

# ANALISIS KESTABILAN MODEL DINAMIK NITROGEN DAN HUBUNGANNYA DENGAN PERTUMBUHAN LOGISTIK ALGA

Widowati<sup>1</sup>, Sutimin<sup>2</sup>, Hermin Ps<sup>3</sup>, Tarita Is<sup>4</sup>  
<sup>1,2,4</sup> Jurusan Matematika FMIPA Universitas Diponegoro  
<sup>3</sup>Jurusan Biologi FMIPA Universitas Diponegoro  
Jl. Prof. Soedharto, SH, Kampus Tembalang Semarang  
E-mail: <sup>1</sup>wiwied\_mathundip@yahoo.com

**Abstract.** The nitrogen dynamics model related to algae growth is proposed. The form of the model is nonlinear differential equation system. From these model, the stability of the equilibrium point is discussed. The stability is analyzed through the eigen values of the Jacobian matrix that is obtained from linearized system. From the simulation results is found that ammonia-nitrogen, nitrite-nitrogen, and nitrate-nitrogen concentration will achieve to a certain value. The changed of ammonia-nitrogen, nitrite-nitrogen, and nitrate-nitrogen concentration are effected by the algae density. If the alga density increase then the ammonia-nitrogen and nitrite-nitrogen concentrations will increase but the nitrate concentration will decrease.

**Keywords:** dynamics model, nitrogen-concentration, algae, equilibrium point, stability

## 1. PENDAHULUAN

Pemodelan matematika merupakan salah satu bidang matematika yang dapat digunakan untuk merepresentasikan perubahan konsentrasi amoniak, nitrit, dan nitrat pada perairan ke dalam pernyataan matematika. Model dinamik nitrogen untuk sistem pada perairan sungai telah dibahas oleh beberapa peneliti [2, 4]. Kemudian, Buckley, et.al [1] mengkaji masalah optimisasi yang berhubungan dengan perairan dan nitrogen. Selanjutnya, Djambov dan Ruseva [3] mengemukakan masalah pemodelan matematika dari oksidasi homogen nitrogen dalam produksi *nitric acid* pada tanaman. Model dinamik non-linear yang merepresentasikan dinamika ekosistem dari eutrofikasi pada badan air yang disebabkan oleh nutrisi telah dianalisis oleh Misra [5].

Berdasarkan siklus nitrogen, Brown dan Barnwell[2] mengemukakan perubahan konsentrasi amoniak, nitrit, dan nitrat yang melibatkan model eksponensial alga. Dasar dari pembentukan model Brown and Barnwell adalah siklus nitrogen. Dalam siklus nitrogen terdapat

proses-proses dan reaksi-reaksi yang menjelaskan hubungan konsentrasi nitrogen: amonia, nitrit, dan nitrat. Pada proses amonifikasi terjadi penambahan konsentrasi amonia karena adanya nitrogen organik. Nitrogen organik ini biasanya berasal dari organisme akuatik yang telah mati dan limbah yang mengandung asam amino atau protein yang masuk dalam perairan yang kemudian diuraikan oleh sekelompok hewan pengurai. Dalam hal ini diasumsikan bahwa pencemaran perairan diakibatkan masuknya limbah padat yang mengendap di dasar perairan. Pengendapan ini menyebabkan penguraian nitrogen organik ke dalam amonia menjadi lebih lama. Oleh karena itu, dapat diasumsikan bahwa tidak ada peningkatan konsentrasi amonia akibat proses amonifikasi. Jadi dari siklus nitrogen, hanya proses nitrifikasi dan asimilasi anorganik oleh alga yang mempengaruhi model perubahan nitrogen Brown and Barnwell.

Sementara itu, Widowati, dkk [8] telah mengkaji pemodelan matematika dan analisis numerik dari perubahan konsentrasi amoniak, nitrit, dan nitrat

melalui eksperimen dilaboratorium dengan sampel berasal dari perairan Polder Tawang Semarang. Selanjutnya pada paper ini, dibahas pengaruh pertumbuhan alga pada perubahan konsentrasi amoniak, nitrit, dan nitrat. Pertimbangan akan keterbatasan cahaya, nutrisi, kandungan oksigen, luas permukaan perairan tetap, dan dengan mengasumsikan tidak ada proses migrasi maka dapat dikonstruksi model logistik dari pertumbuhan alga. Hubungan antara model logistik pertumbuhan alga dengan perubahan konsentrasi amoniak, nitrit, dan nitrat direpresentasikan dalam sistem persamaan diferensial tak-linear.

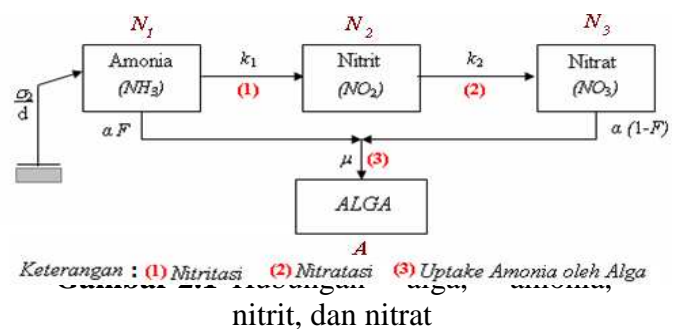
## 2. Pembahasan

### 2.1. Model Matematika dan Titik Kesetimbangan

Pada bagian ini diberikan model matematika perubahan konsentrasi nitrogen yang berhubungan dengan pertumbuhan alga. Parameter  $\delta$  menunjukkan daya tumbuh alga yang dipengaruhi oleh laju pertumbuhan lokal perhari ( $\mu$ ), laju respirasi lokal alga perhari ( $\rho$ ), dan laju pengendapan lokal alga meter/hari ( $\sigma_1$ ). Misalkan  $N_1(t)$ ,  $N_2(t)$ ,  $N_3(t)$  berturut-turut adalah konsentrasi nitrogen: amonia, nitrit, nitrat saat  $t$  yang dinyatakan dalam mg/L dan  $d$  menyatakan kedalaman (meter). Konsentrasi amonia, nitrit, dan nitrat tersebut akan mengalami perubahan berdasarkan reaksi nitrifikasi (nitritasi dan nitratasi). Konsentrasi amonia akan mengalami penurunan karena teroksidasi menjadi nitrit dengan laju  $k_1$  perhari sehingga menaikkan konsentrasi nitrit. Peningkatan konsentrasi nitrit ini disertai dengan penurunan akibat proses nitratasi yang mengoksidasi nitrit menjadi nitrat dengan laju  $k_2$  perhari.

Misalkan  $\sigma_2$  merupakan konstanta menyatakan tingkat sumber bentos dalam  $g/m^2$  perhari dan  $d$  adalah kedalaman perairan dalam meter, maka  $\frac{\sigma_2}{d}$  mg/L

adalah konsentrasi amonia yang diekskresikan bentos yang dipengaruhi oleh kedalaman perairan. Perbandingan konsentrasi amonia dan nitrat yang digunakan oleh alga berdasarkan faktor preferensi amonia ( $P$ ). Sehingga apabila saat  $t$  konsentrasi amonia yang digunakan adalah  $P$  bagian, maka konsentrasi nitrat yang digunakan adalah  $1-P$  bagian. Apabila  $\alpha$  adalah total nitrogen yang terdapat dalam alga (mg-N/mg-A) dan  $\mu$  adalah laju pertumbuhan alga maka total asimilasi amonia dan nitrat oleh alga berturut-turut dapat dinyatakan dengan  $F(t)\alpha\mu A(t)$  dan  $(1-F(t))\alpha\mu A(t)$ . Hubungan antara pertumbuhan alga ( $A(t)$ ) dan perubahan konsentrasi Amonia, Nitrit, Nitrat diberikan pada gambar [2] berikut.



Model pertumbuhan alga yang berhubungan dengan perubahan konsentrasi nitrogen-amonia, nitrogen-nitrit, dan nitrogen-nitrat merupakan sistem persamaan differensial taklinear seperti dibawah ini. Selanjutnya, untuk penyederhanaan penulisan ketergantungan variabel  $A$ ,  $N_1$ ,  $N_2$ ,  $N_3$  terhadap  $t$  dihilangkan.

$$\frac{dA}{dt} = \delta A \left( 1 - \frac{A}{K} \right), \tag{2.1a}$$

$$\frac{dN_1}{dt} = -k_1 N_1 + \frac{\sigma_2}{d} - \frac{PN_1}{PN_1 + (1-P)N_3} \alpha \mu A, \tag{2.1b}$$

$$\frac{dN_2}{dt} = k_1N_1 - k_2N_2, \quad (2.1c)$$

$$\frac{dN_3}{dt} = k_2N_2 - \frac{(1-P)N_3}{PN_1 + (1-P)N_3} \alpha\mu A, \quad (2.1d)$$

dengan  $A \geq 0$ ,  $N_1 \geq 0$ ,  $N_2 \geq 0$ ,  $N_3 \geq 0$ ,  $\sigma_2 > 0$ ,  $d > 0$ ,  $\alpha > 0$ ,  $\mu > 0$ ,  $0 \leq P \leq 1$ ,  $k_1 > 0$ ,  $k_2 > 0$ , dan  $\delta = \mu - \rho - \frac{\sigma_1}{d}$ ,  $\delta > 0$ .

Misalkan titik  $E(A_e, N_{1e}, N_{2e}, N_{3e})$  merupakan titik kesetimbangan untuk alga, amonia, nitrit, dan nitrat pada sistem (2.1) Titik kesetimbangan tersebut dapat diperoleh jika memenuhi:  $\frac{dA}{dt} = 0$ ,

$$\frac{dN_1}{dt} = 0, \quad \frac{dN_2}{dt} = 0, \quad \text{dan} \quad \frac{dN_3}{dt} = 0$$

sehingga sistem persamaan (2.1a-d) pada titik  $E(A_e, N_{1e}, N_{2e}, N_{3e})$  akan menjadi

$$\delta A_e \left(1 - \frac{A_e}{K}\right) = 0 \quad (2.2a)$$

$$-k_1N_{1e} + \frac{\sigma_2}{d} - \frac{PN_{1e}}{PN_{1e} + (1-P)N_{3e}} \alpha\mu A_e = 0 \quad (2.2b)$$

$$k_1N_{1e} - k_2N_{2e} = 0 \quad (2.2c)$$

$$k_2N_{2e} - \frac{(1-P)N_{3e}}{PN_{1e} + (1-P)N_{3e}} \alpha\mu A_e = 0 \quad (2.2d)$$

Pada persamaan (2.2a), pertumbuhan jumlah sel alga tidak bergantung pada konsentrasi nitrogen: amonia, nitrit, dan nitrat saat  $t$ . Sehingga titik kesetimbangan model untuk alga dapat diperoleh secara langsung yaitu saat  $A_e = 0$  dan  $A_e = K$ . Selanjutnya solusi kesetimbangan model untuk  $N_{1e}, N_{2e}, N_{3e}$  dengan laju perubahan nitrogen: amonia, nitrit, dan nitrat saat bernilai nol dapat dicari untuk setiap titik kesetimbangan

pada alga. Untuk  $A_e = 0$ , titik ini menunjukkan bahwa alga belum tumbuh pada perairan. Pada kasus ini, tidak terdapat titik kesetimbangan  $E(A_e, N_{1e}, N_{2e}, N_{3e})$ . Sedangkan, untuk  $A_e = K$ , pada kondisi ini konsentrasi alga mencapai jumlah maksimum. Cara untuk mengetahui nilai  $N_{1e}, N_{2e}$ , dan  $N_{3e}$  adalah dengan mensubsitusikan  $A_e = K$  pada persamaan (2.2b) dan (2.2d).

Substitusikan  $A_e = K$  pada persamaan (2.2b) diperoleh

$$-k_1N_{1e} + \frac{\sigma_2}{d} - \frac{PN_{1e}}{PN_{1e} + (1-P)N_{3e}} \alpha\mu K = 0 \quad (2.3)$$

Dari persamaan (2.2c) didapatkan

$$k_2N_{2e} = k_1N_{1e} \quad (2.4)$$

Substitusikan  $A_e = K$  dan persamaan (2.4) ke (2.2d) diperoleh

$$k_1N_{1e} - \frac{(1-P)N_{3e}}{PN_{1e} + (1-P)N_{3e}} \alpha\mu K = 0$$

$$\Leftrightarrow k_1N_{1e} = \frac{(1-P)N_{3e}}{PN_{1e} + (1-P)N_{3e}} \alpha\mu K \quad (2.5)$$

Substitusikan (3.14) pada (3.12)

$$-\frac{(1-P)N_{3e}}{PN_{1e} + (1-P)N_{3e}} \alpha\mu K + \frac{\sigma_2}{d} - \frac{PN_{1e}}{PN_{1e} + (1-P)N_{3e}} \alpha\mu K = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{PN_{1e} + (1-P)N_{3e}}{PN_{1e} + (1-P)N_{3e}} \alpha\mu K = \frac{\sigma_2}{d}$$

$$\Leftrightarrow \sigma_2 = \alpha\mu K d$$

Apabila sumber bentos nilainya dianggap sama dengan  $\alpha\mu K d$ , maka nilai  $N_{2e}$  dan  $N_{3e}$  dapat ditentukan berdasarkan nilai  $N_{1e}$ . Dari persamaan (2.4) diperoleh

$$k_2N_{2e} = k_1N_{1e} \Leftrightarrow N_{2e} = \frac{k_1}{k_2} N_{1e} \quad (2.6)$$

dan dari persamaan (2.5) diperoleh

$$k_1N_{1e} = \frac{(1-P)N_{3e}}{PN_{1e} + (1-P)N_{3e}} \alpha\mu K$$

$$\Leftrightarrow k_1 N_{1e} (PN_{1e} + (1-P)N_{3e}) = (1-P)N_{3e} \alpha \mu K \quad \text{dan} \quad \bar{A} = A - A_e, \quad \bar{N}_1 = N_1 - N_{1e},$$

$$\Leftrightarrow k_1 P N_{1e}^2 = (1-P)N_{3e} (\alpha \mu K - k_1 N_{1e})$$

$$\Leftrightarrow N_{3e} = \frac{k_1 P N_{1e}^2}{(\alpha \mu K - k_1 N_{1e})(1-P)} \quad (2.7)$$

Titik kesetimbangan dari model perubahan nitrogen: amonia, nitrit, dan nitrat,  $E(A_e, N_{1e}, N_{2e}, N_{3e})$  dengan pertumbuhan jumlah sel alga mencapai maksimal  $K$  yaitu  $E(K, N_{1e}, N_{2e}, N_{3e})$  dengan

$$N_{1e} = C, \quad N_{2e} = \frac{k_1}{k_2} C,$$

$$N_{3e} = \frac{k_1 P C^2}{(1-P)(\alpha \mu K - k_1 C)}, \quad \text{dengan}$$

$$\sigma_2 = \alpha \mu K d, \quad C > 0.$$

## 2.2. Analisis Kestabilan

Jenis kestabilan dari titik kesetimbangan dapat ditentukan berdasarkan nilai eigen dari matriks Jacobian dari sistem linear. Salah satu metode pelinearannya adalah ekspansi Taylor di sekitar titik kesetimbangan. Misalkan

$$\frac{dA}{dt} = F(A, N_1, N_2, N_3) = \delta A \left(1 - \frac{A}{K}\right) \quad (2.8a)$$

$$\frac{dN_1}{dt} = G(A, N_1, N_2, N_3) = -k_1 N_1 + \frac{\sigma_2}{d} - \frac{PN_1 + (1-P)N_3}{PN_1 + (1-P)N_3} \alpha \mu A \quad (2.8b)$$

$$\frac{dN_2}{dt} = H(A, N_1, N_2, N_3) = k_1 N_1 - k_2 N_2 \quad (2.8c)$$

$$\frac{dN_3}{dt} = I(A, N_1, N_2, N_3) = k_2 N_2 - \frac{(1-P)N_3}{PN_1 + (1-P)N_3} \alpha \mu A \left[1 - \frac{2A_e}{K}\right] \bar{A} \quad (2.8d)$$

$$\bar{N}_2 = N_2 - N_{2e}, \quad \text{dan} \quad \bar{N}_3 = N_3 - N_{3e}.$$

Sehingga linearisasi model (2.1a-d) dititik  $E(A_e, N_{1e}, N_{2e}, N_{3e})$  dengan menggunakan deret Taylor adalah sebagai berikut

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{A}}{dt} &= \bar{A} \frac{\partial F(A_e, N_{1e}, N_{2e}, N_{3e})}{\partial A} + \bar{N}_1 \frac{\partial F(A_e, N_{1e}, N_{2e}, N_{3e})}{\partial N_1} \\ &+ \bar{N}_2 \frac{\partial F(A_e, N_{1e}, N_{2e}, N_{3e})}{\partial N_2} + \bar{N}_3 \frac{\partial F(A_e, N_{1e}, N_{2e}, N_{3e})}{\partial N_3} \end{aligned} \quad (2.9a)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{N}_1}{dt} &= \bar{A} \frac{\partial G(A_e, N_{1e}, N_{2e}, N_{3e})}{\partial A} + \bar{N}_1 \frac{\partial G(A_e, N_{1e}, N_{2e}, N_{3e})}{\partial N_1} \\ &+ \bar{N}_2 \frac{\partial G(A_e, N_{1e}, N_{2e}, N_{3e})}{\partial N_2} + \bar{N}_3 \frac{\partial G(A_e, N_{1e}, N_{2e}, N_{3e})}{\partial N_3} \end{aligned} \quad (2.9b)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{N}_2}{dt} &= \bar{A} \frac{\partial H(A_e, N_{1e}, N_{2e}, N_{3e})}{\partial A} + \bar{N}_1 \frac{\partial H(A_e, N_{1e}, N_{2e}, N_{3e})}{\partial N_1} \\ &+ \bar{N}_2 \frac{\partial H(A_e, N_{1e}, N_{2e}, N_{3e})}{\partial N_2} + \bar{N}_3 \frac{\partial H(A_e, N_{1e}, N_{2e}, N_{3e})}{\partial N_3} \end{aligned} \quad (2.9c)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{N}_3}{dt} &= \bar{A} \frac{\partial I(A_e, N_{1e}, N_{2e}, N_{3e})}{\partial A} + \bar{N}_1 \frac{\partial I(A_e, N_{1e}, N_{2e}, N_{3e})}{\partial N_1} \\ &+ \bar{N}_2 \frac{\partial I(A_e, N_{1e}, N_{2e}, N_{3e})}{\partial N_2} + \bar{N}_3 \frac{\partial I(A_e, N_{1e}, N_{2e}, N_{3e})}{\partial N_3} \end{aligned} \quad (2.9d)$$

Kemudian, substitusikan persamaan (2.8a-d) ke dalam persamaan (2.9a-d) akan menghasilkan

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{N}_1}{dt} &= \left[ \frac{-P\alpha\mu N_{1e}}{PN_{1e} + (1-P)N_{3e}} \right] \bar{A} + \\ &\left[ -k_1 + \frac{-P(1-P)\alpha\mu A_e N_{3e}}{(PN_{1e} + (1-P)N_{3e})^2} \right] \bar{N}_1 + \\ &\left[ \frac{P(1-P)\alpha\mu A_e N_{1e}}{(PN_{1e} + (1-P)N_{3e})^2} \right] \bar{N}_3 \end{aligned} \quad (2.10)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{N}_2}{dt} &= k_1 \bar{N}_1 - k_2 \bar{N}_2 \\ \frac{d\bar{N}_3}{dt} &= \left[ \frac{-(1-P)\alpha\mu N_{3e}}{PN_{1e} + (1-P)N_{3e}} \right] \bar{A} + \\ &\left[ \frac{P(1-P)\alpha\mu A_e N_{3e}}{(PN_{1e} + (1-P)N_{3e})^2} \right] \bar{N}_1 + \\ &k_2 \bar{N}_2 + \left[ \frac{-P(1-P)\alpha\mu A_e N_{1e}}{(PN_{1e} + (1-P)N_{3e})^2} \right] \bar{N}_3 \end{aligned}$$

Untuk penyederhanaan, transformasi sistem persamaan (2.10) ke dalam variabel  $X$ ,  $Y$ , dan  $Z$  dengan

$$X = P(1-P)\alpha\mu,$$

$$Y = PN_{1e} + (1-P)N_{3e},$$

$$Z = \delta \left( 1 - \frac{2A_e}{K} \right),$$

sehingga diperoleh sistem persamaan sebagai berikut

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{A}}{dt} &= Z\bar{A} \\ \frac{d\bar{N}_1}{dt} &= -\frac{XN_{1e}}{(1-P)Y} \bar{A} - k_1 \bar{N}_1 - \frac{XA_e N_{3e}}{Y^2} \bar{N}_1 + \\ &\frac{XA_e N_{1e}}{Y^2} \bar{N}_3 \\ \frac{d\bar{N}_2}{dt} &= k_1 \bar{N}_1 - k_2 \bar{N}_2 \\ \frac{d\bar{N}_3}{dt} &= -\frac{XN_{3e}}{PY} \bar{A} + \frac{XA_e N_{3e}}{Y^2} \bar{N}_1 + k_2 \bar{N}_2 - \\ &\frac{XA_e N_{1e}}{Y^2} \bar{N}_3 \end{aligned} \quad (2.11)$$

Sistem persamaan (2.11) diubah dalam bentuk matriks akan menjadi

$$\begin{pmatrix} \frac{d\bar{A}}{dt} \\ \frac{d\bar{N}_1}{dt} \\ \frac{d\bar{N}_2}{dt} \\ \frac{d\bar{N}_3}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{XN_{1e}}{(1-P)Y} & -k_1 - \frac{XA_e N_{3e}}{Y^2} & 0 & \frac{XA_e N_{1e}}{Y^2} \\ 0 & k_1 & -k_2 & 0 \\ -\frac{XN_{3e}}{PY} & \frac{XA_e N_{3e}}{Y^2} & k_2 & -\frac{XA_e N_{1e}}{Y^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{A} \\ \bar{N}_1 \\ \bar{N}_2 \\ \bar{N}_3 \end{pmatrix}$$

Persamaan karakteristik matriks Jacobian,  $\mathbf{J}$ , dapat dicari dengan  $\det(\mathbf{J} - \lambda \mathbf{I}) = 0$  dengan  $\mathbf{I}$  matriks identitas, sehingga didapatkan

$$|\mathbf{J} - \lambda \mathbf{I}| = \begin{vmatrix} Z - \lambda & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{XN_{1e}}{(1-P)Y} & -k_1 - \frac{XA_e N_{3e}}{Y^2} - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & k_1 & -k_2 - \lambda & 0 \\ -\frac{XN_{3e}}{PY} & \frac{XA_e N_{3e}}{Y^2} & k_2 & -\frac{XA_e N_{1e}}{Y^2} \end{vmatrix}$$

Selanjutnya, melalui perluasan kofaktor baris pertama serta memisalkan  $\frac{XA_e N_{1e}}{Y^2} = M_1$  dan  $\frac{XA_e N_{3e}}{Y^2} = M_3$ ,

diperoleh persamaan karakteristik matriks **J** yaitu

$$(Z-\lambda)(-\lambda)\left[\lambda^2 + \lambda(k_1+k_2+M_1+M_3) + k_1k_2 + k_2M_1 + k_1M_1 + k_2M_3\right] = 0 \tag{2.12}$$

Persamaan (2.12) mempunyai penyelesaian  $\lambda = 0$ ,  $\lambda = Z$ , dan solusi dari polinomial derajat dua  $\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0$  dengan

$$a_1 = k_1 + k_2 + M_1 + M_3 \tag{2.13a}$$

$$a_2 = k_1k_2 + k_1M_1 + k_2M_1 + k_2M_3 \tag{2.13b}$$

dengan menerapkan nilai  $N_{1e}$ ,  $N_{2e}$ , dan  $N_{3e}$  pada persamaan (2.13a-b), nilai  $a_1 \neq 0$  dan  $a_2 \neq 0$ . Hal ini terlihat pada persamaan (2.14a-b)

$$a_1 = -4k_1 - k_2 - \frac{1}{PC\alpha\mu K}(-\alpha^2\mu^2K^2 + 2\alpha\mu Kk_1C + P\alpha^2\mu^2K^2 + 2Pk_1^2C^2) \tag{2.14a}$$

$$a_2 = k_1k_2 + \frac{P\alpha\mu KC}{\left(P + \frac{k_1PC}{\alpha\mu K - k_1C}\right)^2 C^2} \left( (1-P)(k_1+k_2) + \frac{k_1k_2PC}{\alpha\mu K - k_1C} \right) \tag{2.14b}$$

Misalkan  $\lambda_1$  dan  $\lambda_2$  masing-masing adalah akar-akar dari  $\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0$ ,  $\lambda_1$  dan  $\lambda_2$  dapat dinyatakan sebagai

$$\lambda_1 = \frac{-a_1 + \sqrt{a_1^2 - 4a_2}}{2}$$

$$\lambda_2 = \frac{-a_1 - \sqrt{a_1^2 - 4a_2}}{2}$$

Dalam hal ini

- $\lambda_1$  dan  $\lambda_2$  adalah akar-akar real dan berbeda untuk  $a_1^2 - 4a_2 > 0$ ,
- $\lambda_1$  dan  $\lambda_2$  adalah akar-akar real yang sama untuk  $a_1^2 - 4a_2 = 0$ ,
- $\lambda_1$  dan  $\lambda_2$  adalah akar-akar bilangan kompleks untuk  $a_1^2 - 4a_2 < 0$ .

sehingga

1. Perilaku sistem di sekitar titik kesetimbangan  $E(A_e, N_{1e}, N_{2e}, N_{3e})$  akan stabil jika  $Z < 0$ ,  $\lambda_1 < 0$ , dan  $\lambda_2 < 0$ . Dalam hal ini, haruslah  $a_1 > 0$ .

Karena  $\lambda_2$  selalu bernilai negatif, sehingga agar nilai  $\lambda_1 < 0$  maka

2. Perilaku sistem di sekitar titik kesetimbangan  $E(A_e, N_{1e}, N_{2e}, N_{3e})$  tidak stabil jika  $Z > 0$  atau  $\lambda_1 > 0$  atau  $\lambda_2 > 0$ . Apabila  $\lambda_1$  dan  $\lambda_2$  keduanya bernilai positif maka  $a_1 < 0$  dan  $a_2 > 0$ . Apabila  $\lambda_1$  dan  $\lambda_2$  berlawanan tanda maka  $a_2 < 0$ .

Dari penjelasan tersebut diatas, kestabilan titik kesetimbangan  $E(A_e, N_{1e}, N_{2e}, N_{3e})$  ditentukan melalui nilai eigen dari matriks Jacobian sistem yang sudah dilinearisasi. Parameter  $Z$  merupakan nilai eigen matriks **J**, sehingga jika  $Z$  bernilai positif maka solusi kesetimbangan  $E(A_e, N_{1e}, N_{2e}, N_{3e})$  tidak stabil.

### 3. SIMULASI NUMERIK

Pada bagian ini, diberikan simulasi untuk menyelidiki perubahan konsentrasi nitrogen-amonia, nitrogen-nitrit, dan nitrogen-nitrat yang berhubungan dengan pertumbuhan logistik alga. Untuk keperluan simulasi ini data pertumbuhan alga dan data konsentrasi amonia, nitrit, dan nitrat diambil dari Widowati, dkk[6, 7]. Sedangkan untuk parameter-parameter yang lain, nilainya didapatkan dari Brown, L.C and Barnwell, T.O [2]. Penggunaan QUAL2E-Uncas terhadap variasi input data parameter pada suatu perairan dapat diperoleh suatu analisis sensitivitas yang menjadi penentu dalam nilai interval setiap parameternya. Tanpa mengurangi keumuman, pada simulasi numerik ini diambil nilai parameter-parameter dalam interval tersebut, seperti di bawah ini

$$\alpha = 0,075 \qquad \mu = 1,047$$

$$\sigma_1 = 0,64 \qquad \rho = 0,15$$

$$P = 0,06$$

dengan  $\delta = 0,737$ ;

$$F = \frac{0,06N_1(t)}{0,06N_1(t) + 0,94N_3(t)}$$

dan  $\frac{\sigma_2}{d} = 6,18$ .

Nilai dari parameter  $K = 78,64$ ,  $k_1 = 0,00184$ , dan  $k_2 = 1,6041$  dicari menggunakan metode kuadrat terkecil dengan software MAPLE. Dari sini, diperoleh model perubahan konsentrasi amoniak, nitrit, nitrat yang berkaitan dengan pertumbuhan alga sebagai berikut

$$\begin{aligned} \frac{dA}{dt} &= 0,737A \left( 1 - \frac{A}{78,64} \right) \\ \frac{dN_1}{dt} &= -0,00184N_1 + 6,618 - \frac{0,06N_1}{0,06N_1 + 0,94N_3} - 0,0837A \\ \frac{dN_2}{dt} &= 0,00184N_1 - 1,6041N_2 \\ \frac{dN_3}{dt} &= 1,6041N_2 - \frac{0,94N_3}{0,06N_1 + 0,94N_3} - 0,0837A \end{aligned} \tag{3.1}$$

Solusi kesetimbangan dari model logistik pertumbuhan alga adalah  $A(t) = 0$  dan  $A(t) = K$ . Substitusi kedua solusi ini menghasilkan suatu titik kesetimbangan model,  $(A_e, N_{1e}, N_{2e}, N_{3e})$ , yaitu pada saat konsentrasi alga mencapai batas maksimal (*carrying capacity*). Penerapan nilai dari parameter-parameter yang ada akan diperoleh titik kesetimbangan model perubahan konsentrasi nitrogen yang berkaitan dengan model logistik alga sebagai berikut

$$A_e = K = 78,64; N_{1e} = C;$$

$$N_{2e} = \frac{k_1}{k_2} C = 0,001147 C;$$

$$N_{3e} = \frac{k_1 P C^2}{(1-P)(\alpha \mu K - k_1 C)} = \frac{0,001104 C^2}{5,8047 - 0,00173 C}$$

Perilaku model dapat dianalisis dengan mensubstitusikan konstanta  $C$  ke dalam titik kesetimbangan  $E(K, N_{1e}, N_{2e}, N_{3e})$ . Karena nilai  $C$  pada interval  $0 < C \leq 47,5$ , untuk contoh numerik ini

dipilih  $C = 21,648$  yang merupakan rata-rata konsentrasi amonia [6]. Sehingga diperoleh titik kesetimbangan model perubahan konsentrasi amonia, nitrit, dan nitrat,  $E(A_e, N_{1e}, N_{2e}, N_{3e})$  yaitu  $A_e = 78,64$ ,  $N_{1e} = 21,648$ ,  $N_{2e} = 0,02483$ ,  $N_{3e} = 0,00897$ .

Sistem persamaan (3.1) yang dilinearisasi di titik kesetimbangan tersebut akan menjadi

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{A}}{dt} &= -0,737 \bar{A} \\ \frac{d\bar{N}_1}{dt} &= -0,07806 \bar{A} - 0,003669 \bar{N}_1 + 4,7797 \bar{N}_3 \\ \frac{d\bar{N}_2}{dt} &= 0,00184 \bar{N}_1 - 1,6041 \bar{N}_2 \\ \frac{d\bar{N}_3}{dt} &= -4,679 \cdot 10^{-4} \bar{A} + 0,00183 \bar{N}_1 + 1,6041 \bar{N}_2 - 4,7797 \bar{N}_3 \end{aligned} \tag{3.2}$$

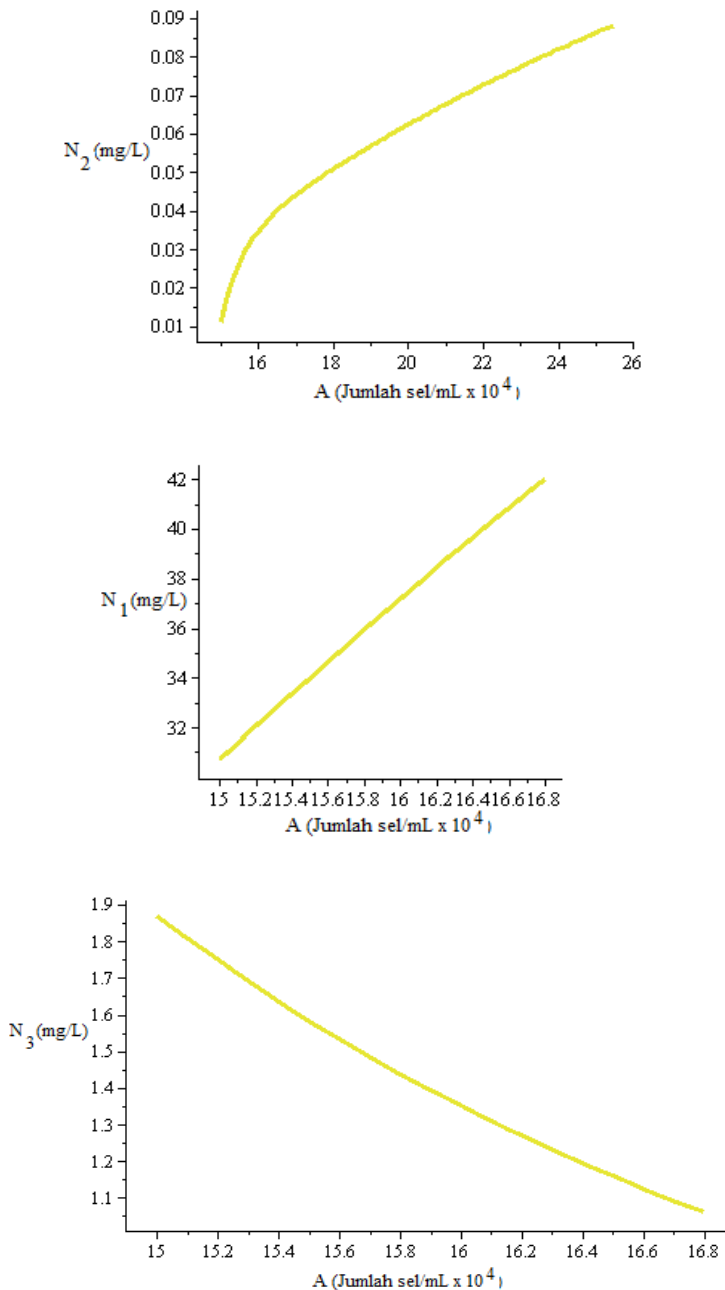
Matriks Jacobiannya adalah

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} -0,737 & 0 & 0 & 0 \\ -0,07806 & -4,7816 & 0 & 0,00183 \\ 0 & 0,00184 & -1,6041 & 0 \\ -4,6796 \cdot 10^{-4} & 4,7798 & 1,6041 & -0,00183 \end{bmatrix}$$

Nilai eigen dari matriks  $\mathbf{J}$  adalah  $\lambda_1 = 0$ ;  $\lambda_2 = -4,783$ ,  $\lambda_3 = -0,737$ ;  $\lambda_4 = -1,604$ . Karena semua nilai eigen dari matrik Jacobian untuk sistem terlinearisasi adalah kurang dari atau samadengan nol maka perilaku solusi model terlinearisasi di sekitar titik kesetimbangan adalah stabil.

Hubungan antara kepadatan (jumlah sel) alga dengan amonia, kepadatan alga dengan nitrit, dan kepadatan alga dengan nitrat diberikan pada Gambar 3.1. Gambar di atas menunjukkan bahwa semakin

meningkat kepadatan alga maka konsentrasi nitrogen-amonia dan nitrogen-nitrit semakin besar sedangkan konsentrasi nitrogen-nitrat akan semakin kecil.



**Gambar 3.1.** Grafik Hubungan Alga terhadap Amonia, Nitrit, dan Nitrat

#### 4. PENUTUP

Perilaku dinamik konsentrasi nitrogen pada perairan yang berkaitan dengan model logistik pertumbuhan alga telah dikaji secara analitik. Perilaku sistem di sekitar titik kesetimbangan akan stabil, bila bagian real nilai eigen dari matriks Jacobian sistem terlinearisasi kurang dari atau samadengan nol. Sedangkan perilaku sistem di sekitar titik kesetimbangan tidak stabil bila terdapat bagian real nilai eigen dari matriks Jacobian sistem terlinearisasi yang lebih besar dari nol.

Dari hasil simulasi diperoleh bahwa konsentrasi nitrogen-amoniak, nitrogen-nitrit, dan nitrogen-nitrat akan stabil dan menuju ke suatu titik tetap. Perubahan konsentrasi nitrogen-amoniak, nitrogen-nitrit, dan nitrogen-nitrat dipengaruhi oleh perubahan kepadatan alga. Bila kepadatan (jumlah sel) alga semakin meningkat maka konsentrasi nitrogen-amoniak dan nitrogen-nitrit semakin meningkat pula, namun konsentrasi nitrogen-nitrat semakin menurun.

#### Ucapan Terima Kasih

Paper ini merupakan bagian dari hasil Penelitian Fundamental tahun 2009 dengan Surat Perjanjian Pelaksanaan Hibah Penelitian Multi Tahun Nomor: 124.A/H7.2/KP/2009, tanggal 18 Maret 2009. Terima kasih penulis sampaikan kepada Universitas Diponegoro maupun DIKTI yang telah mensupport penelitian ini.

#### 5. DAFTAR PUSTAKA

- [1]. T.N. Buckley, J.M. Miller, and G.D. Farquhar, *The mathematics of linked optimisation for water and nitrogen use in a canopy*, *Silva Fennica*, **36**, 3, 639–669, 2002.
- [2]. L.C. Brown and T.O. Barnwell, *The Enhanced Stream Water Quality Models Qual2E and Qual2E-Uncas: Documentation and User Manual*, Environmental Research Laboratory



- US Environmental Protection Agency  
Athens, Georgia, 1987.
- [3]. P. Djambov and N. Ruseva, *Modelling of nitrogen oxide oxidation in nitric acid production*, Journal of the University of Chemical Technology and Metallurgy, **41**, 1, 41-44, 2006.
- [4]. KIWE, Korea Water Resources Corporation, *Development of Water Quality Management System for the West Tarum Canal (WTC) of Citarum River Basin (CRB) in West Java Province*, 2003.
- [5]. A.K. Misra, *Mathematical modeling and analysis of eutrophication of water bodies caused by nutrients*, Nonlinear Analysis: Modelling and Control, **12**, 4, 511-524, 2007.
- [6]. Widowati, Hermin P.S, and Sutimin, *Laporan Kemajuan II Penelitian Fundamental, Konstruksi Model Dinamik Nitrogen untuk memprediksi Beban Limbah Maksimum: Studi Kasus Polder Tawang Semarang*, Universitas Diponegoro, Semarang, 2009.
- [7]. Widowati, Hermin P.S, and Sutimin, *Mathematical Modeling and Analysis of Ammonia, Nitrite, and Nitrate Concentration: Case Study in Polder Tawang Semarang, Indonesia*, Proceedings of the IICMA, Gadjah Mada University, Yogyakarta, 2009, pp 516-570.
-