac{dq}{dt}$

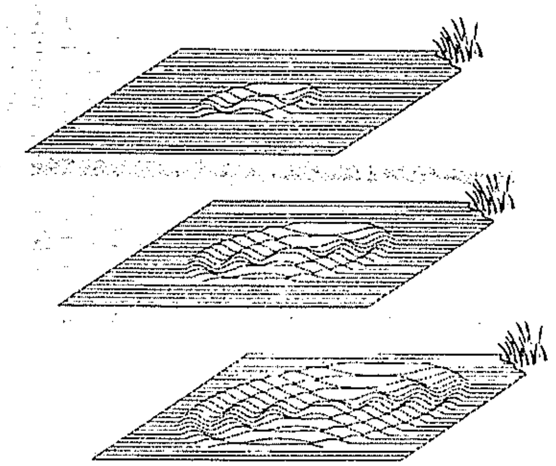
Secara umum dituliskan jika $y = f(u)$ sedangkan $u = f(x)$, maka turunan y terhadap x adalah $\left.dy\middle/dx\right. = \left.dy\middle/du\right. + \left.du\middle/dx\right.$

Teladan . Jika $y = u^3 - 3u^2 + 1$ dan $u = x^2 + 2$

$$
\begin{aligned}
dy/du &= 3u^2 - 6u \text{ dan } du/dx = 2x \\
dy/dx &= (3u^2 - 6u)\,(2x) \\
&= [3(x^2+2)^2 - 6(x^2+2)]\,(2x) \\
&\quad 6x(x^2+2)[(x^2+2)-2] \\
&\quad 6x^3(x^2+2)
\end{aligned}
$$

Teladan :

Sebuah kerikil dijatuhkan di permukaan air yang tenang Kemudian akan timbul riak membentuk ligkaran mengelilingi tempat dimana jatuhnya kerikil, dan lingkaran tersebut semakin meluas. Jika r jari-jari lingkaran yang bertambah besar secara konstan yaitu 1 meter/detik. Pada saat jari-jari lingkaran 4 meter, berapa perubahan luasan riak yang ditimbulkan?



Jawab : A (luas lingkaran) adalah $= \Pi r^2$

Rata-rata perubahan jari-jari r per satuan waktu adalah $\frac{dr}{dt} = 1$ pada r = 4. Untuk mendapatkan $\frac{dA}{dt}$ pada r = 4 adalah

$\frac{dA}{dt} = \frac{d(\Pi r^2)}{dt} = 2\Pi r \frac{dr}{dt}$ pada r = 4 maka $\frac{dA}{dt} = 2\Pi(4)(1) = 8\Pi$ meter ^{2}/ detik

Turunan Fungsi implicit

Fungsi pada bahasan sebelumnya merupakan hubungan 2 variabel yang dinyatakan secara jelas / eksplisit sebagai fungsi y = f(x). $y = x^3 - 3x^2 + 1$ atau

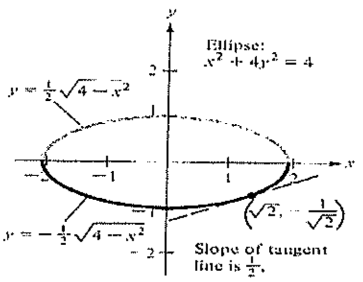
$f(t) = \dfrac{t^2 - t + 1}{t^2 + 1}$. Tetapi ada kalanya hubungan antar 2 variabel ini dinyatakan dengan fungsi yang tidak jelas tersurat / eksplisit, misalkan xy = 1, fungsi lingkaran $x^2 + y^2 = 9$.

Teladan

Determine the slope of the tangent line to the ellipse given by

$$x^2 + 4y^2 = 4$$

at the point $(\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$,



1. Implicit differentiation of both sides of the equation $x^2 + 4y^2 = 4$ with respect to x yields

$$\frac{d}{dx}[x^2 + 4y^2] = \frac{d}{dx}[4]$$

$$2x + 8y\left(\frac{dy}{dx}\right) = 0$$

2. Collecting terms involving dy/dx gives us

$$8y\left(\frac{dy}{dx}\right) = -2x$$

3. Solving for dy/dx we have

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2x}{8y} = -\frac{x}{4y}$$

Therefore at $(\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$ the slope is

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-\sqrt{2}}{-4/\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$$

1. Jika f(0) = 4; f'(0) = -1; g(0) = -3; g'(0) = 5
hitung a. (f.g)'(0)
b. (f+g)'(0)
c. (f/g)'(0)
2. Carilah titik pada grafik $y = x^3 - x^2$ yang garis singgungnya mendatar.
3. Carilah dy/dx dari :

a. $y = \left(\frac{x^2 - 1}{x + 4}\right)^4$ b. $xy^2 - x + 16 = 0$

4. Terjemahkan dalam bahasa matematis :
Sebuah titik bergerak sepanjang garis mendatar. Posisi saat detik ke t adalah s sentimeter. a. Titik bergerak berbalik arah
b. Titik bergerak makin lambat

SOAL UJIAN

A. SOAL BAGIAN DIFERENSIAL (IR. DWI HARYO ISMUNARTI, MSi)

1. Carilah dy/dx dari :

a. $y = \left(\frac{x^2 - 1}{x + 4}\right)^4$ b. $x^2y^2 - 3xy = 10y$

2. Buatlah sketsa grafik berikut $f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 1}$

SOAL UJIAN MID SEMESTER (GENAP 2001/2002)

1. Lengkapi soal berikut :
   a. Jika y = f(x)g(x) maka y'= …….. dan y''=………..
   b. Jika $y = e^{-3x}$ maka y'=………. dan persamaan garis singgung di titik (0,1) adalah y = ……………
   c. Jika f '(x)>0 untuk $\forall x \in [a,b]$ maka nilai maksimum f(x) ada di titik (…,….)
2. Cari persamaan garis singgung kurva $y + \cos(xy^2) + 3x^2 = 4$ di titik (1,0)
3. Jika $f(x) = x^2(x - 4)$ cari dimana fungsi naik/turun , cekung atas/bawah, nilai ekstrim fungsi dan sketsalah grafik f(x)

SOAL UJIAN SEMESTER (GENAP 2001/2002)

1. Lengkapi soal berikut :
   a. Jika $y = f(x)g(x)$ maka y'= …….. dan y''=…………
   b. Grafik $y = x^3 - x^2$ memiliki garis singgung mendatar di titik (…..,….) yaitu y = ……
   c. Jika f '(x)>0 untuk $\forall x \in [a,b]$ maka nilai maksimum f(x) ada di titik (…,….)
2. Cari dy/dx dari :
   d. $y + \cos(xy^2) + 3x^2 = 4$
   e. $y = e^{-3x}$
3. Jika $f(x) = x^2(x - 4)$ cari dimana fungsi naik/turun , cekung atas/bawah, nilai ekstrim fungsi dan sketsalah grafik f(x)

SOAL MATEMATIKA II (GENAP 2002/2003)

1. Lengkapi soal berikut :
   a. Jika dan $y = f(x)g(x)$ maka y'= …….. dan y''=…………
   b. Jika $y = e^{-3x}$ maka y'=………. dan persamaan garis singgung di titik (0,1) adalah y = …………..
2. Carilah dy/dx dari :
   a. $y = \left(\dfrac{x^2 - 1}{x + 4}\right)^4$
   b. $x^2y^2 - 3xy = 10y$
3. Jika $f(x) = x^3 - x^2$ cari dimana fungsi naik/turun , cekung atas/bawah, nilai ekstrim fungsi dan sketsalah grafik f(x)

SOAL MID SEMESTER (GENAP 2005/2006)

1. (30) Banyaknya bakteri (N) setelah t hari dikulturkan adalah :

$$y = \left(\frac{x^2 - 1}{x + 4}\right)^4$$ Berapa laju penambahannya pada hari ke 1; ke 4?

BAB I

"HIMPUNAN"

1.1. PENGERTIAN

Himpunan / Set ialah : sekumpulan / sejumlah benda atau obyek yang berada dalam satu kesatuan dan mempunyai sifat keterikatan yang jelas.

Teladan : Δ Sejumlah hewan di Kebun Binatang
Δ Mahasiswa dalam satu ruang kuliah
Δ Sejumlah bilangan bulat

Himpunan = Gugus.

Himpunan yang tersusun dari benda-benda atau obyek maka benda atau obyek, tersebut dinamakan "anggota-anggota atau unsur-unsur" dalam himpunan / gugus.

Anggota-anggota himpunan mempunyai keterkaitan yang disebut "sifat himpunan".

Sifat keterkaitan dalam himpunan ialah :

a. Tiap obyek unsur dalam himpunan tersebut dapat dibedakan yang satu dari yang lain.
b. Dapat dibedakan adanya unsur obyek yang terdapat dalam himpunan dengan yang bukan dalam himpunan tersebut.

1.1.1. Lambang Unsur

Difinisi : Setiap anggota suatu himpunan disebut unsur - elemen himpunan yang bersangkutan.

Teladan : Himpunan bilangan bulat positif lebih kecil dari sembilan. Dapat ditulis H = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8} artinya : $1 \in H$; $2 \in H$; $3 \in H$ dan seterusnya.

Cara menyatakan Himpunan

Cara menyatakan suatu himpunan dapat dilakukan dengan 2 cara :

1. Cara pendaftaran (Roster Method)
2. Cara pencirian (Ruler Method)

Cara Pendaftaran

Cara ini dipakai untuk menuliskan suatu himpunan dengan mendaftarkan semua unsur yang termasuk dalam himpunan yang bersangkutan dan yang berada dalam tanda {...}.

Teladan :

1. Jika N himpunan semua bilangan asli; maka N tersebut dapat dinyatakan dengan cara sebagai berikut : N = {1, 2, 3, 4, 5, ...}
2. B ialah : himpunan semua bilangan bulat positif B = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ...}
3. D ialah : himpunan bilangan yang memenuhi persamaan x - 5 = 0 maka himpunan D tersebut dapat ditulis D = {5}
4. E ialah : himpunan bilangan yang memenuhi persamaan $x^2 - x - 6 = 0$ Himpunan E dapat ditulis E = {3,-2}
5. F ialah : himpunan bilangan bulat yang memenuhi pertaksamaan $x^2 - 9 < 0$ Himpunan tersebut dapat dinyatakan F = {-2, -1, 0, 2}

Cara Pencirian (Rule Method)

Cara ini lebih singkat bila dibanding cara pertama

Teladan :

1. N = {1,2,3,4,5,6,....} dimana N ialah : himpunan semua bilangan asli, maka himpunan N tersebut dapat ditulis sebagai berikut :
   N = {n | n ialah : bilangan asli}
2. B = {1,2,3,4,5,6,7,...} dimana B ialah : himpunan semua bilangan bulat positip sehingga dapat ditulis B = {b | b ialah : bil bulat positip}
3. C = {1,2,3,4,....} dapat ditulis C = {c | c ialah : bilangan bulat negatip}
4. D ialah : himpunan yang memenuhi persamaan $x - 5 = 0$
   D = $\{x \mid x - 5 = 0\}$
5. E ialah : himpunan bilangan yang memenuhi $x^2 - x - 6 = 0$
   E = $\{x \mid x^2 - x - 6 = 0\}$
6. F ialah : himpunan bilangan bulat yang memenuhi pertaksamaan $x^2 - 9 < 0$
   F = $\{x \mid x^2 - 9 < 0 \cap x$ bulat$\}$

1.1.2. Himpunan Bagian

Difinisi : Himpunan A disebut himpunan bagian (subset) dari pada himpunan B, jika setiap unsur himpunan A ialah unsur himpunan B.

Notasi : $A \subseteq B$, dibaca A himpunan bagian B atau himpunan A termasuk himpunan B.

Teladan : $B = \{x \mid x \text{ huruf abjad}\}$, $A = \{x \mid x \text{ huruf hidup abjad}\}$, maka himpunan A merupakan himpunan bagian B. ditulis $A \subseteq B$

Difinisi : Himpunan A disebut himpunan bagian murni (Sejati) dari pada himpunan B, jika setiap unsur A merupakan unsur B dan paling sedikit ada satu unsur B yang bukan unsur himpunan A. Notasi: $A \subset B$.

Contoh : $B = \{x \mid x$ bilangan bulat antara 0 dan 10$\}$

$A = \{x \mid x$ bilangan ganjil kurang dari 7$\}$

$A \subset B$

Himpunan yang tidak mempunyai anggota (unsur) disebut himpunan kosong yang dinyatakan dengan " $\varnothing$ " dimana $\varnothing = \{\ \}$. Sedangkan himpunan kosong merupakan himpunan bagian tiap himpunan.

Contoh : $A = \{x \mid x$ kumpulan ikan di darat$\}$

$B = \{x \mid x$ kumpulan kerbau di bulan$\}$

$A = \varnothing$ dan $B = \varnothing$

Cara menghitung jumlah himpunan bagian

Himpunan dari n unsur jumlah himpunan bagiannya = 2^n

Teladan : Himpunan n = 0, jumlah himpunan bagiannya $= 2^0 = 1$

Himpunan n = 1 jumlah himpunan bagiannya $= 2^1 = 2$ dan seterusnya.

1.1.3. Jumlah Unsur Suatu Himpunan

Merupakan banyak unsur yang dikandung oleh himpunan itu dinyatakan dengan bilangan kardinal notasi n (A).

Contoh :

a. A = {a,b,c,d,e} himpunan A mempunyai 5 unsur dan ditulis n(A) = 5 Bilangan kardinal himpunan A ialah : 5.
b. $B = \varnothing$, bilangan kardinal himpunan B ialah : nol ditulis n(B) = 0.

1.1.4. Himpunan Berhingga Dan Himpunan Tak Berhingga

Himpunan berhingga (Finite Set) ialah : himpunan yang mengandung jumlah unsur terhingga, dapat dihitung.

Untuk menulis himpunan yang banyak unsurnya cukup ditulis beberapa unsur permulaan kemudian tiga titik dan unsur terakhir.

Contoh :

a. A himpunan bilang asli genap diantara 8 dan 1000.
   Ditulis A = {10,12,14, ...,998}
b. B himpunan bilangan bulat positip yang habis dibagi 3 dan kurang dari 1000. B = { 3,6,9, ...,999}

Himpunan tak berhingga (Infinite Set) ialah : himpunan yang mengandung unsur yang tidak terhingga banyak.

Untuk menulis cukup beberapa unsur permulaan dan diakhiri dengan 3 titik.

Contoh :

a. N ialah : himpunan bilangan asli ganjil. N = {1,3,5,...}
b. H ialah : himpunan bulat positip bulat positip yang lebih besar dari 20. H = {21,22,23,...}

1.1.5. Himpunan Semesta (Universal Set)

Jika semua himpunan yang sedang dibicarakan merupakan himpunan bagian dari S maka himpunan S disebut himpunan semesta.

Contoh : a. A = {a,i,u,e,o}
S = $\{x \mid x$ huruf dalan abjad latin}
b. B = {1,2,3,4,5}
S = $\{x \mid x$ ialah : bilangan asli}

1.1.6. Himpunan Komplemen

Jika A suatu himpunan dan U ialah : himpunan semestanya maka A c U. *Himpunan komplemen A ialah :* himpunan $\{x \mid x \notin$ A dan x $\in$ U} notasi A^c atau A'

Contoh : U = {1,2,3,4,5,6,7,8,9}
A = {4,5,6,7}
maka A = {1,2,3,8,9}

1.1.7. Himpunan Bersendi Dan Himpunan Lepas

Himpunan Bersendi

Himpunan bersendi (Joint Set), dua himpunan atau lebih yang masing-masing mengandung paling sedikit satu unsur sekutu, unsur sekutu = unsur yang sama.

Contoh : A = {1,2,3,4} dan B = {1,3,5,7,9}

Kedua himpunan mempunyai unsur yang sama yakni 1,3. Kedua himpunan tersebut berarti himpunan bersendi.

Himpunan Lepas.

Himpunan Lepas (Disjoint Set) dua himpunan atau lebih yang tidak mempunyai unsur sekutu.

Contoh : C = {1,3,5,7} dan D = {2,4,6}

Himpunan C dan D ialah : himpunan lepas karena tidak ada unsur sekutu.

1.2. OPERASI ANTAR HIMPUNAN

Pada operasi antar himpunan ada 3 operasi yaitu

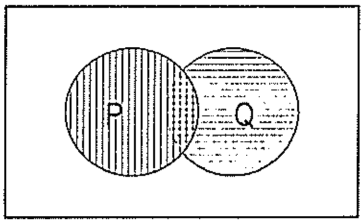
1. Operasi gabungan (union) notasinya "$\cup$"
2. Operasi irisan (intersection) notasinya "$\cap$"
3. Operasi selisih notasinya "—"

1.2.1. Operasi Gabungan (Union)

Jika ada himpunan P dan Q, maka yang disebut P gabungan Q ditulis $P \cup Q$ didifinisikan sebagai berikut : $P \cup Q = \{x \mid x \in P \text{ atau } x \in Q\}$ (lihat gb.1).

Daerah yang diarsir merupakan $P \cup Q$

Contoh:1.



P = {1,3,5,7,9}
Q = {2,4,6,8}
maka $P \cup Q$ ={1,2,3,4,5,6,7,8,9}
Jika S = {a,b,c}

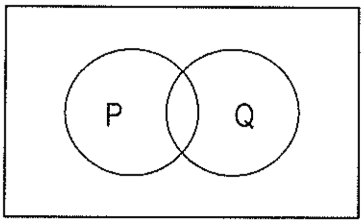
Gambar 1. $P \cup Q$

T = {a,b,c,d,e,f,g}
Maka $S \cup T$ = {a,b,c,d,e,f,g}

1.2.2. Operasi Irisan (intersection)

Jika himpunan P dan Q maka yang disebut P irisan Q dapat di tulis sebagai berikut $P \cap Q$ didifinisikan sebagai $P \cap Q = \{x \mid x \in P \text{ dan } x \in Q\}$ lihat gb.2.

Contoh 2.



P = {a,b,c,d}
Q = {c,d,e}
$P \cap Q$ = {c,d}
A = {1,3,5,7,11}

Gambar 2. $P \cap Q$ B = {3,5,7}
Maka $A \cap B$ = {3,5,7}

1.2.3. Operasi Selisih

Jika ada himpunan P dan Q yang disebut selisih P dan Q di tulis P - Q, didifinisikan $P - Q = \{x \mid x \in P,\ x \notin Q\}$

Contoh : P = {a,b,c}
Q = {a,c,g,e}
P - Q = {b}
S = {1,2,3,4,5,6,7,8,9}
A = {1,3,5} B = {3,5,7,9} C = {2,4,6,8}
A - B = {1} A - C = {1,3,5} B - C = {3,5,7,9}

1.3. BEBERAPA YANG BERLAKU DALAM OPERASI HIMPUNAN

1.3.1. Hukum Komutasi (Dalam Gabungan Dan Irisan)

a. Komutasi pada gabungan $A \cup B = B \cup A$
b. Komutasi pada irisan $A \cap B = B \cap A$

Contoh : Jika himpunan A = {a, b, c} dan B = {b,c,d,e}
$A \cup B$ = {a,b,c} $\cup$ {b,c,d,e} = {a,b,c,d,e}
$B \cup A$ = {b,c,d,e} $\cup$ {a, b,c} = {a,b,c,d,e}
Jadi $A \cup B = B \cup A$

1.3.2. Hukum Asosiasi

a. Asosiasi pada gabungan $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
b. Asosiasi pada irisan $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

Hukum Asosiasi $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

Contoh : Jika A = {1,2,3} B = {2,3,4,5}
C = {2,3,4,5,6,7}

$(A \cup B) \cup C = (\{1,2,3\} \cup \{2,3,4,5\}) \cup \{2,3,4,5,6,7\}$
$= \{1,2,3,4,5\} \cup \{2,3,4,5,6,7\}$
$= \{1,2,3,4,5,6,7\}$
$A \cup (B \cup C) = \{1,2,3\} \cup (\{2,3,4,5\} \cup \{2,3,4,5,6,7\})$
$= \{1,2,3\} \cup \{2,3,4,5,6,7\}$
$= \{1,2,3,4,5,6,7\}$

Terbukti $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

Hukum Asosiasi pada Irisan $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

Jika $A = \{a,b,c\}$ $B = \{b,c,d,e\}$
$C = \{b,c,d,e,f,g\}$

$(A \cap B) \cap C = (\{a,b,c\} \cap \{b,c,d,e\}) \cap \{b,c,d,e,f,g\} = \{b,c\} \cap \{b,c,d,e,f,g\}$
$= \{b,c\}$

$A \cap (B \cap C) = \{a,b,c\} \cap (\{b,c,d,e\} \cap \{b,c,d,e,f,g\}) = \{a,b,c\} \cap \{b,c,d,e\} = \{b,c\}$

Terbukti $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C))$

Hukum Distribusi :

a. $A \cap (B \cap 2C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
b. $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$

Contoh : $A = \{a,b,c,d,e,f\}$ $B = \{a, b, c, e, f\}$ $C = \{d,e,f,g,h\}$

a. $A \cap (B \cup C) = \{a,b,c,d,e,f\} \cap (\{a,b,c,e,f\} \cup \{d,e,f,g,h\})$
$= \{a,b,c,d,e,f\} \cap \{a,b,c,d,e,f,g,h\}$
$= \{a,b,c,d,e,f\}$

$(A \cap B) \cup (A \cap C) = (\{a,b,c,d,e,f\} \cap \{a,b,c,e,f\}) \cup (\{a,b,c,d,e,f\} \cap \{d,e,f,g,h\})$
$= \{a,b,c,e, f\} \cup \{d,e,f\}$
$= \{a,b,c,d,e,f\}$

Terbukti $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

b. $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$
$(A \cup B) \cap C = (\{a,b,c,d,e,f\} \cup \{a,b,c,e,f\}) \cap \{d,e,f,g,h\}$
$= \{a,b,c,d,e,f\} \cap \{d,e,f,g,h\} = \{d,e,f\}$

$(A \cap C) \cup (B \cap C) = (\{a,b,c,d,e,f\} \cap \{d,e,f,g,h\}) \cup (\{a,b,c,e,f\} \cap \{d,e,f,g,h\})$
$= \{d,e, f\} \cup \{e,f\} = \{d,e,f\}$

Terbukti $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$

Hukum De Morgan :

a. $(A \cup B)^1 = A^1 \cap B^1$

b. $(A \cup B)^1 = A^1 \cap B^1$

HUKUM Identitas Dan Sifat Dasar Himpunan

a. Hukum identitas bagi gabungan dan irisan yang dipenuhi oleh suatu himpunan.

1. $A \cup A = A$ dan $A \cap A = A$
2. $A \cup \varnothing = A$ dan $A \cup \varnothing = \varnothing$
3. $A \cup A' = U$ dan $A \cap A = Q$
4. $U \cup A = U$ dan $U \cap A = \varnothing$
5. $(\varnothing)^1 = U$ dan $(U)^1 = \varnothing$

b. Berapa sifat himpunuan

1. Jika $A \subset B$ dan $B \subset C$, maka $A \subset C$
2. Jika $A \subset C$ dan $A \subset B$ maka $A \subset (B \cap C)$
3. Jika $A \subset C$ maka $C^1 \subset A^1$
4. Jika $A \subset U$ maka $U - (U - A) = A$
5. Jika $A \subset B$ maka $(U - B) \subset (U - A)$ dimana A dan B masing-masing himpunan bagian U
6. Jika $A \subset C$ maka $A \cap (U - A) = \varnothing$
7. Jika $A \subset B$ maka $A \subset (B \cup C)$, $\forall$ C
8. $(A - B)$ dan $A \cap B$ adl dua himpunan yang terpisah
9. $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$ jika $A \cap B \neq \varnothing$

10 $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$, jika $A \cap B = \varnothing$

<u>Soal - Soal</u>

1. Salinlah diagram disamping dan arsirlah

   a. $\overline{A} \cap B$ c. $(\overline{A \cap B}) \cap C$

   b $\overline{A} \cap (B \cap C)$ d. $\overline{A} \cup (B \cup \overline{C})$

2. Pada suatu kelompok mahasiswa yang terdiri dari 150 orang diperoleh data tentang pengambilan mata kuliah sebagai berikut :

   83 orang mengambil mata kuliah matematika
   67 orang mengambil mata kuliah statistika dan
   45 orang mengambil mata kuliah matematika dan statistika.

Pertanyaannya :

a. Ada berapa orang mahasiswa yang tidak mengambil mata kuliah matematika dan statistika ?

b. Ada berapa orang mahasiswa yang hanya mengambil satu mata kuliah ?

3. Suatu survey yang dilaksanakan kepada 800 orang pekerja pabrik menunjukkan bahwa 420 orang mempunyai rumah pribadi, 500 orang mempunyai mobil, 550 orang mempunyai televisi, 340 orang mempunyai mobil dan rumah pribadi, 370 orang mempunyai rumah pribadi, dan televisi dan 300 orang mempunyai rumah pribadi mobil dan televisi. Berdasarkan survey tersebut pernyataan yang benar ialah :
   a. Ada 500 orang yang memiliki paling banyak dua macam harta
   b. Ada 130 orang yang hanya memiliki satu macam harta
   c. Ada 40 orang yang memiliki rumah pribadi dan mobil tetapi tidak memiliki televisi
4. Berdasarkan soal 3 pernyataan yang benar ialah :
   a. Ada 10 orang yan hanya memiliki rumah pribadi
   b. Ada 520 orang yang memiliki paling sedikit dua macam harta
   c. Ada 200 orang yang tidak memiliki apa - apa
5. Berdasarkan soal 3 pernyataan yang benar ialah :
   a. Ada 70 orang yang memiliki rumah pribadi dan atau televisi tetapi tidak memiliki mobil
   b. Ada 220 orang yang hanya memiliki dua macam harta
   c. Ada 650 orang yang memiliki paling sedikit satu harta

BAB II
" MATRIKS "

2.1. PENGERTIAN

Matriks dapat didifinisikan sebagai suatu set himpunan yang unsur-unsurnya disusun menurut baris (row) dan lajur (colum).

Matriks dilambangkan dengan suatu huruf besar, atau dengan lambang unsur umumnya dikurung.

Misalnya : $\underset{m\,x\,n}{A} = \underset{m\,x\,n}{[a_{ij}]} = \underset{m\,x\,n}{(a_{ij})}$

$$\underset{m\,x\,n}{\begin{bmatrix} a_{11}a_{12}a_{13} \ldots a_{1n} \\ a_{21}a_{22}a_{23} \ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots a_{ij} \ldots\ldots \\ a_{m1}a_{m2}a_{m3} \quad a_{mn} \end{bmatrix}}$$

2.2. JENIS - JENIS MATRIKS

2.2.1. Matriks Bujur Sangkar Bila M = N

$$\underset{2\,x\,2}{A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}} \qquad \underset{3\,x\,3}{B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}}$$

2.2.2. Matriks Identitas

Matriks Identitas ialah : suatu matriks bujursangkar yang unsur-unsurnya mempunyai nilai 1 pada diagonal utamanya dan 0 pada unsur-unsur lain diluar diagonal utama. Diagonal utama = diagonal dari atas ke kanan bawah. Biasanya diberi simbol I_n.

Contoh :

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2.2.3. Matriks Diagonal

Matriks diagonal ialah : suatu matriks bujur sangkar dimana semua unsur diluar diagonal utama mempunyai nilai nol dan paling tidak satu unsur pada diagonal utama $\neq 0$, biasanya diberi simbol D.

Contoh :

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

matriks identitas = matriks diagonal

2.2.4. Matriks Skalar

Matriks skalar ialah : matriks hasil perkalian dari bilangan (skalar) dengan matriks identitas. Jadi S = k I

Contoh : misal k = 3

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$S = 3I_2 = 3\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

2.2.5. Matriks Simetri

Matriks simetri ialah : suatu matriks bujur sangkar, dimana $a_{ij} = a_{ji}$

Contoh :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 2 \\ 5 & 2 & 2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 11 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

dimana $a_{12} = a_{21}$

2.2.6. Matriks Nol

Matriks nol ialah : suatu matriks dimana semua unsurnya mempunyai nilai nol. Biasanya diberi simbol O.

Contoh :

$$O = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad O = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2.3. PENGOPERASIAN MATRIKS

2.3.1. Penjumlahan Dan Pengurangan Matriks

Dua buah matriks hanya dapat dijumlahkan atau dikurangkan apabila keduanya berordo (ukuran) sama. Jumlah atau selisih dua matriks ialah : sebuah matriks baru yang berordo sama.

$$A \pm B = C \quad \text{atau} \quad [a_{ij}] \pm [b_{ij}] = [c_{ij}]$$

Contoh :

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 8 & 2 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 6 & 2 \\ 0 & 4 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 7 \\ 8 & 6 & 9 \end{bmatrix}$$

Sifat-sifat operasi penjumlahan :

$A + B = B + A$ Komutatip

$A + (B + C) = (A + B) + C$ Asosiatip

2.3.2. Perkalian Matriks Dengan Skalar

Hasil kali suatu matriks A dengan suatu skalar hasilnya sebuah matriks baru B.

$$\lambda\ A = B \Rightarrow \lambda\ (a_{ij}) = (b_{ij})$$

Contoh :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \qquad \lambda A = \begin{bmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \lambda a_{13} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \lambda a_{23} \end{bmatrix}$$

Sifat - sifat perkalian matriks dengan skalar :

$\lambda A = A\lambda$,	bersifat komutatip
$\lambda(A \pm B) = \lambda A \pm \lambda B$	bersifat distributip

2.3.3. Perkalian Antar Matriks

Dua buah matriks hanya dapat dikalikan apabila jumlah kolom dari matriks yang dikalikan sama dengan jumlah baris dari matriks pengalinya.

$$\underset{m \times n}{A} \times \underset{n \times p}{B} = \underset{m \times p}{C}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$$

$$AB = \underset{2 \times 2}{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}} \underset{2 \times 2}{\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}}$$

$$= \underset{2 \times 2}{\begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{bmatrix}}$$

Sifat-sifat perkalian :

$A(BC) = (AB)C$	Asosiatip
$A(B + C) = AB + AC$	
$(A + B)C = AC + BC$	Bersifat Distributip

2.3.4. Transpos Dari Suatu Matriks

Transpose suatu matriks berarti mengubah matriks tersebut menjadi sebuah matriks baru dengan cara saling menukarkan posisi unsur-unsur baris dan unsur - unsur kolom. Hasil tranpose suatu matriks dinamakan matriks transpose, dilambangkan dengan menambahkan tanda aksen pada matriks asalnya. Karena dalam tranpose terjadi pertukaran baris menjadi kolom dan kolom menjadi baris, maka transpose dari

$$\underset{m\,x\,n}{A} \text{ ialah : } \underset{n\,x\,m}{A'} \quad \text{konsekuensinya unsur } a_{ij} = a_{ji}$$

Contoh :

$$\underset{m\,x\,n}{A} = \begin{pmatrix} a_{11} \ldots\ldots a_{1n} \\ \ldots\ldots a_{ij} \ldots\ldots \\ a_{m1} \quad a_{mn} \end{pmatrix} \qquad \underset{m\,x\,n}{A'} = \begin{pmatrix} a_{11} \ldots\ldots a_{1n} \\ \ldots\ldots a_{ij} \ldots\ldots \\ a_{m1} \quad a_{mn} \end{pmatrix}$$

Sifat-sifat transpose penjumlahan :

$(A + B)' = (B + A)'$ atau komutatip

$A' + B' = B' + A'$

$\{A + (B + C)\}' = \{(A + B) + C\}' = A'\,B'\,C'$ Ass

Sifat-sifat transpose perkalian matriks dengan skalar :

$(\lambda A)' = (A\lambda)'$ atau $\lambda A' = A'\lambda$ Komutatip

$\{\lambda\,(A \pm B)\}' = (\lambda A \pm \lambda B)' = \lambda A' \pm \lambda B'$ Distributip

Sifat-sifat transpose perkalian antar matriks :

$\{A(BC)\}' = \{(AB)A\}' = (ABC)' = C'B'A'$ Asosiatip

$\{A(B \pm C)\}' = (AB \pm AC)' = B'A' \pm C'A'$ Distributip

$\{(A \pm B)C\}' = (A\,C \pm B\,C)' = C'A' \pm C'\,B'$

2.3.5. Determinan Matriks

Determinan matriks ialah : penulisan unsur- unsur sebuah matriks bujur sangkar dalam bentuk determinan, yaitu diantara 2 garis tegak atau | |. Determinan dari matriks A lazim ditulis dengan notasi |A| atau D.

Yang membedakan determinan dengan matriks ialah :

- Δ Unsur-unsurnya diapit dengan dua garis tegak
- Δ Determinan senantiasa berbentuk bujur sangkar
- Δ Determinan mempunyai nilai numerik

Cara mencari nilai determinan :

Δ Bila berdimensi dua (metode Sarrus)

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \qquad |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{12} - a_{12}a_{21}$$

Δ Bila berdimensi tiga

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \qquad |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{23}a_{32}a_{11} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

Bilamana berdimensi lebih dari dimensi 3, menggunakan Minor dan Kofaktor. Penggunaan minor dan kofaktor ini di temukan oleh Laplace.
Coba perhatikan kembali penyelesaian determinan dimensi 3.

$$|A| = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{23}a_{32}a_{11} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

Penulisan tersebut dapat diubah sebagai berikut :

$$|A| = (a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}) + (a_{12}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}) + (a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31})$$

$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$|A| = a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12} + a_{13}M_{13}$$

$$|A| = \sum_{i,j=1} a_{ij} \quad M_{ij}$$

Ternyata |A| = dapat dibentuk dalam beberapa subdeterminan dengan menghilangkan baris dan kolom tertentu, Sub determinan ini disebut Minor.

Satu minor umumnya dilambangkan dengan M_{ij}

M_{11} ialah : minor dari unsur a_{11}, diperoleh dengan jalan menghilangkan baris ke-1 dan kolom ke-1 dari determinan A.

M_{12} ialah : minor dari unsur a_{12}, diperoleh dengan jalan menghilangkan baris ke-1 dan kolom ke-2 dari determinan A. Dan seterusnya.

Penulisan bentuk minor, dapat diubah menjadi penulisan bentuk kofaktor.
Kofaktor dari determinan A, misalnya kita beri lambang K_{ij} dan hubungan antara kofaktor dan minor ialah : $K = (-1)^{i+j} M_{ij}$

M_{ij} = minor dari unsur a_{ij} yang diperoleh dengan jalan menghilangkan baris ke-i dan kolom ke-j dari determinan A.

K_{ij} = kofaktor dari unsur a_{ij} yang harganya = $(-1)^{i+j} M_{ij}$

2.3.6. Adjoin Matriks

Adjoin dari suatu matriks ialah : transpose dari matriks kofaktornya.

Contoh :

1. $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ kof. Matrik A = $\begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$

   Adjoin = transpose matrik kofaktornya

   $\widetilde{A} = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$

2. $B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 5 & 4 & 5 \\ 9 & 3 & 7 \end{bmatrix}$ Determinan $B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 5 & 4 & 5 \\ 9 & 3 & 7 \end{bmatrix}$

   $= 3.4.7 + 1.5.9 + 5.3.2 - 2.4.9 - 5.3.3 - 1.5.7 = 7$

$$\text{Minor } B = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 5 & 5 \\ 9 & 7 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 9 & 3 \end{vmatrix} \\ M_{11} & M_{12} & M_{13} \\ \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 9 & 7 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 9 & 3 \end{vmatrix} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} \\ \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 5 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} \end{bmatrix}$$

Hubungan Monir dan Kofaktor ialah : $K_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ atau jika baris dan kolom dijumlah genap tetap (+), jika baris dan kolom dijumlah ganjil kalikan (-).

$$\text{Kofaktor } B = \begin{bmatrix} 13 & 10 & -21 \\ -1 & 3 & 0 \\ -3 & -5 & 7 \end{bmatrix}$$

matriks adjoin B ialah :

$$\widetilde{B} = \begin{bmatrix} 13 & -1 & -3 \\ 10 & 3 & -5 \\ -21 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

2.3.7. Invers Matriks

Kegunaan mencari invers matriks ialah : untuk mencari jawaban didalam pemecahan suatu set persamaan linier simultan. Salah satu cara untuk mencari invers matriks ialah : dengan adjoin.

Hubungan antara invers matriks A dengan adjoin A

$$A^{-1} = \frac{\widetilde{A}}{|A|}$$

Contoh :

Carilah Invers matriks dari $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$

Determinan A = 1.5 - 3.2 = -1

Minor Matriks $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ Kofaktor $A = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$

Adjoin Matrik $\widetilde{A} = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$

$$A^{-1} = \frac{\begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}}{-1} = \begin{bmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Carilah invers matriks dari $B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 5 & 4 & 5 \\ 9 & 3 & 7 \end{bmatrix}$

Det B = 3.4.7 + 1.5.9 + 5.3.2 - 2.4.9 - 5.3.3 - 1.5.9 = 7

Minor $B = \begin{bmatrix} 13 & -10 & -21 \\ -1 & 3 & -0 \\ -3 & -5 & 7 \end{bmatrix}$ Kofaktor $B = \begin{bmatrix} 13 & 10 & -21 \\ -1 & 3 & -0 \\ -3 & -5 & 7 \end{bmatrix}$

Adjoin $\widetilde{B} = \begin{bmatrix} 13 & -1 & -3 \\ 10 & 3 & -5 \\ -3 & -5 & 7 \end{bmatrix}$

$$\text{Invers } B = \frac{\begin{bmatrix} 13 & -1 & -3 \\ 10 & 3 & -5 \\ -3 & -5 & 7 \end{bmatrix}}{7} = \begin{bmatrix} 13/7 & -1/7 & -3/7 \\ 10/7 & 3/7 & -5/7 \\ -3 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

2.3.8. Penyelesaian Persamaan Linier Simultan Dengan Cara Matriks

Sehimpun persamaan linier, yang terdiri dari n persamaan dalam n bilangan anu, dapat disajikan dalam bentuk notasi matriks.

$$\begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_1 \end{bmatrix}$$

diubah kebentuk matriks :

$$\begin{bmatrix} a_{11}\ a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21}\ a_{22} \dots a_{2n} \\ \dots\dots\dots \\ a_{n1}\ a_{n2} \dots a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ .. \\ b_n \end{bmatrix}$$

$$A \qquad X = B$$

$$A \quad X = B$$
$$A^{-1} A X = A^{-1} B$$
$$I X = A^{-1} B \longrightarrow X = A^{-1} B$$

Contoh :

Suatu persamaan simultan sebagai berikut :

$$x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 7$$
$$6x_1 + 4x_2 + \ \ x_3 = 37$$
$$5x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 31$$

Cara 1. Menggunakan Invers

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 6 & 4 & 1 \\ 5 & 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 37 \\ 31 \end{bmatrix}$$

Det A = 1.4.2 + 2.1.5 + 6.3.-3-5.4.-3-1.3.1-2.6.2 = -3

$$\text{Minor A} = \begin{bmatrix} 5 & 7 & -2 \\ 13 & 17 & -7 \\ 14 & 19 & -8 \end{bmatrix}$$

$$\text{Kof.A} = \begin{bmatrix} 5 & -7 & -2 \\ -13 & 17 & 7 \\ 14 & -19 & -8 \end{bmatrix} \qquad \text{Adjoin A} = \begin{bmatrix} 5 & -13 & 14 \\ -7 & 17 & -19 \\ -2 & 7 & -8 \end{bmatrix}$$

$$X = \frac{1}{-3} \begin{bmatrix} 5 & -13 & 14 \\ -7 & 17 & -19 \\ -2 & 7 & -8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ 37 \\ 31 \end{bmatrix}$$

$$X = \frac{1}{-3} \begin{bmatrix} 5.7 + & -13.37 + & 14.31 \\ -7.7 + & 17.37 + & -19.31 \\ -2.7 + & 7.37 + & -8.31 \end{bmatrix} = \frac{1}{-3} \begin{bmatrix} -12 \\ -9 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Jadi $x_1 = 4$, $x_2 = 3$ dan $x_3 = 1$

Cara kedua dengan kaidah Gramer

$$x = \frac{|A_j|}{|A|} \text{ dimana } i = j = 1, 2, \ldots n$$

Contoh soal seperti di atas diubah dalam matriks

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 6 & 4 & 1 \\ 5 & 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 37 \\ 31 \end{bmatrix}$$

Lajur -1 dari matriks A diganti vektor lajur B

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 7 & 2 & -3 \\ 37 & 4 & 1 \\ 31 & 3 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 6 & 4 & 1 \\ 5 & 3 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{7(8-3) - 2(74-31) - 3(111-124)}{1(8-3) - 2(12-5) - 3(18-20)} = \frac{-12}{-3} = 4$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 7 & -3 \\ 6 & 37 & 1 \\ 5 & 31 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 6 & 4 & 1 \\ 5 & 3 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{1(74-31) - 7(12-5) - 3(186-185)}{1(8-3) - 2(12-5) - 3(18-20)} = \frac{-9}{-3} = 3$$

$$x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 6 & 4 & 37 \\ 5 & 3 & 31 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 6 & 4 & 1 \\ 5 & 3 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{1(124-111) - 2(186-185) + 7(18-20)}{1(8-3) - 2(12-5) - 3(18-20)} = \frac{-3}{-3} = 1$$

Soal - Soal

1. $P = \begin{bmatrix} 3 & -7 & 9 \\ 2 & 4 & -6 \end{bmatrix}$ $\quad Q = \begin{bmatrix} -4 & 2 & 9 \\ 5 & -8 & 4 \end{bmatrix}$ $\quad R = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

   Hitung : a. (P + Q + R)' b. (P + Q)' - R'

   c. P' (Q + R)' d. (R - P)' Q'

2. Bila matriks P memenuhi persamaan

   $\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} P = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ dan matriks Q = -3 P maka matriks Q ialah

3. Matriks T berukuran 2 x 3 yang unsur-unsurnya didifinisikan dengan aturan $t_{ij} = i + 2j$, 2matriks T =

4. Hitunglah determinan dari matriks berikut :

   $P = \begin{bmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ $\quad Q = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 1 \end{bmatrix}$ $\quad R = \begin{bmatrix} p-q & p \\ p & p+q \end{bmatrix}$

5. Dari soal no. 5 hitunglah Adjoin P dan Adjoin Q
6. Dari soal no. 5 carilah invers matriks P dan Q
7. Hitunglah sehingga terbukti bahwa

   $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ -2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ inversnya $\begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 3 & -2 & 3/2 \\ -1 & 1 & -1/2 \end{bmatrix}$

8. Hitunglah harga-harga x, y, dan z

   $$\begin{aligned} x - 2y - z &= -6 \\ 2x + y &= 1 \\ -x - 2y - 3z &= -8/3 \end{aligned}$$

9. Carilah x, y, dan z

   $$\begin{aligned} 2x + y - z &= 3 \\ x + y + z &= 1 \\ x - 2y - 3z &= 4 \end{aligned}$$

BAB III

" PROGRAM LINIER "

3.1. PENGERTIAN

Salah satu cabang ilmu matematika yang saat ini digunakan untuk memecahkan masalah yang bersifat pengoptimasian, dan salah satu diantaranya ialah : masalah Program Linier.

Pengertian Program Linier itu sendiri berasal dari kata *"Programing"* dan *"Linier"*.

Programing : Alokasi sumber-sumber yang terbatas untuk memenuhi tujuan tertentu.

Linier : Menunjukkan pengertian bahwa variabel-variabel yang bekerja pada masalah tersebut berpangkat satu.

Jadi *Programing Linier adalah* : programing yang menyangkut masalah-masalah dimana hubungan antara variabel-variabelnya semua linier.

Beberapa pengertian yang akan kita jumpai pada masalah Program Linier antara lain :

- Δ Model Matematika
- Δ Fungsi Tujuan (Fungsi Sasaran)
- Δ Kontrain (Syarat Pembatas)
- Δ Daerah dan Jawab Feasible
- Δ Titik Optimum (Titik Ekstrim)
- Δ Jawab Optimal dari masalah Program Linier

Sebelum kita membahas masalah Program Linier terlebih dahulu kita ketahui : Sistem Persamaan Linier

Bentuknya :

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1m}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2m}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nm}x_n = b_n \end{array}\right\}$$

dengan a_{11}, a_{12}, ... a_{mn} ; b_1, b_2, ... b_n bilangan riil sedang x_1, x_1, ... x_n adalah variabel.

Dan disebut persamaan linier dengan n persamaan dan m variabel.

Contoh :

1. $3x + 2y = 6$

   $4x - y = 5$ Sistim 2 persamaan dan 2 variabel

2 $x + y + 3z = 5$

   $2x + y + 4z = 3$ Sistim 2 persamaan dan 3 variabel

Contoh soal :

Suatu perusahaan membuat dua jenis barang sebut jenis A dan B tiap satu barang jenis A memerlukan 2 jam/orang bekerja di pabrik. Sedangkan tiap satu barang jenis B memerlukan 3 jam/orang. Jika tiap jam tersedia tenaga 110 orang.Tentukan hubungan yang terjadi antara 110 orang dengan banyaknya barang yang diproduksi baik dari jenis A dan dari jenis B.

misal : x = banyaknya jenis A yang diproduksi

y = banyaknya jenis B yang diproduksi

Maka berlaku hubungan $2x + 3y = 110$

Selanjutnya apabila dalam pembuatan barang jenis A dan B itu dipakai suatu mesin, dengan perincian sebagai berikut :

Setiap satu barang jenis A memerlukan 1 jam kerja mesin dan setiap barang jenis B memerlukan 0,5 jam kerja mesin, kemudian juga diketahui kemampuan kerja mesin itu hanya 35 jam untuk suatu kerja yang terus menerus.Tentukan persamaan yang terjadi, antara banyaknya barang jenis A dan B yang diproduksi.

Jawabannya hubungan yang terjadi $x + 0{,}5y = 35$

Jadi serangkaian kejadian diatas sebenarnya dapat diwakili oleh dua persamaan yang membentuk suatu sistem linier berbentuk :

$$2x + 3y = 110$$
$$x + 0{,}5y = 35$$

3.2. HIMPUNAN JAWAB SUATU SISTIM PERSAMAAN LINIER

Dari contoh diatas, maka hubungan antara banyaknya jenis A dan B yang dapat diproduksi dengan jam orang, dapat dinyatakan sebagai relasi

$$K = \{(x, y) \mid 2x + 3y = 110\}$$

Sedangkan hubungan dengan jam kerja mesin adalah :

$$L = \{(x, y) \mid x + 0{,}5y = 35\}$$

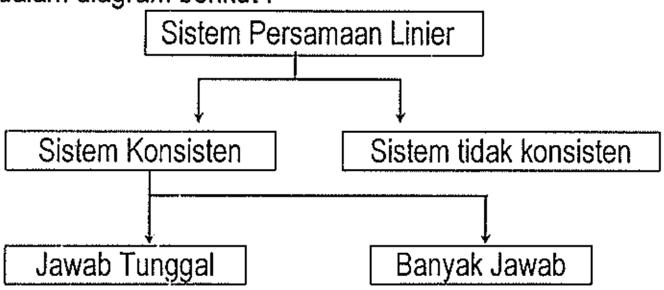
Maka banyaknya barang jenis A dan jenis B yang dapat diproduksi dengan melihat kemampuan orang dan mesin yang tersedia adalah :

$$K \cap L = \{(x, y) \mid 2x + 3y = 110 \text{ dan } x + 0{,}5y = 35\}$$

<u>Himpunan jawab dari sistim persamaan linier</u> :

- Δ Bisa kosong (tidak mempunyai jawab)
- Δ Mempunyai jawab (konsisten)

Bisa dilihat dalam diagram berikut :



3.3. SISTIM KONSISTEN DENGAN JAWAB TUNGGAL

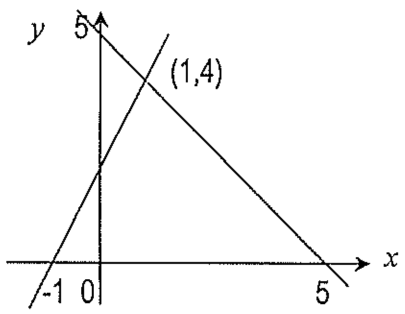
Untuk memberikan jawaban nyata, sebagaimana sistim yang konsisten dengan jawab tunggal, kita berikan contoh persamaan linier :

$$x + y = 5 \quad \dots (1)$$

$$-2x + y = 2 \quad \dots (2)$$

Himpunan jawab pers (1) $K = \{(x, y) \mid x + y = 5\}$

(2) $L = \{(x, y) \mid -2x + y = 2\}$



$$K \cap L = \{(x, y) \mid x + y = 5 \text{ dan } -2x + y = 2\}$$

dalam gambar ada 1 titik (titik potong antara dua garis) $K \cap L = (1,4)$ mempunyai satu jawab (jawab tunggal).

3.4. SISTIM KONSISTEN DENGAN BANYAK JAWAB

Lihat *contoh :*

$2x - 4y + 4z = 20$

$3x + 4y - 2z = 30$ 2 persamaan dengan 3 variabel

mendahului teorema ada 1 variabel bebas misal $x = 0$

$$\Rightarrow -4x + 4z = 20$$
$$\underline{4y \; - \; 2z = 30}$$
$$2z = 50 \Rightarrow z = 25 \text{ dan } y = 20$$

Jadi (0,20,25)

Jika $x = 5$ maka $y = 10$ dan $z = 12{,}5$ sehingga jawabannya (5,10,12,5) dan lain sebagainya.

3.5. SISTIM TIDAK KONSISTEN

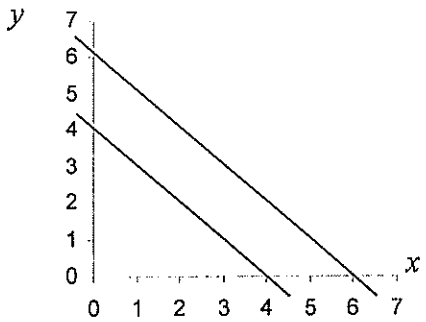
Lihat *contoh :*

$x + y = 6$

$2x + 2y = 8$

Jika $A = \{(x, y) \mid x + y = 6\}$

$B = \{(x, y) \mid 2x + 2y = 6\}$



Akibatnya $A \cap B = \{(x, y) \mid 2x + y = 6 \text{ dan } 2x + 2y = 8\}$

$= \varnothing$

Sistim persamaan linier tidak punya jawab

3.6. UBAHAN DARI SUATU SISTEM PERSAMAAN KE MATRIKS

Persamaan linier $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1$

$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2$

Bentuk di atas dapat ditulis sebagai perkalian matris :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

$$A \quad X = B$$

Dimana

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

3.7. OPERASI BARIS ELEMENTER UNTUK MENCARI JAWAB DARI SISTIM PERSAMAAN LINIER

Kita bisa lakukan dengan prosedur :

1. Menukarkan letak persamaan-persamaan
2. Mengalikan suatu pers dengan bilangan tidak nol
3. Menambah atau mengurangkan suatu pers lainnya

Kejadian diatas tidak akan merubah / mempengaruhi jawab dari sistim persamaan linier. Atas dasar ketiga hal tersebut di atas kita difinisikan operasi baris elementer, yaitu :

1. b_{ij} = tukarkan letak baris ke i dengan baris ke- j (menukarkan dua baris)
2. $b_i(k)$= ganti baris ke i menjadi k kali baris ke-i (mengalikan suatu baris dengan suatu skalar)
3. $b_{ij}(k)$= Ganti baris ke i, dengan baris ke i + k kali baris ke j (suatu baris + k kali baris lain)

Contoh : $2x + 3y = 1$
$x - y = 2$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[b_{21}]{} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[b_2-2b_1]{} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 5 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow[b_2(1/5)]{} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -3/5 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow y = -3/5$$
$$x - y = 2 \Rightarrow x - (-3/5) = 2$$
$$x = 7/5$$

Contoh : $x - 2y + 3z = 1$
$2x - y + 2z = 2$
$4x - 2y + 4z = 3$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & 2 \\ 4 & -2 & 4 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{b_2-2b_1 \\ b_3-4b_1}]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & -4 & 0 \\ 0 & 6 & -8 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow[b_3-2(b_2)]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

$$0x + 0y + 0z = 1 \longrightarrow 0 = -1 \text{ tidak benar}$$

Maka persamaan tidak mempunyai jawab
Untuk mengetahui suatu sistim persamaan linier mempunyai jawab bisa kita lihat dari :

1. Jika determinan misal A $\neq 0$ maka sistim persamaan mempunyai jawab tunggal.
2. Jika determinan A = 0 ada dua kemungkinan :
   - Δ Bisa sistim persamaan linier tidak mempunyai jawaban
   - Δ Bisa sistim persamaan linier punya jawab banyak

3.8. MASALAH PERENCANAAN LINIER

Masalah perencanaan linier memuat alokasi-alokasi terbatas dari daya/ kemampuan perusahaan, dalam melaksanakan aktivitas produksinya. Sedangkan faktor yang menyebabkan timbulnya masalah alokasi :
Pertama : Kemampuan perusahaan memaksa paramanager memikirkan bagaimana menanggulangi ongkos produksi dan menentukan limit dari supply, dan bagaimana caranya daya perusahaan. dimanfaatkan seoptimal mungkin.

Kedua : Pengertian optimum diatas dikaitkan dengan keuntungan yang maksimum.

3.9. MODEL MATEMATIKA

Dalam masalah Program Linier (LP) ini, pembentukan dari model matematika sangatlah menentukan, mengingat bahwa model matematika merupakan penyajian dari bahasa sehari-hari menjadi bahasa (bentuk-bentuk) matematika yang sederhana dan mudah dipahami.

Contoh :

Seorang pedagang mengharapkan keuntungan sebesar Rp. 250,- untuk makanan jenis I perbuahnya, dan untuk makanan jenis II Rp. 300,- perbuahnya. Bagaimana model matematika dari seluruh laba yang dia harapkan ?

Untuk menyusun model matematika persoalan diatas

dimisalkan: x = banyaknya makanan jenis I

y = banyaknya makanan jenis II

Apabila f adalah laba (keuntungan) dari seluruh hasil penjualan maka kita dapatkan : f = $250x + 300y$, yang merupakan model matematikanya dari keuntungan yang diharapkan.

3.10. FUNGSI TUJUAN (FUNGSI SASARAN / OBYEKTIF)

Fungsi tujuan dari sebuah Program Linier adalah : fungsi linier dengan 2 variabel x dan y yang merupakan tujuan dari masalah program linier diatas, model matematikanya : f = a x + b y dimana $x \geq 20$ dan $y \geq 20$, sedangkan a dan b dikenal sebagai koefisien yang, mempengaruhi fungsi tujuan. Jelas bahwa yang menjadi sasaran dari fungsi tujuan adalah menentukan nilai optimum (maksimum atau minimum terbaik) dari f itu sendiri.

3.11. KONSTRAIN (SYARAT PEMBATAS)

Konstrain adalah : faktor atau kondisi yang harus dipenuhi oleh sebuah masalah program linier agar fungsi tujuan dapat mencapai nilai optimum yang diharapkan.

Model matematikanya dari sebuah konstrain adalah :

$p\,x + q\,y \geq r$ atau dimana $x \geq 0$ dan $y \geq 0$

$p\,x + q\,y \leq r$ p, q, r bilangan riil

3.12. DAERAH FEASIBLE (HIMPUNAN JAWAB)

Apabila pada masalah program linier, diberikan beberapa syarat (konstrain) guna mencapai tujuan tertentu, maka kita akan mendapatkan adanya suatu daerah yang merupakan irisan dari daerah-daerah yang dibentuk oleh setiap syarat (konstrain), dimana pada daerah irisan inilah suatu fungsi tujuan memungkinkan mencapai nilai optimum.

Daerah yang memenuhi persyaratan yang diberikan pada sebuah masalah program linier, inilah yang kita namakan daerah feasible dari permasalahan program linier. Mungkin terjadi bahwa irisan dari daerah-daerah yang dibentuk oleh setiap syarat menghasilkan himpunan kosong, sehingga masalah program linier tidak mencapai tujuan, daerah tersebut dinamakan *infeasible*. Mengingat bahwa setiap kontrain merupakan pertidaksamaan dengan 2 variabel, maka umumnya daerah feasible (himpunan jawab) merupakan daerah yang berbentuk persegi banyak.

3.13. PROGRAM LINIER

Ada dua cara yang akan kita pelajari yaitu :

- Δ Cara grafik
- Δ Cara Simplek

3.14. CARA GRAFIK

Cara grafik adalah cara yang sederhana untuk mendapatkan jawab masalah perencanaan linier, dengan peubah lebih dari dua diselesaikan dengan cara simplek (simplek algoritm) yang akan dibahas bab selanjutnya.

Metode penyelesaian masalah perencanaan linier dengan cara grafik adalah mencari titik (x, y) yang memenuhi semua pertaksamaan-pertaksamaan dari pembatas yang membuat fungsi obyektif optimum (maksimum atau minimum).

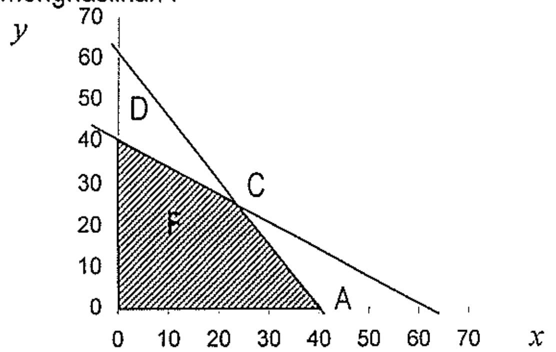
3.15. MEMAKSIMUMKAN FUNGSI OBYEKTIF

Untuk dapat mengerti bagaimana cara grafik menjawab masalah perencanaan linier yang memuat masalah memaksimumkan fungsi obyektif maka lihat *contoh* berikut :

Misalkan diketahui suatu masalah perencanaan linier sebagai berikut. Maksimumkan $f = 4x + 5y$

dengan pembatas
$$2x + 3y \le 120 \quad (1)$$
$$2x + 1{,}5y \le 80 \quad (2)$$
$$x, y \ge 0 \quad (3)$$

Pertaksamaan-pertaksamaan (1), (2) dan (3) jika digambar pada bidang $x\,o\,y$ menghasilkan :



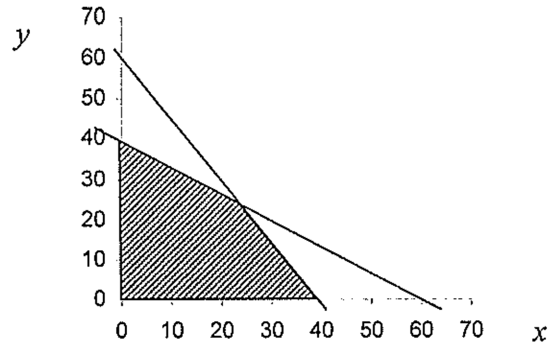
Masalahnya kemudian adalah mencari titik (x, y) pada F yang membuat fungsi obyektif f maksimum. Karena F memuat tak hingga banyak titik-titik, maka tidak mungkin apabila kita menentukan titik yang membuat f maksimum dengan cara menentukan nilai f pada semua titik di F. Untuk itu kita perlukan dalil berikut : Dalil Titik Ekstrim

Nilai optimal (maksimumatau minimum) suatu fungsi obyektif terjadi pada salan satu titik ekstrimnya. Sedangkan titik ekstrim adalah titik pada daerah feasible F yang merupakan titik potong antara dua garis yang merupakan grafik dari persamaan-persamaan pada pembatas.

Dari contoh diatas, kita lihat pembatasnya :

$$2x + 3y \le 120 \text{ (terdapat garis } 2x + 3y = 120)$$
$$2x + 1{,}5y \le 80 \text{ (terdapat garis } 2x + 1{,}5y = 80)$$

dengan daerah feasible F sebagai berikut :



Maka ada 4 titik ekstrim O (0,0); A (40,0); C (20,26,3) dan D (0,40), keempat titik tersebut membuat nilai f terlihat pada tabel :

Titik	f = 4 x + 5 y
0 (0,0)	0
A (40,0)	160
C (20,26,3)	213,3
D (0,40)	200

Jadi nilai x = 20 dan y = 26,3 membuat f maks sebesar= 213,3

3.16. MEMIMIMUMKAN SUATU FUNGSI OBYEKTIF

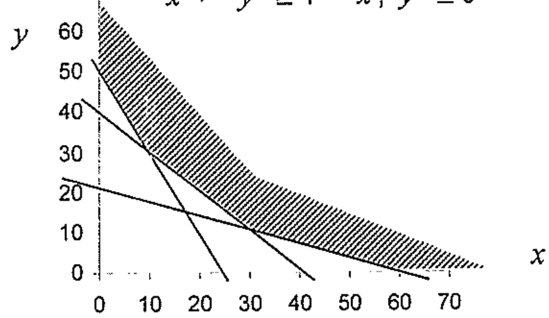
Akan dibicarakan cara grafik untuk mendapatkan jawab masalah program linier mengenai meminimumkan fungsi obyektif untuk jelasnya lihat *contoh :*

Minimumkan f = 3 x + 2 y

Pembatas $2x + y \geq 5$

$x + 3y \geq 6$

$x + y \geq 4 \quad x, y \geq 0$



Titik ekstrim untuk masalah ini adalah A(0,5); B(1,3); C(3,1) dan D(6,0) sehingga tabel :

Titik	$f = 3x + 2y$
A (0,5)	10
B (1,3)	9
C (3,1)	11
D (6,0)	18

Jadi f akan minimum jika $x = 1$ dan $y = 3$ membuat f minimum sebesar 9.

3.17. MENGUBAH MASALAH PERENCANAAN LINIER DARI MASALAH MEMAKSIMUM MENJADI MASALAH MINIMUM

Setiap masalah memaksimumkan suatu fungsi obyektif dapat diselesaikan sebagai masalah meminimumkan dengan cara merubah tanda dari fungsi obyektif dan memakai pembatas yang tetap sama.

Contoh : Minimumkan $f = x + y$,

Pembatas $3x + 8y \geq 24$

$3x + 2y \geq 12$

$x \geq 1,\ y \geq 0$

Jawab dari masalah perencanaan linier diatas akan sama dengan jawab masalah perencanaan berikut :

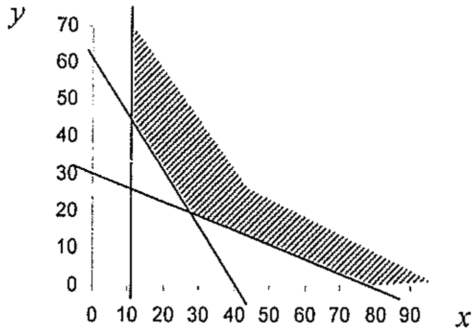
Maksimumkan $-f = -x - y$

Pembatas $3x + 8y \geq 24$

$3x + 2y \geq 12$

$x \geq 1, y \geq 0$

Jawab sama dalam arti bahwa titik ekstrim yang membuat mencapai minimum dan -f mencapai maksimum adalah sama grafik dari daerah feasible :



Titik ekstrim A(1.4,5) B(2.7,2) dan C(8,0)

Titik	f = $x + y$	- f = - x - y
A (1.4,5)	5,5	-5,5
B (2,67,2)	4,67	-4,67
C (8,0)	8	-8

Nilai f mencapai minimum = 4,67 di titik potong B

-f mencapai maksimum = - 4,67

Contoh masalah program linier diselesaikan cara grafik :

(Produksi). Seorang petani mempunyai 16 Ha tanah yang dapat ditanami padi (P) atau jagung (J). Sarana produksinya ialah tanah, modal, dan air yang ketiganya terbatas. Data mengenai kebutuhan sarana perkuintal P dan J dan maksimum persediaan masing - masing terdapat dalam tabel :

Sarana	Padi (P)	Jagung (J)	Persediaan Maksimum	Satuan
Tanah	1/5	2/5	16	Ha
Modal	3	2	120	Ribuan
Air	12	0	360	Saluran
Keuntungan	2	1		Ribuan

Semua dihitung untuk satu masa tanam

Masalahnya : Berapa kuintal P dan berapa kuintal J seharusnya diproduksi dengan mengingat sarana yang terbatas dengan sasaran memaksimalkan keuntungan total ?

Jika x = banyaknya kuintal P dan

y = banyaknya kuintal J yang harus diproduksi

Maka perumusan masalah diatas (model matematikanya) adalah sebagai berikut : Mencari x , y yang tak negatip yang memenuhi :

$$1/5x + 2/5y \leq 16$$
$$3x + 2y \leq 120$$
$$12x \leq 360$$
$$x \geq 0 \quad y \geq 0$$

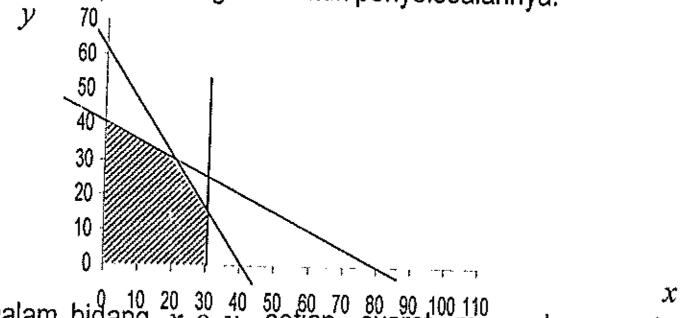
dan memaksimalkan f = 2 x + y

Disederhanakan mencari x dan y yang memenuhi:

$$\begin{aligned} x + 2y &\leq 80 \\ 3x + 2y &\leq 120 \\ x &\leq 30 \qquad (1) \\ x \geq 0 \quad y &\geq 0 \end{aligned}$$

dan memaksimalkan f = $2x + y$ (2)

Pasangan (x, y) yang memenuhi (1) disebut penyelesaian fisibel (feasible solotion = FS) dan penyelesaian fisibel yang memenui (2) disebut penyelesaian optimal (optimal solotion). Karena soal hanya memuat 2 peubah dapat dipilih cara grafik untuk penyelesaiannya.



Dalam bidang $x\,o\,y$, setiap syarat merupakan suatu setengah bidang tertutup, sehingga irisan kelima syarat menghasilkan himpunan penyelesaian (titik) fisibel; F disebut daerah fisibel yang merupakan bidang segilima. Untuk satu nilai f, fungsi sasaran merupakan garis dengan arah tertentu disini koefisien arah (2).

Dengan mencoba 2 nilai f misalnya f = 0 dan f = 20 dapat disimpulkan bahwa untuk soal ini nilai f membesar bila garis digeser kekanan.
Nilai f = 20 belum maksimal, maka dengan menggeser garis f kekanan sejauh mungkin dengan tetap pada irisan dengan f akhirnya didapat letak optimal (disini maksimum) bagi f dengan f mak = 75 melalui titik B(30,15) dan B disebut titik optimal. Pasangan (x, y) = (30,15) penyelesaiannya nilai f optimal = 75 disebut nilai program. Dengan soal asli ini berarti kita harus memproduksi 30 kuintal padi dan 15 kuintal jagung (dan ini sesuai dengan 16 ha) akan memberikan keuntungan total Rp. 75.000,-

Dengan memasukkan penyelesaian optimal kedalam syarat awal akan didapat :

$$1/5\,(30) + 2/5\,(15) = 12 < 16 \text{ sisa } 4 \text{ ha}$$
$$3\ (30) + 2\ (15) = 120$$
$$12\ (30) + \quad = 360$$
$$x = 30 \geq 0 \qquad y = 15 \geq 0$$

disimpulkan bahwa tanah sisa 4 ha sedang modal dan air habis.
Catatan :

Dari contoh dalam grafik diatas dapat disimpulkan sebagai berikut. Jika ada penyelesaian optimal, maka f optimal akan tercapai paling sedikit pada satu diantara titik - titik sudut daerah fisibel.
Ini memberi jalan kepada kita menemukan f optimal kita cukup menyelidiki titik-titik sudut saja yang jumlahnya berhingga. Cara grafik hanya dapat digunakan untuk soal dengan 2 peubah.

3.18. TEOREMA SIMPLEKS

Dari beberapa contoh dimuka bentuk umum masalah Program Linier ditulis sebagai berikut:
Mencari x_j yang memenuhi

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \{\leq = \geq\} b_i \qquad i = 1,\ldots\ldots m \qquad \ldots\ldots\ldots (1)$$

memaksimalkan / meminimalkan $f = \sum_{j=1} c_j{}^{n} x_j$ .... (3)

Dengan $A = [a_{ij}]_{m \times n}$

$x = (x_1, x_2, .. x_n)$
$B = (b_1, b_2, .. b_n)$
$C = (c_1, c_2, .. c_n)$

Jika x memenuhi (1) dan (2), x disebut penyelesaian fisibel, dan jika penyelesaian fisibel tersebut juga memenuhi (3), x disebut penyelesaian optimal. Syarat (1) disebut utama sedang syarat (2) disebut syarat tak negatip dan C_j disebut cost coefisien.

Beberapa bentuk khusus :

Bentuk standart maksimum :

Mencari $x \geq 0$
$Ax \leq B$
memaksimalkan $f = Cx$

Bentuk standart minimum :

Mencari $x \geq 0$
$Ax \geq B$
meminimalkan $f = Cx$

Bentuk kanonik :

Mencari $x \geq 0$
$Ax = B$
Memaksimalkan / meminimalkan $f = Cx$

3.19. PENYELESAIAN CARA SIMPLEK

Cara simplek ini dapat digunakan untuk soal dengan banyak peubah berapa saja. Untuk memudahkan kita ambil contoh dimuka.

(Soal Produksi). Mencari x dan y tak negatip yang memenuhi :

$$\begin{cases} x + 2y \leq 80 \\ 3x + 2y \leq 120 \\ x \qquad \leq 30 \end{cases}$$

Memaksimalkan $f = 2x + y$

Bentuk standart ini kita ubah ke bentuk kanonik dengan cara memasukkan peubah-peubah slack (peubah kelonggaran) mencari x, y, t, m, a yang tak negatip.

$$\text{memenuhi : } \begin{pmatrix} x+2y+t+0+0 &= 80 \\ 3x+2y+0+m+0 &= 120 \\ 2x+0+0+0+a &= 30 \end{pmatrix}$$

dan memaksimalkan $f = 2x + y + 0t + 0m + 0a$

Ternyata untuk contoh diatas ada bentuk tereduksi lengkap dalam susunan persamaan syarat sehingga bentuk ini sudah siap untuk dimasukkan kedalam tabel simplek. Dengan bentuk di atas paling cocok ialah memilih x, y peubah bebas dan dinolkan sehingga nilai peubah basis dapat terbaca langsung di kolom suku tetap. Dibandingkan dengan rumus / umum dimuka maka:

$x = (x_i) = (x, y, m, a)$

$$B = (b_i) = (80,120,30) \quad A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$C = (c_i) = (2,1,0,0,0)$

Disusun tabel yang disebut tabel simplek

	$c_j = f$	**2**	1	0	0	0		
c_i	x_j \ x_i	x	y	t	m	a	b_i	R_i
0	t	**1**	2	1	0	0	80	80/1
0	m	**3**	2	0	1	0	120	120/3
0	**a**	**1**	**0**	**0**	**0**	**1**	**30**	**30/1**
	z_j	**0**	0	0	0	0	$z = 0$	
	$z_j - c_j$	**-2**	-1	0	0	0	$z = 0$	

Kotak ditengah adalah matrik A, dilengkapi dengan B dikanannya Basis x_j : semua peubah

Baris c_j : koef x_j dalam $f = \sum_j c_j x_j$ (cost coeff)

Kolom x_i : Peubah yang kebetulan menjadi basis dalam tabel : $x_1 = t = x_3$; $x_2 = m = x_4$; $x = a = x_5$

Kolom c_i : Cost Coefisien yang sesuai dengan x

Baris z_j : $Z_j = \sum_{i=1} c_i a_{ij}$ (kasil kali kolom)

c_i dengan kolom ke-j dalam A kebetulan nol semua

$$Z = \sum_{i=1} c_1 b_1 \text{ (hasil kali } c_1 \text{ dengan } b_1\text{)}$$

Kita perkenalkan dahulu langkah - langkah simplek

Dapat dibaca dari tabel :

1. Dalam A sudah ada I (sudah tereduksi lengkap) dengan penyelesaian basis yang sesuai : (x, y, t, m, a) = (0, 0, 80, 120, 30).

   Nilai peubah basis t, m, a terbaca pada kolom b_i, sedang nilai x, y sebagai perubah bebas kita isi dengan nol.
2. Basis $Z_j - C_j$ ternyata memberikan koefisien fungsi sasaran yang tertulis dalam bentuk implisit dengan konstanta diruas kanan yang ditunjukkan oleh Z.

   Disini f = 2 x + y + 0 t + 0 m + 0 a = 0

   Untuk penyelesaian basis kita nilai f menjadi f = Z = 0

   Jika x basis maka tentulah $Z_k - C_k = 0$

Pengujuan Pengoptimalan

(Untuk soal Maksimal)

Jika $\forall_j$ $Z_j - C_j \geq 0$ maka program sudah optimal.

Jadi jika masih ada $j \in Z_j - C_j \leq 0$ berarti program (tabel) belum optimal dan harus diperbaiki dengan cara mengganti satu peubah basisnya. Jika misalnya $Z_j - C_j < 0$, berarti x_k bukan basis jadi nilainya nol dan ia menjadi calon untuk masuk menjadi basis dan dengan nilainya yang positip akan memperbesar nilai f.

Kunci I

(Pedoman untuk memilih peubah pengganti = yang masuk ke dalam basis)

Pilih k $\ni Z_k - C_k = \min / j \{Z_j - C_j,\ Z_j - C_j < 0\}$ maka kolom ke k disebut kolom kunci dan x_k yang masuk ke dalam basis. Untuk contoh diatas ternyata tabel belum optimal dan k = 1 sehingga $x_1 = x$ terpilih sebagai pengganti.

Kunci II

(Pedoman untuk memilih variabel yang keluar dari basis = yang diganti)

Jika kolom ke-k adalah kolom kunci unsur $R_i = b_i / a_{ik}$ dengn $a_{ik} > 0$.

Pilih $r \ni R_r = \min / i \{R_i\}$ maka x adalah peubah basis yang diganti R biasanya ditulis dalam kolom terkanan. Basis ke-r disebut baris kunci dan a_{rk} disebut unsur kunci.

Kunci II timbul dari syarat bahwa b_i yang baru yg akan memberikan nilai - nilai peubah basis baru harus tak negatip. Dalam contoh kita, R_i terkecil adalah R_3 sehingga peubah basis yang diganti ialah x_3 = a.

Catatan : Jika dalam menggunakan kunci I atau II timbul lebih Dari satu pilihan maka kita boleh mengambil salah satu.

Menyusun tabel baru

	c_j = f	2	1	0	0	0		
c_i	x_j \ x_i	x	y	t	m	a	b_i	R_i
0	t	0	2	1	0	-1	50	50/2
0	**m**	**0**	**2**	**0**	**1**	**-3**	**30**	**3/2**
2	x	1	**0**	0	0	1	30	-
	z_j	2	**0**	0	0	2	z = 60	
	$z_j - c_j$	0	**-1**	0	0	0	z = 60	
0	t	0	0	1	-1	2	20	
1	y	0	1	0	½	-3/2	15	
2	x	1	0	0	0	1	30	
	z_j	2	1	0	½	½	z = 75	
	$z_j - c_j$	0	0	0	½	½	z = 75	

Tabel ke-2 disusun sebagai berikut : sebagai x_3 = a diganti oleh a dan isi c semula 0 diganti 2 = c = cost coefisien peubah x.

Operasi-operasi elementer dikerjakan terhadap basis-basis A supaya ke-3 menggantikan kolom ke-3 jadi baris kunci dibagi dengan unsur kunci supaya unsur kunci menjadi 1 (kebetulan sudah satu). Kemudian unsur-unsur lain dalam kolom supaya unsur kunci di nol kan dengan perantaraan baris kunci yang baru. Baris Z_j dan $Z_j - C_j$ disusun lalu proses berulang lagi dengan pengujian keoptimalitas. Ternyata tabel ke-2 juga belum optimal dengan satu - satunya calon basis ialah y, kolom ke-2 menjadi kunci dan basis ke-2 menjadi kunci. Disusun tabel ke-3 dengan cara mengganti m dan y sebagai x_2. Akhirnya dalam tabel -3 semua $Z_j - C_j$ sudah tak negatif program optimal dengan penyelesaian optimal $[x, y, t, m, a]$ = [30,15,0,0,0] dengan nilai program $f_{mak} = Z = 75$.

Sekarang kita bandingkan tabel simplek dengan grafiknya. Jika penyelesaian optimal kita masukkan dalam syarat asli didapat :

$x + y$ = 60 < 80 (t > 0) peubah slack bernilai nol

$3x + 2y$ = 120 (m = 0) berarti syarat semula

$x = 30$ (a = 0) berbentuk persamaan

Dalam contoh ini berarti bahwa tidak ada sisa modal dan air

3.20. Langkah-Langkah Metode Simplek (Tujuan Memaksimalkan)

Pada bentuk standar, semua syarat pembatas mempunyai tanda ≤, ketidaksamaan ini harus diubah menjadi bentuk persamaan (=) atau diubah ke bentuk kanonik, caranya dengan menambah slack (variabel baru) misalkan t, m, a menyusunnya sedemikian sehingga timbul matrik identitas.

Fungsi tujuan memaksimumkan $f = 2x + y$

Syarat pembatas (1) $x + 2y \le 80$

(2) $3x + 2y \le 120$

(3) $x \le 30$

$x, y \ge 0$

Berdasarkan persamaan diatas dapat disusun formulasi yang diubah sebagai berikut :

Fungsi tujuan memaksimumkan $f = 2x + y + 0t + 0m + 0a$

Syarat pembatas (1) $x + 2y + t = 80$

(2) $3x + 2y + m = 120$

(3) $x + a = 30$

Didalam syarat pembatas ditambah varabel baru (t, m, a), supaya tidak mempengaruhi harga maka fungsi tujuan variabel baru (t, m, a) harus dikalikan 0 (nol).

Langkah 2 : menyusun persamaan dalam tabel

Setelah formulasi diubah kemudian disusun kedalam tabel sebagai berikut :

Tabel awal simplek (1)

	$c_j = f$	2	1	0	0	0		
c_i	x_j \ x_i	x	y	t	m	a	b_i	R_i
0	t	1	2	1	0	0	80	
0	m	3	2	0	1	0	120	
0	a	1	0	0	0	1	30	
	z_j	0	0	0	0	0	$z = 0$	
	$z_j - c_j$	-2	-1	0	0	0	$z = 0$	

b_i adalah nilai kanan persamaan yaitu nilai dibelakang sama dengan (=). Untuk syarat pembatas (1) sebesar 80, syarat pembatas (2) sebesar 120 dan syarat pembatas (3) sebesar 30.

Variabel dasar adalah variabel yang nilainya sama dengan sisi kanan dari persamaan. Pada persamaan (3) x + a = 30, kalau belum ada kegiatan apa-apa berarti x = 0 dan semua kapasitas masih menganggur, maka pengangguran ada 30 unit atau nilai a = 30. untuk menghitung kolom z_j adalah jumlah perkalian antara kolon c_i dengan x_i, misal harga z_j pada kolom x adalah 0 . 1 + 0 . 3 + 0 . 1 = 0. Untuk kolom yang lain. Karena pengali kolom z_i bernilai 0 sehingga kolom c_j berisi 0 semua, dan harga optimalnya dapat diketahui dari besarnya kolom z.

Langkah 3 : Memilih kolom kunci

Kolom kunci adalah kolom yang merupakan dasar untuk mengubah tabel diatas. Pemilihan kolom $z_j - c_j$ yang mempunyai nilai negatif dengan angka terbesar, jika kebetulan ada dua angka yang sama pilih salah satu, dalam hal ini kolom x dengan nilai pada baris $z_j - c_j$ (-2) berilah tanda segiempat pada kolom x seperti terlihat pada tabel 2.

Kalau suatu tabel tidak memiliki nilai negatif pada baris $z_j - c_j$ berarti tabel tidak bisa dioptimalkan lagi (sudah optimal)

Tabel 2. Kolom $z_i - c_j$ terpilih

	$c_j = f$	2	1	0	0	0		
c_i	x_i \ x_j	x	y	t	m	a	b_i	R_i
0	t	**1**	2	1	0	0	80	80/2
0	m	**3**	2	0	1	0	120	120/3
0	a	**1**	0	0	0	1	30	30
	z_j	**0**	0	0	0	0	$z = 0$	
	$z_j - c_j$	**-2**	-1	0	0	0	$z = 0$	

Langkah 4 : Memilih Baris Kunci

Baris kunci adalah baris yang merupakan dasar untuk mengubah tabel tersebut diatas, untuk itu terlebih dahulu carilah indeks tiap-tiap baris dengan cara membagi nilai-nilai pada kolom b_i dengan nilai sebaris pada kolom kunci $z_j - c_j$ terpilih.

$$\text{Indeks} = \frac{\text{nilai kolom } b_i}{\text{nilai kolom kunci}}$$

Untuk baris pembatas (1) besarnya indek 80/1 = 80, pembatas (2) 120/3 = 40, dan pembatas (3) 30/1 = 30

Pilihan baris yang mempunyai indeks positif dengan angka terkecil, jika ada angka yang sama pilih salah satu, nilai kolom kunci 0 dan negatif tidak boleh dipilih. Dalam hal ini pembatas (3) yang terpilih sebagai baris kunci, berilah tanda segiempat pada baris kunci seperti pada tabel 3. Baris b_i Terpilih.

	$c_j = f$	2	1	0	0	0		
c_i	x_i \ x_j	x	y	t	m	a	b_i	R_i
0	t	**1**	2	1	0	0	80	80/1
0	m	**3**	2	0	1	0	120	120/3
0	a	**1**	**0**	**0**	**0**	**1**	**30**	**30/1**
	z_j	**0**	0	0	0	0	$z = 0$	
	$z_j - c_j$	**-2**	-1	0	0	0	$z = 0$	

Dari tabel terlihat yang terpilih pembatas (3) dan kolom $z_j - c_j$ kolom (1) yang menjadi baris kunci nilanya diusahakan menjadi satu yang lain diusahakan 0 kebetulan kolom kuncinya sudah satu sehingga tidak ada perubahan sehingga kolom fungsi tujuan terpilih f = 2 $x_j = x$ yang harus menggantikan kolom $c_i = 0$, x_i = a. Terlihat pada tabel 4.Cara Mengubah Nilai Baris Kunci.

	$c_j = f$	**2**	1	0	0	0		
c_i	x_i \ x_j	x	y	t	m	a	b_i	R_i
0	t	**1**	2	1	0	0	80	80/1
0	m	**3**	2	0	1	0	120	120/3
0	a	**1**	**0**	**0**	**0**	**1**	**30**	**30/1**
	z_j	**0**	0	0	0	0	$z = 0$	
	$z_j - c_j$	**-2**	-1	0	0	0	$z = 0$	
0	t							
0	m							
2	x	**1**	**0**	**0**	**0**	**1**	**30**	

Langkah 5 : Nilai baris kunci dubah dengan cara membaginya dengan angka kunci seperti pada tabel ...
Gantilah variabel baris c_i x_i pada baris itu dengan variabel terpilih $z_j - c_j$ yang terdapat pada fungsi tujuan dibagian atas 2 dan x.

Langkah 6 : Mengubah nilai barus yang lain selain pada baris kunci diubah dengan rumus.
Baris baru = baris lama - (koefisien pada kolom kunci) x nilai baru baris kunci
Untuk tabel diatas nilai baru sebagai berikut :

Baris kunci	(1)	0	0	0	1	30
Pembatas (1)						
	1	2	1	0	0	80
kalikan 1 →	1	0	0	0	1	30 –
nilai baru	0	2	1	0	-1	50

Baris ke 3 tidak berubah karena nilai pada kolom kunci sudah bernilai 0.
Tabel 6.

	$c_j = f$	2	1	0	0	0		
c_i	x_j \ x_i	x	y	t	m	a	b_i	R_i
0	t	0	0	1	-1	-2	20	
0	y	0	1	0	½	-3/2	15	
0	x	1	0	0	0	1	30	
	z_j	2	1	0	½	½	$z = 75$	
	$z_j - c_j$	0	0	0	½	½	$z = 75$	

Kalau dilihat pada kolom $z_j - c_j$ pada tabel 6 tidak ada lagi yang bernilai negatif, semuanya positif. Berarti tabel itu tidak dapat dioptimalkan lagi sehingga hasil dari tabel tersebut sudah merupakan hasil yang optimal.
Rangkuman langkah-langkah secara keseluruhan
Kalau tabel awal (sebelum diubah, tabel hasil perubaahan dan tabel hasil perubahan dijadikan satu maka akan nampak jelas perubahannya seperti pada tabel... dari tabel ini maka akan nampak maksud dari tiap-tiap variabel dan nilai-nilai yang ada pada tabel optimal yaitu :
$x = 30$ $y = 15$ $z = 75$
artinya keuntungan yang akan diperoleh 75.000 bila memproduksi 30 kw padi dan 15 kw jagung.

Tabel 7. Tabel-tabel yang diperoleh dari tabel 1 sampai perubahan terakhir.

	$c_j = f$	**2**	1	0	0	0		
c_i	x_j \ x_i	x	y	t	m	a	b_i	R_i
0	t	**1**	2	1	0	0	80	80/2\1
0	m	**3**	2	0	1	0	120	120/3
2	**a**	**1**	**0**	**0**	**0**	**1**	**30**	**30/1**
	z_j	**0**	0	0	0	0	$z = 0$	
	$z_j - c_j$	**-2**	-1	0	0	0	$z = 0$	

	$c_j = f$	2	1	0	0	0		
c_i	x_j \ x_i	x	y	t	m	a	b_i	R_i
0	t	0	**2**	1	0	-1	50	50/2
1	**m**	**0**	**2**	**0**	**1**	**-3**	**30**	**3/2**
2	x	1	**0**	0	0	1	30	-
	Z_j	2	**0**	0	0	2	Z = 60	
	$Z_j - c_j$	0	**-1**	0	0	0	Z = 60	
0	t	0	0	1	-1	2	20	
1	y	0	1	0	½	-3/2	15	
2	x	1	0	0	0	1	30	
	z_j	2	1	0	½	1/2	Z = 75	
	$z_j - c_j$	0	0	0	1/2	1/2	Z = 75	

Simplek untuk soal Minimum Untuk jelasnya kita lihat contoh berikut :

Minimalkan $f = 40x + 80y$

dengan syarat $x + y \geq 4$

$x + 3y \geq 6$

$x \geq 0 \; y \geq 0$

diubah ke bentuk kanonik: dengan memasukkan peubah atau slack s_1 dan s_2 sehingga syarat menjadi :

$$\begin{cases} x + y - S_1 = 4 \\ x + 3y - S_2 = 6 \end{cases}$$

Tetapi dalam matriks koefisien belum terdapat matriks I (belum tereduksi lengkap) sehingga belum ada penyelesaian basis yang langsung terlihat, maka sekedar supaya kita dapat menggunakan metode simplek yang memulai langkahnya pada suatu penyelesaian basis fisibel maka ditambahkan lagi peubah semu secukupnya supaya timbul I menjadi :

$$\begin{cases} x + y - S_1 + V_1 = 4 \\ x + 3y - S_2 + V_2 = 6 \end{cases}$$

x, y, s_1, s_2, v_1, v_2 tak negatip

Supaya persamaan - persamaan ini tidak bertentangan dengan persamaan diatas seharusnya v_1 dan v_2 bernilai nol. Memang v_1 dan v_2

disini hanya berperan sebagai katalisator (jawa = pupuk bawang) sekedar supaya proses simplek dapat berjalan sehingga disyaratkan bahwa pada penyelesaian optimal v_1 dan v_2 tidak boleh timbul dalam basis dengan nilai positip. Maka meskipun dalam tabel awal v_1 dan v_2 masuk sebagai basis, diusahakan supaya dia segera keluar dengan menempelkan cost coef. baginya berupa bilangan M yang positip besar.

Fungsi sasaran baru menjadi :

$$f = 40\,x + 80\,y + 0\,s_1 + 0\,s_2 + M\,v_1 + M\,v_2$$

Jika $v_1 = v_2 = 0$ maka $\overline{f}_{\min} = \overline{f}_{\min}$ Jika f optimal dengan ada $v_1$dan v_2 yang positip berarti f tidak mempunyai optimal.

	$c_j = f$	40	80	0	0	M	M		
c_i	x_j / x_i	x	y	s_1	s_2	v_1	v_2	b_i	R_i
M	v_1	1	1	-1	0	1	0	4	4/1
M	v_2	1	3	0	-1	0	1	6	6/3
	z_j	2M	4M	-M	-M	M	M	Z= 10M	
	$z_j - c_j$	2M-40	4M-80	-M	-M	0	0		
M	v_1	2/3	0	-1	1/3	1	-1/3	2	3
80	y	1/3	1	0	-1/3	0	1/3	2	6
	Z_j	$\frac{2M}{3}+\frac{80}{3}$	80	-M	$\frac{M}{3}-\frac{80}{3}$	M	$-\frac{M}{3}+\frac{80}{3}$	2M+160	
	$Z_j - c_j$	$\frac{2M}{3}-\frac{40}{3}$	0	-M	$\frac{M}{3}-\frac{80}{3}$	0	$-\frac{4M}{3}+\frac{80}{3}$	2M+160	
40	X	1	0	-3/2	½	3/2	-½	3	
80	y	0	1	½	-½	-½	½	1	
	Z_i	40	80	-20	-20	20	20	Z= 200	
	$Z_j - c_j$	0	0	-20	-20	20-M	20-M		

<u>Ciri optimal (soal minimal)</u>

Jika V_j , $Z_j - C_j \leq 0$ maka program sudah optimal (minimal) dalam tabel 1 masih ada $Z_j - C_j$ yang positip jadi belum optimal

Kunci I : (soal min)
Pilih k ∋ $Z_k - C_k$ = mak / j {$Z_j - C_j$, $Z_j - C_j > 0$} maka x terpilih masuk kedalam basis.
Kunci II : sama dengan soal maksimum Dengan pedoman diatas ternyata tabel 3 sudah optimal dengan penyelesaian basis optimal [x , y ,s_1,s_2,v_1,v_2] = [3,1,0,0,0,0] jadi ($v_1 = v_2 = 0$)
Penyelesaian soal asli [x , y] = [3,1] dengan nilai program $f_{min} = \bar{f}_{min} = 200$
Contoh soal maksimum dengan perubah semu
Maksimalkan $f = x + 4y$
syarat $x + y \leq 6$

$2x + y \geq 24 \quad x \geq 0,\ y \geq 0$

Diubah ke bentuk yang siap simplek mencari x , y , s_1 , s_2 , v tak negatip
memenuhi $x + y + s_1 = 6$

$2x + y + -s_2 + v = 4$

dan maksimalkan $\bar{f} = x + 4y + 0s_1 + 0s_2 - Mv$
karena $\bar{f}$ harus diperbesar maka supaya v segera keluar dari basis dia diberi cost coef (-M) dengan M positip besar.

	$c_j = f$	1	4	0	0	-M		
c_i	x_j \ x_i	x	y	s_1	s_2	v	b_i	R_i
0	s_1	**1**	1	1	1	0	6	6
-M	**v**	**2**	**1**	**0**	**-1**	**1**	**4**	**2**
	z_j	**-2M**	-M	0	M	-M	Z = -4M	
	$z_j - c_j$	**-2M-1**	-M - 4	0	M	0		
0	S_1	0	½	1	½	- ½	4	8
1	**x**	**1**	**½**	**0**	**-½**	**½**	**2**	**4**
	Z_j	1	½	0	-½	½	Z = 2	
	$Z_j - c_j$	0	**-7/2**	0	-½	½ +M		

	$c_j = f$	1	4	0	0	-M		
c_i	x_i \ x_j	x	y	s_1	s_2	v	b_i	R_i
0	**S_1**	**-1**	**0**	**1**	**1**	**-1**	**2**	**2**
4	y	2	1	0	**-1**	1	4	-
	Z_j	8	4	0	**-4**	4	Z = 16	
	$Z_j - c_j$	7	0	0	**-4**	4+M		
0	s_2	-1	0	1	1	-1	2	
4	y	1	1	1	0	0	6	
	z_j	4	4	4	0	0	Z = 24	
	$z_j - c_j$	3	0	4	0	M		

Setelah melalui 4 tabel program sudah optimal (maks) dengan penyelesaian optimal $[x, y, s_1, s_2, v] = [0, 6, 0, 2, 0]$ Penyelesaian soal asli $(x, y) = (0,6)$ dengan nilai program = 24

Disini $\overline{f}_{mak} = f_{mak}$ (karena peubah semu tidak timbul dalam penyelesaian optimal dengan nilai positip)

<u>**Soal - Soal**</u>

1. Daerah arsiran yang merupakan penyelesaian dari pertidaksamaan :

   $8x + 5y \leq 40$

   $x + 2y \leq 8$

   $x \geq 0, \quad y \geq 0$

2. Soal sama diatas : $5x + 4y \geq 20$

   $0 \leq y \leq 4$

   $0 \leq x \leq 3$

3. Dari ketentuan soal nomer 2 diatas jika P = $24x$ - 3y + 52. Berapa nilai minimum untuk P ?
4. Seorang petani memerlukan zat kimia jenis A, B dan C berturut-turut sebanyak 20 kg, 18 kg, dan 12 kg untuk memupuk kebun sayurnya. Dalam setiap kaleng pupuk cair mengandung zat A = 1 kg, B = 2 kg, dan C = 3 kg. Pupuk kering tiap kantong mengandung zat A = 5 kg,

B = 3 kg, dan C = 1kg. Harga 1 kaleng pupuk cair Rp.1000 dan 1 kantong pupuk kering Rp.1500. Berapa banyak tiap jenis pupuk harus dibeli dengan harga paling murah dengan zat yang diperlukan terpenuhi. Terjemahkan data tersebut ke dalam model matemamatika sehingga jelas:

a. Aktivitas (variabel) c. fungsi tujuan

b. fungsi pembatas d. berapa yang harus dibeli petani.

5. Tersedia dua macam kapsul obat flu jenis fluin dan fluon yang masing-masing memuat unsur-unsur Aspirin Bikarbonat dan Kodein. Kandungan unsur dalam masing-masing kapsul dan syarat kebutuhan minimum pasien akan unsur-unsur tersebut supaya sembuh tertera dalam tabel matriks berikut :

	Satu Kapsul		Min kebutuhan (gram)
	Fluin	fluon	
Aspirin	2	1	12
Bikarbonat	5	8	74
Kadein	1	5	24
Harga	250	300	

Berapa fluin dan fluon harus dibeli dengan min pengeluaran ?

6. Seorang peternak di desa Tembalang sebagai desa binaan ingin beternak Ayam (A), Itik (I), dan Kalkun (K). Kapasitas kandang maksimum 500 ekor selalu penuh. Peternak ingin Itik tidak melebihi 300 ekor demikian juga Kalkun paling banyak 300 ekor. Ongkos pemeliharaan sampai laku terjual Ayam Rp.3000, Itik Rp.2000, dan Kalkun Rp. 5500. Harga jual Ayam Rp. 6500, Itik Rp.5000, dan Kalkun Rp. 10.000. Manakah program yang memaksimalkan keuntungan total. Keterangan (Keuntungan = Harga jual - ongkos pemeliharaan)

7. Selesaikan dengan teorema Simplek

Minimalkan $f = 2u + 5v + w$

dengan syarat $9u - 3v + 5w \geq 7$

$6u - 4v - 3w \leq 2$

u, v, w, tak negatif

8. Maksimalkan $f = 5x + 7y + 2z$
   dengan pembatas
   $$x + y + 3z \le 35$$
   $$2x + y + z \le 40$$
   $$x + 2y + z \le 50$$
   $$x, y, z \ge 0$$
9. Maksimalkan $f = 3u + v + 4w$
   dengan syarat
   $$6u + 3v + 5w \le 25$$
   $$3u + 4v + 5w \le 20$$
   $$u, v, w \ge 0$$
10. Minimalkan $f = 12x + 3y + 2z$
    dengan syarat
    $$2x + 2y + 3z \ge 9$$
    $$3x - y + z \ge 2$$
    $$-5x + 3y - 2z \ge 5 \qquad x, y, z \ge 0$$
11. Perusahaan sepatu Sukses membuat 2 macam sepatu, macam pertama merek Laris (Lr) dengan sol dari karet dan macam kedua merek Laku (lk) dengan sol dari kulit. Untuk membuat sepatu-sepatu itu perusahaan memiliki 3 macam mesin.
    Mesin 1 khusus membuat sol dari karet, Mesin 2 membuat sol dari kulit dan Mesin 3 membuat bagian atas sepatu dan melakukan assembling bagian atas dengan sol.
    Setiap lusin sepatu merek Laris mula-mula dikerjakan di mesin 1 selama 2 jam kemudian tanpa mesin 2 lalu dikerjakan mesin 3 selama 6 jam.
    Sedang sepatu merek Laku tidak diproses di mesin 1 tetapi pertama dikerjakan dimesin 2 selama 3 jam kemudian di mesin 3 selama 5 jam.
    Jam kerja maksimum setiap hari untuk mesin 1 selama 8 jam, mesin 2 selama 15 jam dan mesin 3 selama 30 jam.
    Keuntungan setiap lusin sepatu merek Laris Rp. 30.000,- dan merek Laku Rp. 50.000,-.
    Masalahnya adalah menentukan berapa lusin sebaiknya sepatu merek Laris dan merek Laku yang dibuat agar memperoleh keuntungan maksimal.

BAB VIII

" VEKTOR "

VEKTOR

Difinisi : Vektor ialah : besaran yang mempunyai besar dan arah.
Misalnya : Perpindahan (displacement)
Kecepatan (velocity)
Gaya (energy)
Percepatan (Accelation)
Gambar 1.

Titik awal dari vektor tersebut ialah : titik A dan titik ujungnya ialah : B. Garis lurus yang melalui AB disebut garis pembawa dari vektor tersebut. Suatu vektor digambarkan dengan memberi tanda panah titik ujungnya. Sedangkan cara menulisnya dapat memakai salah satu notasi berikut: a a A A AB ataupun AB (yaitu vektor yang titik awalnya A dan titik ujungnya B).

Panjang dari vektor a ditulis)| 1a)|1. Vektor pada gambar 1 dinamakan a atau AB dimana pasangan garis AB merupakan panjangnya dan arah vektor tersebut dari A ke B

Dua buah vektor dinamakan sama jika panjang dan arahnya sama. (Arah sama artinya mempunyai garis pembawa yang berimpit atau sejajar dengan arah panah sama). Jadi vektor tidak tergantung kepada letaknya tetapi tergantung pada panjang dan arahnya.

Pada gambar 1. vektor b = a.

I !Operasi_operasis_Vektor1.

1. Penjumlahan vektor.

Ada dua jumlah untuk menjumlah vektor a dan b:

a. Metode jajara genjang.

Jumalah dari vektor a dan b diperoleh dari diagonal jajaran genjang yang dibentuk oleh a dan b setelah titik awal ditempatkan berhimpit.

contoh : Untuk beberapa kedudukan a dan b.

[Gambar 2.

b. Metode segitida.

Jumlah dari vektor a dan b diperoleh dengan menempatkan titik awal salah satu vektor (mis. b) pada titk ujung vekor a maka jumlah (resultan) ialah : vektor bertitik awal a dan bertitik ujung di titik b

[Gambar3

Penjumlahan vektor bersifat komutatif artinya untuk setiap vektor a dan b berlaku a b = b a ; maka pemilihan vektor mana yang didahulukan tidaklah menjadi persoalan.

[Gambar 4.

Apabila diperbandingkan gambar 3 dan 4 bahwa a b = b a.
Metode segitiga baik untuk menjumlah lebih dari dua vektor.
Misalnya hendak menjumlah a b c d e
maka berturut turut ditempatkan titik awal dari b pada titik ujung dari a titik awal dari c pada titik ujung dari b dan seterusnya (pemilihan urutan tidak menjadi persoalan).
Jumlah nya ialah : vektor yang titik awalnya dititik awal vektor pertama (a) dan titik ujung vektor terakhir (e).

[Gambar 5.

selain dari vektor a dan b dinyatakan oleh a b.jadi a b dapat didefisinikan sebagai a (b)

[Gambar 6.

Jika a = b maka a b didefisinikan sebagai vektor nol atau vektor kososng dan tidak memilih arah tertentu. Vektor yang tidak nol ialah : vektor sejati (praper vektor). semua vektor akan dipandang sejati kecuali jika ada pernyataan lainnya.
Perkalian Skalar
Kalau k suatu skalar bilangan riil a suatu vektor maka perkalian skalar k.a menghasilkan suatu vektor yang panjangnya | 1k)| 1kali panjang a dan

arahnya sama dengan arah a bila k negatip. Bila k = 0 maka k.a = 0 disebut vektor nol yaitu vektor yang titik awal dan titik ujungnya berimpit.
Sebagai gabungan dari operasi penjumlahan serta perkalian skalar kita dapat mengurangkan vektorvektor misalnya a b = a (b) yaitu penjumlahan vektor tidak komutatip a b)$ 1b a

Gambar 7.

Susunan Koordinat Ruang (R)

a. Ruang berdimensi satu (R)

Setiap bilangan riil dapat diwakili oleh sebuah titik pada suatu garis lurus yang membentuk susunan koordinat didalam ruang berdimensi 1 ditulis R Pada gambar 8. titik 0 sebagi titik awal susunan koordinat dan suatu titik E diman panjang OE = 1 satuan.

Gambar 8.

Titik O mewakili bilangan O titik E mewakili bilangan satu. Ditulis O(o) E(1). P(23) artinya P mewakili bilangan 23 dan letaknya P sebagai OP = 23 satuan kearah E (arah positip) atau R(V3) sehingga OR = V3 satuan kearah yang berlawanan (arah negatip).

b. Ruang berdimensi dua (R)

Setiap pasangan bilangan riil (disebut koordinat titik) dapat diwakili oleh sebuah bidang rata yang membentuk susunan koordinat didalam ruang berdimensi dua ditulis R .

Untuk itu dibuat dua buah garis (yang tidak sejajar) dan titik potongnya merupakan titik awal O. Masingmasing garis disebut sumbu koordinat.

Gambar 9.

c. Ruang berdimensi tiga (R)

Setiap tripel bilangan riil dapat diwakili oleh sebuah titik didalam ruang berdimensi tiga ditulis R dengan membentuk suatu susunan koordinat yaitu mengambil 3 garis lurus yang berpotongan dititik awal O. Masingmasing garis disebut sumbu koordinat.

Gambar 10.

Pada gambar 10. titik A(200) B(010) C(002) D(230).

Titik T(233) dapat diketahui dengan melukiskan paralel epipedum yang rusuknya berturutturut 2 pada sumbu X 3 pada sumbu X dan 3 pada sumbu X semua kearah positip.

d. Ruang berdimensi N (R)

Suatu susunan koordinat yang tegak lurus (disebut susunan koordinat Cartesius) di R .

Suatu vektor disebut vektor satuan bila panjangnya =1.

Vektorvektor satuan e = OE yang titik awalnya O(oo) dan titik ujungnya E (10) e = OE yang titik awalnya O(00) dan titik ujungnya E (01).

e = 1 e 0 e dan e = 0 e 1 e

Selanjutnya penulisan menjadi e = (10) dan e = (01)

Vektor A yang titik awalnya O(00) dan titik ujungnya titik A(a a) maka vektor a disebut vektor posisi (radius vektor) dari titik gambar a = a e a e atau a = (a a)

Bilanganbilangan a a a disebut komponenkomponen dari a. Jelas bahwa panjang vektor a = v a a (phytagoras)

Gambar 11.

Secara umum untuk vektor p yang titik awalnya P(p p)
dan titik ujungnya Q(q q)

PQ = p(q p) e (q p) e

= (q p) (q p)

Penyajian ini tidak menyalahi ketentuanketentuan tentang besaran vektor. Pada gambar 12 apabila vektor p titik awalnya titik (00) maka titik ujungnya (q p q p)

Maka kesamaan vektor dapat didifinisikan kembali sebagai berikut:

Vektor a = (a a) dan b = (b b) sama jika a = b dan 1a = b dengan perkataan lain komponen yang sama letaknya mempunyai harga yang sama.

Untuk R dapat diperluas sebagai berikut:

1. Vektor posisi dari titik A (a a ...... a)
ialah : a = 0 A = (a a .... a)

12. Vektor bertitik awal di P (p p .... p) dan bertitik
1ujung di Q (q q ...... q) ialah :
1p = PQ = (q p q p ..... q p)

13. Panjang vektor q = (a a ...... a) ialah :
1a = *r 1a a .... a
1Jarak 2 titik P (p p ..... p) dan Q (q q ...q)
1ialah : panjang vektor PQ yaitu:

1PQ = *r 1(q p) (q p) .... (q p)

14. Vektor a = (a a .... a) dan b = (b b ..... b)

1dikatakan sama jika a = b untuk setiap i = 1 2 ...n

1dengan perkataan lain a = b a = b ... a = b

1Misalkan vektor a = (1 2 3) dan b = (1 2 3) merupakan vektor yang sama.

Vektor a = (2 3 4) dan b = (3 4 5) merupakan vektor yang tidak sama sebab komponenkomponen yang letaknya sama tidak mempunyai besar yang sama.

5. Vektorvektor satuan dan susunan koordinat ialah : e = (1 0 0); e = (0 1 0); e = (0 0 1) berlaku

1bila a = (a a a) maka a = (a e a e ...a e)

16. Penjumlahan vektor a = (a a ... a) dan b = (b b

1...... b) berlaku

1a b = (a a ...... a) (b b ..... b)

1= a e a e ..... a e b e b e ...b e

1= (a b a b .... a b)

17. Perkalian vektor a = (a a .... a) dengan skalar k

1berlaku k a = k (a a ...... a)

1= k (a e a e ..... a e)

1= (k a e k a e ...... k a e)

1= (k a k a .... k a)

Catatan : dalam beberapa buku menuliskan sebuah vektor ialah : a = (a a ... a) atau ada pula yang menuliskan sebagai

Contoh - contoh:

11. Vektorvektor (0 1) (1 3) (2U) ialah : anggota R karena masingmasing mempunyai 2 komponen.

12. Vektor (5 13 4 2) ialah : anggota R

13. Vektor (3) anggota R

4. Diketahui a = (1 3 2 4) dan b = (3 5 1 2)

a b = (1 3 3 5 2 1 4 2) = (4 2 1 2)

5 b = (5 .3 5. 5 5 .(1) 5 .(2)) =(1525510)

2a3b = (2.1 2.(3) 2.(2) 2 (4))(3 .33.53.13.2)

= (2 6 4 8) (9 15 3 6)

= (7 21 7 14)

5. Vektor yang panjangnya = 0 disebut vektor nol ditulis
0 = (0 0 .... 0) dan setiap a = (a a .... a) berlaku a 0 = 0 a = a
6. Diketahui persamaan vektor (z x y) = 2 3 7) maka haruslah z = 2 x = 3 dan y = 7
III. Beberapa dalil pada operasi vektor untuk setiap untuk setiap
vektor a = (a a ... a); b= (b b ... b)

11. a b = b a
2. (a b) c = a (b c)
3. k (a b) = k a k b
4. a 0 = a
5. a (a) = a
6. (k m) a = k a m a
7. (k m) a = k (m a) = m (k a)

IV. Dot Produk
Bila a dan b vektorvektor dan)x 1ialah : sudut antara a dan b (0)< x< 'p 1) maka dapat didifinisikan dot produk dari a dan b disajikan sebagai a b ialah : suatu skalar a.b =)|1a)||1b)| 1cos)x atau panjang a . panjang b dan cos sudut antara a dan b bahwa a.b =)|1a)||1b)| 1cos)s 1=)| 1b)|| 1a)| 1cos)s 1= b.a Panjang vektor a dan b)$ 10 proyeksi a pada b ialah : potongan garis A' B' = AC

AC =)|1a)| 1cos)s 1=)|1a)| 1 cos)s

Pada gambar 13. vektorvektor a b dam c. akan dibuktikan hukum distributip (b c) a = b a c a Proyeksi (b c) pada a = proyeksi b pada a proyeksi c pada a atau (b c) a b a c a Jadi (b c) a = b a c a atau a (b c) = a b a c
Catatan :
1. Kalau e vektorvektor satuan yang saling tegak lurus dan panjangnya = 1 maka untuk i)$ 1j; e . e =)|1e)||1e)| 1cos 90 = 0 dengan sifat distributip
a.b = a b a b .... a b = a b
12. Panjang vektor a dapat ditulis:
13. Berlaku sifat definit positip yaitu a.a)> 10 bila a)$ 10

4. Bila a)$ 10 dan b)$ 10 maka a tegak lurus b yaitu a.b = 0 karena 0 =)|1a)||1b)| 1cos)s1 dimana a)$ 10. b)$ 10)y1yang berarti sebaliknya a tegak lurus b maka a.b = a b cos 90 = 0
5. Vektor a panjangnya =)| 1a)|1 maka vektor e = ialah : vektor satuan yang searah dengan a
Contoh : a = (2 2 1) dan b = (2 3 6) maka a.b = 4
)| 1a)| 1= v 2 (2) 1 = 3
)| 1b)| 1= v 2 3 6 = 7
a.b = 3.7 cos)s 1= 4
= 21 cos)s 1= 4 ====> cos)s 1= 421
e = 13 (2 2 1) = (23 23 13)
1Bila c = (0 1 2) maka a.c = 0)| 1c)| 1= v 0 (1) (2)
= v 15 karena)| 1a)| $ 10)| 1c)| $ 10; a . c = 0
cos)s 1= 0 berarti a tegak lurus c.
V. Persamaan Garis Lurus dan Bidang Rata.
Sebuah garis lurus akan tertentu bila diketahui 2 titik pada garis tersebut.
Misalkan titik A(a a a) dan B(b b b)
terletak pada garis lurus g maka OA = (a a a)
OB = (b b b) dan AB = (b a b a b a)
untuk setiap titik sebarang X (x x x) pada g berlaku
A X = A B ( )8 1< 'l 1<)8 1) jelas bahwa OX = OA OX
= OA 'l 1AB atau
(x x x) = (a a a) 'l 1(b a b a51b a)
disebut persamaan vektoris garis lurus yang melalui 2 titik
A(a a a) dan B (b b b)
Vektor AB (vektorvektor lain)$ 10 yang terletak pada g dengan perkataan lain kelipatan dari AB) disebut vektor arah garis lurus tersebut. Jadi bila garis lurus melalui ttk A(a a a) dengan vektor arah a = (a b c) persamaannya
(x x x) = (a a a) 'l 1(a b c)
dengan (< 'l 1<).
Persamaan diatas dapat ditulis menjadi :
yang disebut persamaan parameter garis lurus kemudian bila
a)$ 10 b)$ 10 c)$ 10 dieliminasikan dari persamaan diatas di
peroleh (x a) (x a) (x a)
'l 1= = = atau bila

(b a))$ 10 (b a))$ 10 (b a))$ 10 'l 1dieliminasikan
dari ( ) diperoleh

(x a) (x a) (x a)
'l 1= = =
(x a) (x a) (x a)

Bentuk : 51 1 2 2 3 3
= =
1a b c

merupakan persamaan linier garis lurus melalui ttk (a a a)
dengan vektor arah (a b c) dan

(x a) (x a) (x a)
51 1 2 2 3 3
= =
1(b a) (b a) (b a) 5.... ( )
1 1 2 2 3 3

merupakan persamaan garis linier garis lurus melalui
(a a a) dan (b b b)5.

Secara umum untuk R .
Persamaan vektoris garis lurus melalui A (a a ....a)
dan B (b b ..... b) ialah :
1(x x ... x) = (a a .... a) 'l 1(b a b a..b a)
dan melalui titik A (a a ....a) dengan arah (p p ..p)
1(x x .....x) = (a a ... a) 'l 1(p p ... p)
Persamaan Parameternya

x =a (b a) x =a 'l 1p
x =a (b a) x =a 'l 1p
x =a (b a) x =a 'l 1p

Persamaan liniernya:

x a x a x a
= = ...=
1b a b a b a

Bila b a)$ 10 untuk setiap i = 1 2 .... n serta

1x a x a x a
= = ...=

1p p p

1bila p)$ 10 untuk setiap i = 1 2 ..... n

Contoh : Persamaan garis lurus melalui (3101) dan 1(2012) di R ialah : persamaan vektoris

(x x x x) = (3101) 'l 1(23011021)

= (3101) 'l 1(1111)

Persamaan parameternya x =3 'l 1x = 1 'l

1x ='l 1x = 1 'l

1Persamaan liniernya : (x 3) (x = 1) x (x 1)

= ==

atau x 3 = x 1 = x = x 1

BAB IV
"F U N G S I"

4.1. KONSTANTA DAN VARIABEL

Konstanta ialah : lambang yang digunakan untuk menyatakan suatu idea.

Contoh :

Δ Tekanan gas pada temperatur tertentu berbanding terbalik dengan volumenya. P.V = C (dalam kalimat ini C melambangkan sebuah konstanta).

Δ n adalah jumlah semua bilangan bulat dari 1 sampai dengan 10. (n menyatakan konstanta).

Variabel ialah : lambang yang digunakan untuk menyatakan suatu yang tidak tentu atau berubah-ubah.

Contoh :

Δ x adalah bilangan bulat maksudnya x adalah salah satu dari sekumpulan bilangan bulat yang belum ditunjuk yang mana mungkin 1 mungkin 2 dan lain sebagainya. (x hal ini disebut variabel).

Δ P.V = C seperti contoh diatas P dan V tidak melambangkan konstanta karena nilai P dan V masih berubah-ubah. (P dan V dinamakan variabel).

4.2. PRODUK KARTESIUS

Difinisi : Pasangan urutan dari pada unsur a dan b∈S dinyatakan (a,b) adalah himpunan {{a}, {a,b}}.

Contoh :

misal S = {1,2,3,...} maka pasangan urutan (1,2) adalah {{1},{1,2}} sedangkan pasangan urutan (2,1) adalah {{2},{2,1}}. Pada (1,2) ; 1 kita sebut komponen pertama (absis) dan 2 kita sebut komponen kedua (ordinat).

Difinisi : (a,b) = (c,d) ⟷ (a = c dan b = d)

Contoh : bila (2,1) = (a,b) maka a = 2 dan b = 1

Catatan : Dalam pasangan urutan kita dapat memasang-masangkan unsur himpunan yang lebih dari dua buah. Bila jumlah himpunan yang dipasangkan itu ada n buah, maka pasangan $(a_i, b_k, c_j, .. n_m)$ di dinamakan pasangan n-tupel.

Contoh : $A = \{a_1, a_2, a_3, \dots a_n\}$

$B = \{b_1, b_2, b_3, \dots b_n\}$

$C = \{c_1, c_2, c_3, \dots c_n\}$

Maka pasangan urutannya adalah (a_1,b_1,c_1), (a_1,b_1,c_1) .. dan lain sebagainya dinamakan pasangan 3-tupel.

Soal - Soal

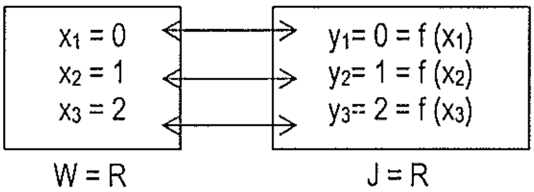
1. Dalam kalimat dibawah ini x yang mana berbentuk variabel dan konstanta:
   a. x adalah jumlah hari dalam seminggu
   b. x adalah umur anak itu pada waktu sekolah
   c. seumpama x adalah nilainya
   d. Si x dikelas itu adalah yang terpandai
2. Tulislah arti notasi berikut ini :
   (2,3), {{2}, {3,0,5}}, (3,0,5)
3. Tuliskan semua pasangan urutan A = {1,2,3,4} dalam A x A

4.3. FUNGSI

Misal relasi $\{(x, y) / x, y \in R; x = x\}$

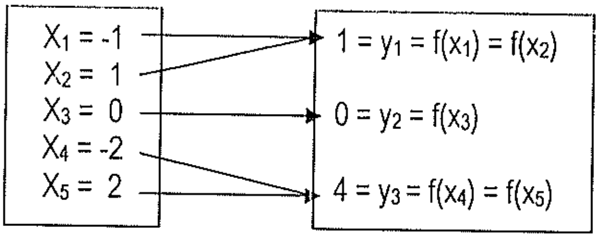
Untuk tiap-tiap nilai x dalam wilayahnya mempunyai relasi tepat satu nilai y dalam daerah jelajahnya.

$$x = x;\ f: x \longleftrightarrow x$$



mungkin saja satu nilai y didapat dari dua nilai x

$$y = x^2 \; ; \; f = x \longrightarrow y$$



W = R J = R

Relasi yang demikian, dimana tiap x hanya menyatakan tunggal y dalam daerah jelajahnya disebut fungsi.

4.4. GRAFIK FUNGSI

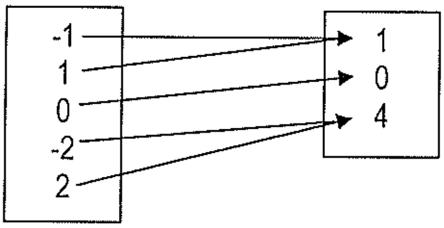
Bila f = $\{(x, y) \,/\, \forall\, (x, y) \in R \times R \; ; \; y = f(x)\}$dipetakan pada sistem salib sumbu cartesius akan didapati himpunan titik bidang kartesius himpunan ini disebut grafik f.

Contoh :

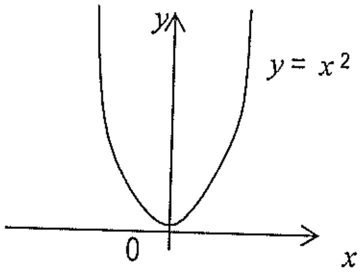
1. Misal f = $\{(x, y) \,/\, (x, y) \in R \times R \; ; \; y = x^2\}$

   Berapa unsur f = {(0,0), (1,1), (-1,1), (2,4), (-2,4) ..} R x R dipetakan pada bidang kartesius.

f



Bila setiap (x, y) dari pada f digambar untuk $y = x^2$ berbentuk parabola.



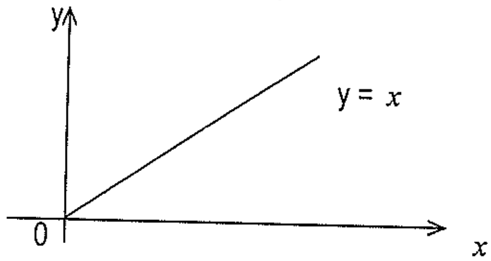
2. Misal f = (x, y) / v (x, y) ε R x R ; $y = x$
   Berapa unsur f = (0,0), (-1,-1), (1,1) .. digambar pada R x R

-1
0
2

W = R

-1
0
2

J = R



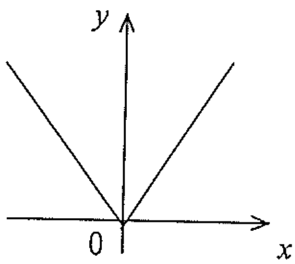
3. Misal : $\{(x, y) / y = x$, bil a $x \geq 0\}$
   $\{(x, y) / y = -x$, bil a $x < 0\}$
   Daerah jelajah f adalah bilangan non-negatip real ditulis | x |.
   $y = f(x) = |x|$ berapa unsur f = {(0, 0), (1,1), (-1, 1)

-1/2
0
1

W = R

-1/2
0
1

J = R

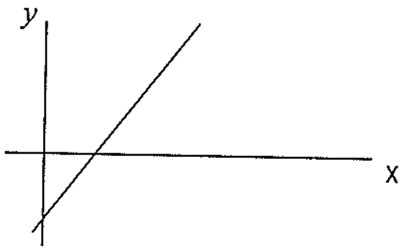


4. Misal f = {(x , y) / y = 1} untuk setiap x ε R
   Nilai fungsi itu tunggal = 1 setiap x ε W dikaitkan dengan 1 dalam daerah jelajahnya.

W = R	J = R
x_1 x_1 x_3	$1 = f(x_1) = f(x_2) = f(x_3)$

5. Buatlah diagram Venn-Euler serta grafik fungsi $y = 2x - 3$
   Penyelesaiannya : $y = 2x - 3$; f : w ⟶ J

W = R	J = R
-1	-5
0	-3
1	-1
2	1
3	3

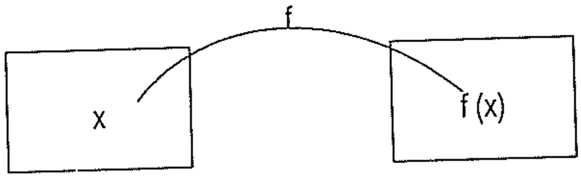


Soal - Soal

1. Buatlah diagram Veen-Euler dan grafik fungsi berikut ini $y = /2x - 3/$
2. Soal sama $y = (2x - 3)^2$
3. Soal sama $y = /x/ - 3$
4. Soal sama $y = /x^2/ - 1$
5. Soal sama $y = /x^2 - 1/$

4.5. FUNGSI INVERS

Suatu fungsi f atau suatu pemetaan f dari himpunan W ke himpunan J ialah suatu relasi yang memasangkan setiap elemen dari W dengan tepat satu elemen dari J. kita tulis f : W ⟶ J dibaca (f memetakan W ke J).



daerah asal
W = R

daerah hasil
J = R

Contoh :

A = { x -2 $\leq x \leq$ 2, x ε R } dan f : W ⟶ J ditentukan oleh $f(x) = x^2 + 2$ carilah f(-2), f(0), dan f(2) dan lukis grafik f. Tentukan daerah hasil dari f

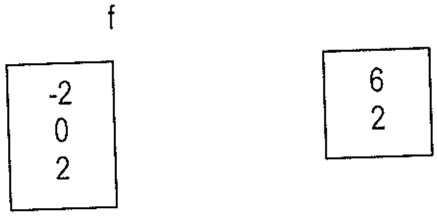
Penyelesaian :

$f(x) = x^2 + 2 \longrightarrow$ $f(-2) = (-2)^2 + 2 = 6$

$f(0) = (0)^2 + 2 = 2$

$f(2) = (2)^2 + 2 = 2$

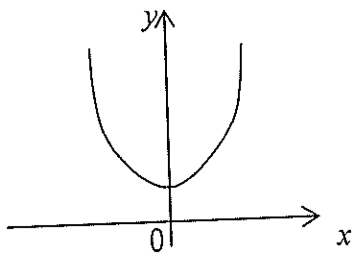
Jadi titik-titik (-2,6), (0,2), dan (2,6) grafik f daerah hasil dari f ialah $\{ y \,/\, 2 \leq y \leq 6 \,;\, y \ \varepsilon\ R \}$



W = R

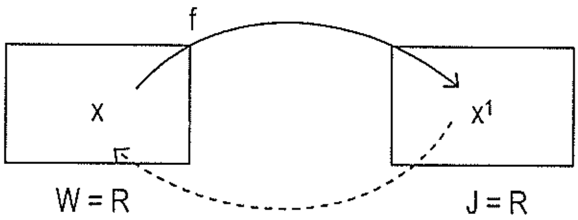
J = R

$y = x^2 + 2$: f : W ⟶ J



Misal f suatu fungsi yang memetakan himpunan W ke himpunan J maka setiap elemen $x \in$ W mempun$y$ai peta f(x) = x di J dapat kita temukan fungsi g yang memetakan J ke W sehingga g (x^{-1}) = x

$$f : W \longrightarrow J$$

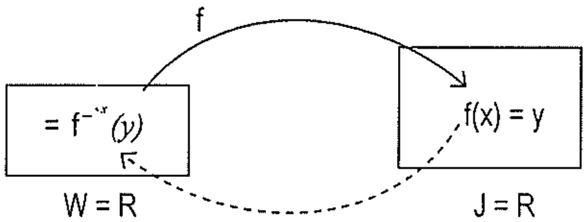


Jika fungsi g ada maka f dan g disebut fungsi-fungsi invers g adalah invers dari f dan kita dapat mengatakan bahwa f ialah invers dari G.

Teorema :

Suatu fungsi f : W $\longrightarrow$ J mempuanyai fungsi invers g : J $\longrightarrow$ W. Jika setiap anggota J peta tepat satu anggota Dari W $y$aitu jika W dan j ada dalam korespondensi satu satu. Jika g ada maka g dinyatakan dengan hasil dari f ialah daerah asal dari f dan daerah asal dari f ialah daerah hasil dari f.

Jika f dan f^{-1} merupakan fungsi fungsi invers maka f(x) = y $\Leftrightarrow$ f^{-1}(y) = x



Contoh :

1. Misalkan f : W $\longrightarrow$ J ditentukan oleh f (x) = 2x - 3 tentukan f^{-1}

   Penyelesaian : f(x) = y

   $\Leftrightarrow 2x - 3 = y$

   $\Leftrightarrow 2x = y + 3$

   $\Leftrightarrow x = 1/2\,(y + 3)$

   $\Leftrightarrow f^{-1}(y) = 1/2\,(y + 3)$

   Sehingga fungsi invers $f^{-1}(x) = 1/2\,(x + 3)$

2. Ditentukan f : {(4,1), (2,3), (1,4), (3,1), (5,4)} akan di cari f^{-1} {2,1,4} dalam f : W ⟶ J

   Penyelesaian :

   W = {4,2,1,3,5} dan J = {1,3,4}

   J_1 = {2,1,4} = {2} ∪ {1,4} dengan {1,4} ∈ J

   4 ∈ J_1 = f(5) = 5 ∈ W

   = f(1) = 1 ∈ W

   1 ∈ J_1 = f(4) = 4 ∈ W

   = f(3) = 3 ∈ W

   2 ∈ J_1 = tak punya invers

   Jadi $f^{-1}(j_1)$ = {5,1,4,3} c w maka f^{-1} bukan invers

Soal - Soal

1. Carilah invers fungsi berikut

   a). $y = x^2 + 1$ b). $y = x^3$ c). $y = x^3 + 1$

2 Jelaskan invers $y = \frac{c}{x}$ adalah dirinya sendiri

3. Jelaskan invers $y = - x$ adalah dirinya sendiri.
4. Dari f = {(-2,6), (1,4), (5,1), (2,1), (44)}. Tentukan f^{-1} {0,4,1)} dalam f.

4.6. LIMIT

Limit dari suatu fungsi f(x) pada dasarnya adalah nilai fungsi f(x) untuk x mendekati harga tertentu. Untuk x mendekati a (ditulis $x \to$ a) nilai fungsi f(x) dinyatakan dengan $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ dan dibaca dengan "Limit f(x) untuk x mendekati a". Agar dapat mengerti dengan jelas akan makna dari $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ lihat contoh berikut ini.

Ditentukan fungsi f(x) = 5x + 7 dengan mengambil beberapa nilai yang dekat dengan 5 diperoleh

x	4	4,5	4,8	4,9	4,99	5,01	5,1	5,2
F(x)	27	29,5	31,0	31,5	31,95	32,05	32,5	33,0

Jelas kiranya bahwa dengan mengambil x yang semakin dekat dengan 5 maka nilai f(x) semakin dekat dengan 32

Jadi $\lim\limits_{x\to 5} f(x)\ 5x + 7 = 32$

Contoh :

Carilah $\lim\limits_{x\to 0} h(x)$ bila $h(x) = \dfrac{(3+x)^2 - 9}{x}$

Jawab : untuk $x = 0$, maka $h(x)$ menjadi bentuk tak tententu hingga nilai $h(x)$ tidak terdifinisikan.

Untuk $x = 0$ $h(x)$ dapat ditulis dengan

$$h(x) = \frac{(3+x)^2 - 9}{x} = \frac{9 + 6x + x^2 - 9}{x} = \frac{6x + x^2}{x}$$

$$h(0) = \frac{6(0) + (0)^2}{0} = \frac{0}{0} \text{(bentuk tak tentu)}$$

Untuk $x = 0$, $h(x)$ dapat ditulis dengan

$$h(x) = \frac{6x + x^2}{x} = \frac{x(6+x)}{x} = 6 + x$$

Bila x mendekati 0, nilai 6 + x mendekati 6, sehingga $\lim\limits_{x\to 0} h(x) = \lim\limits_{x\to 0}(6+x) = 6$

<u>Dari contoh diatas dapat disimpukan :</u>

Jika ada suatu bil. L sedemikian hingga $f(x)$ mendekati L untuk suatu harga x mendekati suatu bilangan a maka dikatakan $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$

Beberapa Rumus-Rumus Limit :

1. $\lim\limits_{x\to m} (ax + b) = am + b$
2. $\lim\limits_{x\to m} k\,f(x) = k \lim\limits_{x\to m} f(x)$
3. $\lim\limits_{x\to m} x^n = m^n$
4. $\lim\limits_{x\to m} f(x) + g(x) = \lim\limits_{x\to m} f(x) + \lim\limits_{x\to m} g(x)$
5. $\lim\limits_{x\to m} \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{m}$, jika $m = 0$
6. $\lim\limits_{x\to m} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim f(x) \quad x \to m}{\lim\limits_{x\to m} g(x)}$, jika $\lim\limits_{x\to m} g(x) = 0$

7. $\lim\limits_{x \to m} \sqrt{x} = \sqrt{m}$
8. $\lim\limits_{x \to m} n = n$
9. $\lim\limits_{x \to m} x = m$

Contoh :

1 $\lim\limits_{x \to 3} (4x + 5) = 4(3) + 5 = 17$

2. $\lim\limits_{x \to -2} 4(-2x - 1) = 4 \lim\limits_{x \to -2} (-2x - 1) = 12$

3. $\lim\limits_{x \to 3} 2x^4 = 2 \lim\limits_{x \to 3} x^4 = 2(3^4) = 162$

4. $\lim\limits_{x \to -3} \frac{1}{x} = \frac{1}{-3} = -\frac{1}{3}$

5. $\lim\limits_{x \to 4} \frac{x-2}{x+1} = \frac{\lim (x-2)}{\lim\limits_{x \to 4} (x+1)} = \frac{4-2}{4+1} = \frac{2}{5}$

6. $\lim\limits_{x \to -1} x = -1$

7. $\lim\limits_{x \to 2} 3 = 3$

8. $\lim \sqrt{x} = \sqrt{4} = 2$

4.6.1. Nilai Limit Fungsi - Fungsi Tertentu

Bentuk : $\frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n}{p_0 x^m + p_1 x^{m-1} + \ldots + p_m}$

misalkan $f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots a_n$

$g(x) = p_0 x^m + p_1 x^{m-1} + \ldots p_m$

Untuk $x \to t$

a. Bila f(t) = r dan g(t) = s = 0

maka $\lim\limits_{x \to t} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{r}{s}$

b. Bila $f(x)$ = r = 0 dan g(t) = s = 0

maka limit $\frac{f(x)}{g(x)}$ dapat dicari dengan jalan memaktorkan $f(x)$ dan $g(x)$

yang masing-masing mempunyai faktor(x - t), sehingga faktor (x - t) dari f(x) dapat dicoret dengan faktor (x - t) dari g(x) didapat

$$\lim_{x\to t} f(x)\ \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to t} \frac{F(x)}{G(x)} = \frac{F(t)}{G(t)}$$

c. Bila f(t) = r o dan g(t) = s = o

maka $\lim_{x\to t} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$

Untuk $x \to \infty$

a. Bila derajad f(x) sama dengan derajad g(x) maka $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a_o}{p_o}$

b. Bila derajad f(x) kurang dari derajad g(x) maka $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$

c. Bila derajad f(x) lebih dari derajad g(x) maka $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$

4.6.2. Bentuk $(1 + 1/x)^X$ atau $(1 + x)^{1/X}$

Kedua bentuk diatas mempunyai nilai limit

$$\lim_{x\to\infty} (1 + 1x)^x = \lim_{x\to\infty} (1 + x)^{1/x} = e = 2{,}72$$

$x \to \infty$ $\qquad$ $x \to \infty$

4.6.3. Bentuk-bentuk yang mengandung "v" atau akar diselesaikan dengan cara-cara khusus cara khusus ini pada dasarnya mengusahakan bentuk-bentuk semula menjadi bentuk f(x) / g(x)

1. $\lim_{x\to 3} \frac{2x^2 - x - 1}{3x^2 - x - 2} =$

   f(x) = 2 x^2 - x -1 $\to$ f(3) = 2 (3)² -(3) –1 = 14

   g(x) = 3 x^2 - x -2 $\to$ g(x) = 3 (3)² -(3) –2 = 22

   $\lim_{x\to 3} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 3} \frac{2x^2 - x - 1}{3x^2 - x - 2} = \frac{7}{14}$

2. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{2x^2 - x - 1}{3x^2 - x - 2} =$

$f(x) = 2x^2 - x - 1 \to f(1) = 2(1^2) - 1 - 1 = 0$

$f(x) = 3x^2 - x - 2 \to g(1) = 3(1^2) - 1 - 2 = 0$

f(x) dan g(x) diselesaikan dengan memfaktorkan masing-masing salah satu faktor dalam memfaktorkan tersebut saling meniadakan.

$f(x) = 2x^2 - x - 1 = (x - 1)(2x + 1)$

$f(x) = 3x^2 - x - 1 = (x - 1)(3x + 2)$

$$\lim_{x \to 1} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to 1} \frac{2x^2 - x - 1}{3x^2 - x - 2} = \lim_{x \to 1} \frac{(x - 1)\,(2x - 1)}{(x - 1)(3x + 2)} = \lim_{x \to 1} \frac{(2x - 1)}{(3x + 2)}$$

$f(x) = 2x + 1 \to f(1) = 3$

$g(x) = 3x + 2 \to g(1) = 5$

$$\lim_{x \to 1} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim \frac{F(x)}{G(x)} = \frac{3}{5}$$

3. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{2x^2 - x - 1}{3x^2 - x - 2} =$

f(x) berderajad 2 dan g(x) berderajad 2 (pangkat x yang tertinggi) karena $a_0 = 2$ dan $p_0 = 3$ maka :

$$\lim_{x \to \infty} \frac{2x^2 - x - 1}{3x^2 - x - 2} = \frac{2}{3}$$

4. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^3 - 27}{x^2 - 9} =$

f(x) berderajad 3 dan g(x) berderajad 2 sehingga $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^3 - 27}{x^2 - 9} = \infty$

5. $\lim\limits_{x \to \infty} (1 + 1/2x)^x = \lim\limits_{x \to \infty} (1 + 1/2x)^{2x} = e^{1/2} = \sqrt{e}$

6. $\lim\limits_{x \to \infty} (1 + 2x)^{1/3x} = \lim\limits_{x \to \infty} (1 + 2x)^{1/2x \,.\, 2/3} = e^{2/3}$

7. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{4 - x^2}{(3 - \sqrt{x^2 + 5})} = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{4 - x^2}{(3 - \sqrt{x^2 + 5})} \text{ x } \dfrac{4 - x^2}{(3 - \sqrt{x^2 + 5})}$

$$\lim_{x\to 2} \frac{(4-x^2)(3+\sqrt{x^2+5})}{(3)^2-(\sqrt{x^2+5})^2} = \lim_{x\to 2} \frac{(4-x^2)(3+\sqrt{x^2+5})}{(4-x^2)} = \lim_{x\to 2} (3+\sqrt{x^2+5} = 6$$

Soal - Soal

1. $\lim\limits_{x\to 3} x^2 - 9 =$
2. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x+2}{9x+5} =$
3. $\lim\limits_{t\to 0} (1 + 3/2t)^{1/t} =$
4. $\lim\limits_{x\to\infty} (3x - \sqrt{9x^2-3x+1})$

4.7. KEKONTINUAN

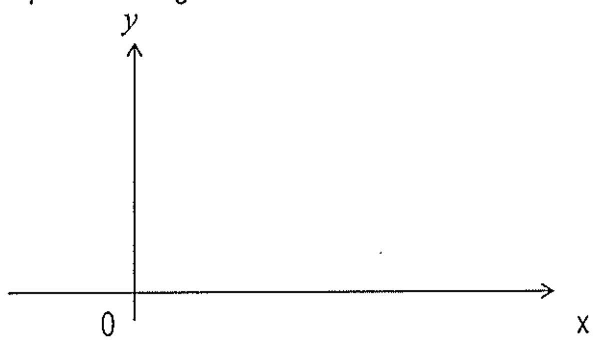
Pandang suatu fungsi f yang didifinisikan dengan persaman :

$$f(x) = \frac{2x^2-5x+2}{x-2}$$

Fungsi ini terdifinisikan untuk untuk semua nilai x kecuali di titik x = 2 untuk x = 2

$f(x) = \dfrac{2x^2-5x+2}{x-2} = \dfrac{(2x-1)(x-2)}{(x-2)} = 2x - 1$ dan $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = \lim\limits_{x\to 2} (2x-1) = 3$

dengan demikian grafik fungsi f berupa garis lurus y = 2x-1 yang putus dititik (2,3) seperti dalam gambar



disuatu titik misalkan di x = 1

f(1) = 2 - 1 = 1 dan $\lim_{x \to 1}$ f(x) = $\lim_{x \to 1}$ (2x - 1)

jadi $\lim_{x \to 2}$ f(x) = f(1)

dikatakan bahwa f kontinu di titik x = 1

Secara umum f *kontinu* di setiap titik $x = x_0$ dengan x_0 tetapi *tak kontinu* di titik x = 2.

Titik x = 2 disebut *titik tak kontinu* dari fungsi f.

Berikut ini diberikan difinisi kekontinuan suatu fungsi khususnya kekontinuan disuatu limit $x = x_0$ dari fungsi tersebut difinisikan :

Misal fungsi f terdifinisikan pada himpunan bilangan real E dan x_0 titik limit dari E.

Fungsi f dikatakan kontinu di titik x = x jika memenuhi persyaratan :

a. $f(x_0)$ ada atau terdifinisi
b. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ ada
c. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

Jika ada salah satu syarat yang tak terpenuhi, dikatakan bahwa f *tak kontinu* atau dikontinu di titik $x = x_0$.

Dalam contoh diatas ketiga syarat dipenuhi disetiap titik $x = x_0$ dengan x = 2
Jadi f kontinu disetiap titik $x = x_0$ dengan $x_0 = 2$. Dititik x = 2 syarat
a) tidak dipenuhi. Jadi f tak kontinu dititik x = 2.

<u>Soal - Soal</u>

1. Tunjukkan bahwa f(x) = | x | kontinu disemua x
2. Selidiki kekontinuan fungsi : $f(x) = \dfrac{x^2 - 16}{x^2 - 4}$
3. Selidiki kekontinuan fungsi : $g(x) = \dfrac{2x^2 - 5x + 2}{x - 2}$
4. Selidiki kekontinuan fungsi : $f(x) = \dfrac{2(x - 3)}{x^2 - 2x - 3}$

BAB VI

" INTEGRAL TAK TENTU "

6.1. INTEGRAL TAK TENTU (INDEFINITE INTEGRAL)

Jika F(x) suatu fungsi yang mempunyai derivative (turunan) F'(x) = f(x), maka F(x) disebut anti derivative atau integral tak tertentu dari f(x).

Integral tak tentu dari suatu fungsi tidak bersifat satu-satunya atau tidak tunggal.,

contoh : x^2 , $x^2 + 5$, $x^2 - 4$ adalah integral tak tertentu dari f(x) = 2x. karena

$$\frac{d}{dx}(x^2+5) = \frac{d}{dx}(x^2-4) = \frac{d}{dx}(x^2) = 2x$$

Maka integral tak tentu dari f(x) = 2x dapat ditulis secara umum $x^2 + c$, dimana c disebut konstanta integral sembarang. Untuk menyatakan integral tak tertentu dari f(x) ditulis dalam bentuk :

$$\int f(x)\,dx \text{ dan } \int 2x\,dx = x^2 + c$$

6.2. RUMUS - RUMUS DASAR INTEGRAL

1. $\int \frac{d}{dx}[f(x)]dx = f(x) + c$
2. $\int (u \pm v)\,dx = \int u\,dx \pm \int v\,dx$
3. $\int k\,u\,dx = k\int u\,dx$ k = konstanta
4. $\int u^m du = \frac{u^{m+1}}{m+1} + c$, $m \neq -1$
5. $\int \frac{du}{u} = 1n\,u + c$
6. $\int a^u\,du = \frac{a^u}{1n\,a} + c$ $a > c, a \neq 1$

7. $\int e^u \, du = e^u + c$
8. $\int \sin u \, du = -\cos u + c$
9. $\int \cos u \, du = \sin u + c$
10. $\int tg\, u \, du = \ln /\sec u/ + c$
11. $\int cotg\, u \, du = \ln / \sin u / + c$
12. $\int \sec u \, du = \ln / \sec u + tg\, u / + c$
13. $\int cosec\, u = \ln / cosec\, u - cotg\, u / + c$
14. $\int \sec^2 u \, du = tg\, u + c$
15. $\int cosec^2 u \, du = -cotg\, u + c$
16. $\int \sec u \; tg\, u \, du = \sec u + c$
17. $\int cosec\, u \; cotg\, u \, du = -cosec\, u + c$
18. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin \frac{u}{a} + c$
19. $\int \frac{du}{a^2 + u^2} = \frac{1}{a} \, arc\, tg \frac{u}{a} + c$
20. $\int \frac{du}{u\sqrt{a^2 - u^2}} = \frac{1}{a} \, arc\sec \frac{u}{a} + c$
21. $\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{u-a}{u+a} \right| + c$
22. $\int \frac{du}{a^2 - u^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+u}{a-u} \right| + c$
23. $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 + a^2}} = \ln \left| u + \sqrt{u^2 + a^2} \right| + c$
24. $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 - a^2}} = \ln \left| u + \sqrt{u^2 - a^2} \right| + c$

25. $\int\sqrt{a^2-u^2}\,du=\frac{1}{2}-u\sqrt{a^2-u^2}+\frac{1}{2}a^2\arcsin\frac{u}{a}+c$

26. $\int\sqrt{u^2+a^2}\,du=\frac{1}{2}u\sqrt{a^2+u^2}+\frac{1}{2}a^2\ln\left|u+\sqrt{u^2+a^2}\right|+c$

27. $\int\sqrt{u^2-a^2}\,du=\frac{1}{2}u\sqrt{a^2-u^2}\ \frac{1}{2}a^2\ln\left|u+\sqrt{u^2-a^2}\right|+c$

Contoh :

1. $\int(1-x)\sqrt{x}\,dx=\int(x^{1/2}-x^{3/2})\,dx=2/3x^{3/2}-2/5x^{5/2}+c$

2. $\int\frac{(1+x)^2}{\sqrt{x}}dx=\int\frac{1+2x+x^2}{x^{1/2}}dx=\int(x^{-1/2}+2x^{1/2}+x^{3/2})dx$

$=2x^{1/2}+2.\frac{1}{3/2}x^{3/2}+\frac{1}{5/2}x^{5/2}+c$

$=2x^{1/2}+\frac{4}{3}x^{3/2}+\frac{2}{5}x^{5/2}+c$

R. 5 – 7

1. $\int\frac{dx}{x+2}=\int\frac{d(x+2)}{x+2}=\ln|x+2|+c$

2. $\int e^{-x}dx=-\int e^{-x}(d-x)=-e^{-x}+c$

3. $\int e^{+3x}dx=1/3\int e^{3x}(d3x)=\frac{e^{3x}}{3}+c$

4. $\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\arcsin x+c$

5. $\int\frac{dx}{4x^2+9}=1/2\int\frac{2dx}{(2x)^2+3^2}=.\frac{1}{6}\operatorname{arc\,tg}\frac{2x}{3}+c$

6. $\int\frac{xdx}{4x^2+3}=1/2\int\frac{2xdx}{(x^2)^2+(\sqrt{3})^2}=$

$=1/2.\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2x}{\sqrt{3}}+c=\frac{\sqrt{3}}{6}\operatorname{arc\,tg}\frac{x^2\sqrt{3}}{3}+c$

R.21 – 24

7. $\int \frac{xdx}{\sqrt{4x^2+9}} = 1/2 \int \frac{2dx}{\sqrt{(2x)^2+(3)^2}} = 1/2 \ln(2x+\sqrt{4x^2+9})+c$

8. $\int \frac{dx}{x^2+6x+8} = \int \frac{dx}{(x+3)^2-1} = 1/2 \ln\left|\frac{(x+3)-1}{(x+1)+1}\right|+c$

$= 1/2 \ln\left|\frac{x+2}{x+4}\right|+c$

R.25 – 27

9. $\int \sqrt{25-x^2dx} = 1/2x\sqrt{25-x^2}+25/2\text{arc sin } x/5+c$

10. $\int \sqrt{3-2x-x^2}dx = \int 4-(x+1)^2dx$

$= \frac{x+1}{2}\sqrt{3-2x-x^2}+2\text{arc sin}\frac{x+1}{2}+c$

<u>Cara lain mempermudah perhitungan dengan pemisalan</u>

contoh :

11. $\int (x^3+2)^2 3x^2dx$

Penyelesaian : misal u = x^3 + 2

du = $3x^2$ dx

$\int (x^3+2)^2 3x^2dx = \int u^2.du = 1/3u^3+c = 1/3(x^3+2)^3+c$

12. $\int \frac{x^2dx}{\sqrt[4]{x^2+2}}$

Penyelesaian : misal u = x^3 + 2

du = $3x^2$ dx $\longrightarrow$ 1/3 du = x^2 dx

$\int \frac{x^2dx}{\sqrt[4]{x^2+2}} = 1/3\int \frac{du}{u^{1/4}} = 1/3\int u^{-1/4}du = 4/9u^{3/4}+c$

$= 4/9(x^3+2)^{3/4}+c$

6.3. INTEGRAL PARSIIL (INTEGRATION BY PART)

Bila u dan v adalah fungsi-fungsi yang bisa didiferensiasi dari $d(uv) = udv\ vdu$, $udv = d(uv) - vdu$, $\int udv = uv - \int vdu$ ...... (1)

Dalam menggunakan (1) untuk mendapatkan integrasi yang ditanyakan, integral yang diketahui harus dibagi menjadi dua bagian; yang satu u dan yang lain yang bersama-sama dengan dx adalah dv (untuk alasan inilah integrasi dengan (1) disebut integrasi parsiil (per bagian).

Dua aturan umum bisa dikemukakan :

a. Bagian yang dipilih sebagai dv harus siap diintegrasi
b. $\int vdu$ harus tidak lebih rumit dari $\int udv$

Untuk jelasnya kita ambil contoh :

Tentukan $\int x \cos 2x\, dx =$

Penyelesaiannya : ada beberapa pilihan atau kemungkinan :

a. memilih $u = x \cos 2x$ $dv = dx$
b. memilih $u = \cos 2x$ $dv = xdx$
c. memilih $u = x$ $dv = \cos 2x\, dx$

Untuk memilih a

$u = x \cos 2x$ $dv = dx$

$du = 1.\cos 2x + x.(-\sin 2x.2)\, dx$ $v = x$

$= (\cos 2x - 2x \sin 2x)dx$

maka $\int x\cos 2x\, dx = (x \cos 2x)(x) - \int x(\cos 2x - 2x \sin 2x)\, dx$

Ternyata hasil integralnya tidak lebih sederhana dari pada integral yang semula dan bentuk pemisalan (a) tidak dipilih.

Untuk pemisalan b

$u = \cos 2x$ $dv = xdx$

$du = -\sin 2x\, 2dx = -2 \sin 2x\, dx$ $v = 1/2\, x^2$

maka $\int x \cos 2x dx = (\cos 2x)(1/2\, x^2) - \int 1/2 x(-2 \sin 2x)\, dx$

$= 1/2\, x^2 \cos 2x + \int x^2 \sin 2x\, dx,$

Ternyata hasil integralnya juga tidak lebih sederhana dari integral semula, bentuk pemisalan (b) tidak terpilih.

Untuk pemisalan c

$u = x$ $dv = \cos 2x\, dx$

$du = dx$ $v = 1/2 \sin 2x$

maka $\int x \cos 2x \, dx = (x)(1/2 \sin 2x) - \int 1/2 \sin 2x \, dx$
$= 1/2 \sin 2x - 1/4 \sin 2x \, d(2x)$
$= 1/2x \sin 2x + 1/4 \cos 2x \;\; c$

Contoh :

1. $\int x e^x \, dx =$
   misal $u = x$ $\quad dv = e^x \, dx$
   $du = dx$ $\quad v = e^x$
   $\int x e^x \, dx = x e^x - \int e^x \, dx = x e^x - e^x + c$
2. $\int x^2 \ln x \, dx =$
   misal $u = \ln x$ $\quad dv = x^2 \, dx$
   $du = dx/x$ $\quad v = 1/3 \, x^3$
   $\int x^2 \ln x \, dx = (\ln x)(1/3x^3) - \int 1/3 \, x^3 \, dx/x$
   $= 1/3 \, x^3 \ln x - 1/3 \int x^2 \, dx$
   $= 1/3 \, x^3 \ln x - 1/9 \, x^3 \;\; c$
3. $\int x \sqrt{1+x} \, dx =$
   misal $u = x$ $\quad dv = \sqrt{1+x} \, dx$
   $du = dx$ $\quad v = 2/3 \, (1+x)^{3/2}$
   $\int x \sqrt{1+x} \, dx = (x) \{2/3(1+x) \;\; \} - \int 2/3 \, (1+x)^{2/3} \, dx$
   $= 2/3 \, x \, (1+x)^{2/3} - 2/3 \int (1+x)^{2/3} \, dx$
   $= 2/3 \, x \, (1+x)^{3/2} - 4/15 \, (1+x)^{5/2} \;\; c$
4. $\int x^2 \sin x \, dx =$
   misal $u = x^2$ $\quad dv = \sin x \, dx$
   $du = 2x \, dx$ $\quad v = -\cos x$
   $\int x^2 \sin x \, dx = (x^2)(-\cos x) - \int (-\cos x)(2x \, dx)$
   $= -x^2 \cos x + \int 2x \cos x \, dx$
   $= -x^2 \cos x + 2 \int x \cos x \, dx$
   dimisalkan lagi $u = x$ $\quad dv = \cos x \, dx$
   $du = dx$ $\quad v = \sin x$
   $= - x^2 \cos x + 2 \;\; \{(x)(\sin x - \int \sin x \, dx\}$
   $= -x^2 \cos x + 2 \, (x \sin x + \cos x) + c$
   $= -x^2 \cos x + 2x + \sin x + 2 \cos x + c$

5. $\int \sin^2 x\, dx =$

misal $u = \sin x$ $\quad dv = \sin x\, dx$

$du = \cos x\, dx$ $\quad v = - \cos x$

$\int \sin^2 x\, dx = (\sin x)(- \cos x) - \int - \cos x.\cos x\, dx$

$= - \sin x \cos x + \int \cos\ x\, dx$

$= -1/2 \sin 2x + \int (1 - \sin\ x)\, dx$

$= -1/2 \sin 2x + \int dx - \int \sin^2\ x\, dx$

$= -1/2 \sin 2x + x - \sin^2 x\, dx$

$2\int \sin^2\ x\, dx = - 1/2 \sin 2x + x$

$\int \sin^2\ x\, dx = - 1/4 \sin 2x + 1/2\, x\ \ c$

6.4. METODE - METODE INTEGRAL

6.6.1. Integral Dari Bentuk Fungsi Goneometri

Rumus-rumus dasar dalam Goneometri yang banyak di-pakai untuk membantu dalam menyelesaikan Integral adalah :

1. $\sin^2\ x + \cos\ ^2x = 1$
2. $1 + tg^2x = \sec\ ^2x$
3. $1 + cotg^2x = cosec\ ^2x$
4. $\sin\ ^2x = 1/2\ (1 - \cos 2x)$
5. $\cos\ ^2x = 1/2\ (1\ \ \cos 2x)$
6. $\sin x \cos x = 1/2 \sin 2x$
7. $\sin x \cos y = 1/2\ \{\sin (x - y) + \sin (x + y)\}$
8. $\sin x \cos y = 1/2\ \{\cos (x - y) - \cos (x + y)\}$
9. $\cos x \cos y = 1/2\ \{\cos (x - y) + \cos (x + y)\}$
10. $1 - \cos x = 2 \sin^2 1/2\, x$
11. $1 + \cos x = 2 \cos^2 1/2\, x$
12. $1\ \ \sin x = 1 \cos (1/2\, \Pi - x)$

6.6.2. Integral Dari Bentuk

$\int \sin^m x \cos^n x\, dx$ dimana m dan n bilangan bulat

6.4.2.1. Andaikan m bulat pos dan ganjil, misal m = 2k + 1

Maka $\sin^{m}x\cos^{n}x = \sin^{2k}x + \cos^{n}x \sin x$ sedang $\sin^{2k}x = (1 - \cos^{2}x)^{k}$

Jadi $\int \sin^{m}x \cos^{n}x dx = \int \sin^{2k}x \cos^{n}x \sin x\, dx = \int -(1-\cos^{2}x)^{k} \cos^{n} x\, d(\cos x)$.

6.4.2.2. Andaikan n bulat pos dan ganjil, misal n =2k1

Maka $\sin^{m}x \cos^{n}x = \sin^{m} x \cos^{2k}x \cos x$ sedang $\cos^{2k} x = (1 - \sin^{2}x)^{k}$

Jadi $\int \sin^{m} x \cos^{n}x\, dx = \int \sin^{m} x \cos^{2k}x \cos x\, dx = \int (1-\sin^{2} x)^{k} \sin^{m} d(\sin x)$.

Untuk jelasnya kita lihat contoh :

1. Tentukan $\int \sin^{2} x \cos^{3} x\, dx$

   Penyelesaian :

   Terlihat cosx mempunyai pangkat ganjil maka :

   $\cos^{3} x = \cos^{2} x . \cos x = (1 - \sin^{2}x) \cos x$ jadi $\int \sin^{2} x \cos^{3} x\, dx$

   $= \int \sin^{2} x\ (1- \sin^{2} x) \cos dx$

   $= \int [\sin^{2} x - \sin^{4} x]\, d(\sin x)$

   $= 1/3 \sin^{3} x - 1/5 \sin^{5} x + c$

2. Tentukan $\int \cos^{4} 2x \sin^{3} 2x\, dx$

   Penyelesaian :

   Disini sin 2x mempunyai pangkat ganjil maka :

   $\sin^{3} 2x = \sin^{2} 2x \sin 2x = (1-\cos 2x) \sin 2x$

   Jadi $\int \cos^{4} 2x \sin^{3} 2x dx = \int \cos^{4} 2x\, (1-\cos^{2} 2x) \sin 2x\, dx$

   $= -1/2 \int [\cos^{4} 2x - \cos^{6} 2x]\, d(\cos 2x)$

   $= 1/14 \cos^{7} 2x - 1/10 \cos^{5} 2x\ c$

3. Tentukan $\int \sin^{3} 3x \cos^{5} 3x\, dx$

   Penyelesaian :

   Oleh karena keduanya berpangkat ganjil maka yang dirubah suku yang mempunyai pangkat terkecil.

   $\int \sin^{3} 3x \cos^{5} 3x\, dx = \int (1- \cos^{3} 3x) \cos^{5} 3x \sin 3x\, dx$

   $= - 1/3 \int (1- \cos^{2} 3x) \cos^{5} 3x\, d(\cos 3x)$

   $= 1/24 \cos^{8} 3x - 1/18 \cos^{6} 3x\ c$

6.4.2.3. Jika m dan n bulat positip dan genap maka

Bentuk $\int \sin^m x \cos^n x\, dx$ dirubah dengan menggunakan rumus rumus :

$\sin^2 x = 1/2\ (1 - \cos 2x)$; $\cos^2 x = 1/2(1\ \ \cos 2x)$; $\sin x \cos x = 1/2 \sin 2x$

Contoh :

1. Tentukan $\int \cos^2 3x \sin^4 3x\, dx$,

   Penyelesaiannya :

   $\int \cos^2 3x \sin^4 3x\, dx = \int (\cos^2 3x \sin^2 3x) \sin^2 3x\, dx$

   $\int \frac{\sin^2 6x}{4} . \frac{1-\cos 6x}{2} dx = 1/8 \int (\sin^2 6x - \sin^2 6x \cos^6 x)\, dx$

   $= 1/8 \int (\frac{1-\cos 12x}{2} - \sin 6x \cos 6x)\, dx$

   $= 1/16 \int (1 - \cos 12x)\, dx - 1/8 \int \sin^2 6x \cos 6x\, dx$

   $= 1/16\, x - 1/192 \sin 12x - 1/144 \sin^3 6x + c$

2. $\cos^4 x\, dx = \int (\cos^2 x)^2\, dx = 1/4 \int (1 + \cos 2x)^2\, dx$

   $= 1/4 \int (1 + 2 \cos 2x + \cos^2 2x)\, dx$

   $= 1/4x + 1/4 \sin 2x + 1/8 \int (1\ \ \cos 4x) dx$

   $= 1/4x + 1/4\, x\sin 2x + 1/8x + 1/32 \sin 4x + c$

6.5. INTEGRAL DARI BENTUK

$\int \sin mx \cos nx\, dx$; $\int \sin mx \sin nx\, dx$; $\int \cos mx \cos nx\, dx$

Untuk penyelesaian bentuk diatas digunakan rumus :

$$\sin mx \cos nx = 1/2\ [\sin (m + n)\, x + \sin (m - n)\, x]$$
$$\sin mx \sin nx = 1/2\ [\cos (m - n)\, x - \cos (m + n)\, x]$$
$$\cos mx \cos nx = 1/2\ [\cos (m - n)\, x + \cos (m + n)\, x]$$

Contoh soal :

1. $\int \sin 3x \cos 5x dx = 1/2 \int [\sin(3 + 5)\, x \sin(3 - 5) x]\, dx$

   $= 1/2 \int (\sin 8x - \sin 2x)\, dx = -1/16 \cos 8x + 1/4 \cos 2x + c$

2. $\int \sin 9x \sin x dx = 1/2 \int [\cos(9 - 1)\, x - \cos(9 + 1)\, x]\, dx$

   $= ½ \int (\cos 8x - \cos 10x) dx = 1/16 \sin 8x + 1/20 \sin 10x + c$

3. $\int \cos 8x \cos 2x dx = 1/2 \int [\cos(8 - 2)x\ \ \cos(8 + 2)x]\, dx$

   $= 1/2 \int (\cos 6x + \cos 10x)\, dx = 1/12 \sin 6x + 1/20 \sin 10x + c$

6.6. Integral Dengan Menggunakan Subtitusi

6.6.1. Subtitusi fungsi Aljabar

Jika bentuk pecahan dari bentuk a + bx. diambil subtitusi untuk abx suatu u yang mempunyai pangkat sehingga sesuai dengan abx.

Contoh :

1. Tentukan : $\int \frac{x^2}{(2+3x)^{2/3}}\,dx$

   Penyelesaian :

   Pangkat pecahan (2+3x) adalah 1/3 diambil $u^3 = 2+3x$ dan $u^2 = (2+3x)^{1/3}$

   $3u^2\ du = 3dx \longrightarrow dx = u^2\ du$

   Dari $u^3 = 2 + 3x \longrightarrow x = 1/3\ (u - 2)$

   Jadi $\int \frac{x^2\,dx}{(2+3x)^{2/3}} = \int \frac{1/9\,(u^3-2)^2 . u^2\,du}{u^2}$

   $= 1/9 \int (u^6 - 4u^3 + 4)\ du$

   $= 1/63\ u^7 - 1/9\ u^4 + 4/9\ u + c$

   Untuk mendapatkan hasil integrasi terakhir, perubah U diganti sesuai dengan harganya dalam suku dari x yaitu : u = (2 + 3x) maka :

   $\int \frac{x^2 dx}{(2+3x)^{2/3}} = 1/63\ (2 + 3x)^{7/9} - 1/9(2 + 3x)^{4/3} + 4/9\ (2 + 3x)^{1/3} + c$

   $\frac{(2+3x)^{1/3}}{63} = [(2 + 3x)^2 - 7(2 + 3x) + 28] + c$

   $= (2 + 3x)^{1/3}\ (9x^2 - 9x + 18) + c$

   $= 1/7\ (2 + 3x)^{1/3}\ (x - x + 2) + c$

2. Tentukan $\int \frac{x\ dx}{\sqrt{x+3}} =$

   Misal $u^2 = x + 3 \longrightarrow x = u^2 - 3$

   $2udu = dx$

   Maka $\int \frac{x\ dx}{\sqrt{x+3}} = \frac{(u^2-3) . 2u\ du}{u} = 2 \int (u^2 - 3)\ du = 2/3\ u^3 - 6u + c$

   Jadi $\int \frac{x\ dx}{\sqrt{x+3}} = 2/3\sqrt{(x+3)^3} - 6\sqrt{x+3} + c$

6.6.2. Jika integral memuat pangkat pecahan bentuk $a + bx^n$ diambil subtitusi, untuk $a + bx^n$ suatu u yang mempuanyai pangkat, sehingga sesuai dengan $a + bx^n$

1. Tentukan $\int \frac{(x^2 - a^{2})^{3/2}}{x} dx$

   Penyelesaian :

   $u^2 = x^2 - a^2 \longrightarrow 2\,udu = 2x\,dx$ yang kita butuhkan bukan xdx tetapi dx/x maka : $\frac{dx}{x} = \frac{udu}{u^2 + u^2}$

   selanjutnya : $\int \frac{(x^2 - a^2)^{3/2}}{x} dx = \int (x^2 - a^2)^{3/2} \frac{dx}{x}$

   $$\int (u^2)^{3/2} \frac{u\,du}{u^2 + a^2} = \int \frac{u^4\,du}{u^2 + a^2} = \int (u^2 - a^2 + \frac{a^4}{u^2 + a^2})\,du$$

   $$= -1/3 - u^{3+} + a^2u + a^3 \text{ arc tg } \frac{u}{a} + c$$

   Jadi $\int \frac{(u^2 - a^2)^{3/2}}{x} dx = 1/3\,(x^2 - a^2)^{3/2} - a^2 \sqrt{x^2 - a^2}$

   $$+ a^3 \text{ arc tg } \sqrt{\frac{x^2 - a^2}{a}} + c$$

2. Tentukan $\int \frac{x^3\,dx}{(x^2 + 4)^{1/2}}$

   Misal $u^2 = x^2 + 4 \longrightarrow 2\,udu = 2x\,dx$

   $x = u - 4 \longrightarrow udu = x\,dx$

   Maka $x^3\,dx = x^2\,.xdx = (u^2 - 4)\,udu$

   Jadi $\int \frac{x^3\,dx}{(x^2 + 4)^{1/2}} = \int \frac{u\,(u^2 - 4)}{u} du = \int u(u^2 - 4)\,du = 1/3\,u^3 - 4u + c$

   $$= 1/3\,(x^2 + 4)^{3/2} - 4\,(x^2 + 4)^{1/2} + c$$

6.6.3. Integritas Dari Fungsi Pecah Rasional

Suatu polinominal dalam x suatu fungsi dengan bentuk $a_o = x^n + a_1\,x^{n-1} + a_2\,x^{n-2} \ldots\ldots a_{n-1}\,x + a_n$ dimana a_i $(i = 0,1,\ldots,n)$ adalah konstante dan n bulat positip termasuk nol. Tiap-tiap polinominal dengan koefisien riil dapat dinyatakan sebagai perkalian dari faktor faktor linear yang riil dalam bentuk $ax + b$ atau faktor-faktor kwadratis yang riil dalam bentuk $ax^2 + bx + c$ suatu fungsi $F(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, dimana f(x) dan g(x) adalah polinominal disebut : Fungsi pecahan rasional jika pangkat f(x) lebih rendah dari pada pangkat g(x), F(x) disebut profer untuk sebaliknya F(x) disebut Improper. Setiap pecahaan rasional yang proper dapat dinyatakan sebagai suatu jumlahan dari pecahan yang sederhana yang penyebutnya berbentuk $(ax + b)^n$ atau $(ax^2 + bx + c)^n$

Kemungkinan yang timbul dalam pecahan rasional yang proper.

Semua faktor dari penyebut linear dan berlainan jika pecahaan rasional yang proper F(x), penyebut g(x) dapat dinyatakan sebagai perkalian faktor-faktor linear yang berlainan.

Misal $g(x) = (x + a_1)(x + a_2) \ldots\ldots (x + a_n)$ dimana, $a_1 = a_2 = a_3 \ldots\ldots\ldots = a_n$

$$\text{Maka } F(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A_1}{x+a_1} + \frac{A_2}{x+a_1} + \ldots + \frac{A_n}{x+a_n}$$

seterusnya kita menghitung harga-harga $A_1, A_2, \ldots, A_n$

contoh :

Tentukan : $\int \frac{2x+1}{x^3 - 7x + 6}\, dx$

Penyelesaian : $x^3 - 7x + 6 = (x - 1)(x - 2)(x + 3)$

$$\text{Maka } \frac{2x+1}{x^3 - 7x + 6} = \frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(x-2)} + \frac{C}{(x+3)}$$

$2x + 1 = A(x - 2)(x + 3) + B(x - 1(x + 3) + C(x - 1)(x - 2)$

harga $A = -3/4$, $B = 1$ dan $C = -1/4$.

$$\int \frac{2x+1}{x^3 - 7x + 6}\, dx = -\tfrac{3}{4} \int \frac{dx}{(x-1)} + \int \frac{dx}{(x-2)} - \tfrac{1}{4} \int \frac{dx}{x+3}$$

$= -\tfrac{3}{4} \ln |x - 1| + \ln |x - 2| - \tfrac{1}{4} |x + 3| + c.$

Semua faktor dari penyebut linear, tetapi ada beberapa yang sama (berulang).

Untuk tiap faktor linier $ax + b$ yang timbul n kali dalam penyebut dari pecahan rasiona, kita tulis sebagai jumlah dalam n pecahan real dalam bentuk

$$\frac{A_1}{(ax-b)^2}+\frac{A_2}{(ax-b)^2}+\frac{A_3}{(ax-b)^2}+\ldots+\frac{A_n}{(ax-b)^n}$$

dimana A (i =1.2...n) konstante yang harus di cari

Contoh :

Tentukan : $\int\frac{(3x^2-22x+19)\,dx}{(x+2)(x-3)}=\frac{A}{(x+2)}+\frac{B}{(x-3)^2}+\frac{C}{(x-3)}$

$3x^2 - 22x + 19 = A\,(x-3)^2 + B\,(x+2) + C\,(x+2)\,(x-3)$

$3x^2 - 22x + 19 = Ax^2 - 6Ax + 9A + Bx + 2b + cx^2 - cx - 6c$

$3 = A + C$

$-22 = -6A + B - C$

$19 = 9A + 2B - 6C$

Jadi $A = 3$ $B = -4$ $C = 0$

Maka $\int\frac{(3x^2-22x+19)dx}{(x+2)(x-3)^2}=3\int\frac{dx}{(x+2)}-4\int\frac{dx}{(x-3)^2}$

$= 3\ln(x+2)+\frac{4}{(x-3)}+c$

Beberapa faktor penyebut kwadrat tak berulang untuk tiap tiap faktor yang mempunyai bentuk $Ax^2 + bx + c$

dinyatakan = $\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$

contoh = $\int\frac{x^3+x^2+x+2}{x^4+3x^2+2}dx$

Penyelesaian : $x^4 + 3x^2 + 2 = (x^2 + 1)(x^2 + 2)$

$$\frac{x^3+x^2+x+2}{(x^2+1)(x^2+2)}=\frac{Ax+B}{(x^2+1)}=\frac{Cx+D}{(x^2+2)}$$

$x^3 - x^2 + 2 = (Ax - B)(x^2 + 2) + (Cx + D)(x^2 + 1)$

$x^3 - x^2 + 2 = Ax^2 - 2Ax + Bx^2 + 2B + Cx^3 + Cx + Dx^2 + D$

Setelah dihitung harga $A = 0$ $B = 1$ $C = 1$ $D = 0$

$$\int\frac{x^3+x^2+x+2}{x^4+3x^22}dx=\int\frac{dx}{(x^2+1)}+\int\frac{dx}{(x^2+2)}$$

$= \text{arc tg}\,x + 1/2\ln(x^2+2) + C$