JURNAL MATEMATIKA DAN KOMPUTER
Vol. 4. No. 2, 93 - 100, Agustus 2001, ISSN : 1410-8518

ELEMEN PEMBANGUN Γ DALAM SEMIGRUP - Γ

Y.D. Sumanto
Jurusan Matematika FMIPA UNDIP

Abstrak

Misalkan M himpunan tak kosong dan Γ himpunan operasi biner assosiatif pada M. Jika untuk setiap $\alpha, \beta \in \Gamma$ dan untuk setiap x, y,z $\in$ M berlaku $(x\alpha y)\beta z = x\alpha(y\beta z)$, maka M disebut semigrup-Γ. Dalam tulisan ini akan ditunjukkan bahwa jika $\alpha \in \Gamma$ dan untuk setiap $x \in M$ ada $y, z \in M$ sedemikian hingga $x = y\alpha z$, maka untuk setiap $\beta \in \Gamma$ ada $b \in M$ sedemikian hingga $\beta = \alpha b\alpha$.

1. PENDAHULUAN

Misalkan M himpunan tak kosong dan A himpunan semua operasi biner assosiatif pada M Dalam tulisan ini akan diperhatikan secara khusus untuk operasi-operasi $\alpha, \beta \in A$ dengan sifat untuk setiap $x, y, z \in M$, $(x\alpha y)\beta z = x\alpha(y\beta z)$.

Misalkan $\Gamma \subseteq A$ sedemikian hingga untuk setiap $\alpha, \beta \in \Gamma$ dan untuk setiap $x, y, z \in M$ memenuhi $(x\alpha y)\beta z = x\alpha(y\beta z)$, maka M terhadap Γ membentuk semigrup-Γ. Untuk setiap $\alpha \in \Gamma$, M dan α membentuk suatu semigrup, yang disebut *inter-related* semigrup-Γ ditulis dengan M_α.

Dalam tulisan ini akan ditunjukkan bahwa jika $\alpha \in \Gamma$ dan untuk setiap $x \in M$ ada $y, z \in M$ sedemikian hingga $x = y\alpha z$ (atau $M\alpha M = M$), maka untuk setiap $\beta \in \Gamma$ ada $b \in M$ sedemikian hingga $\beta = \alpha b\alpha$.

2. ELEMEN PEMBANGUN DALAM SEMIGRUP-Γ

Untuk membahas lebih lanjut perlu didefinisikan mengenai kesamaan dua operasi biner.

Definisi 1

Misalkan M himpunan tak kosong sedangkan α dan β operasi-operasi biner pada M, $\alpha = \beta$ bila dan hanya bila untuk semua $x, y \in M$, $x\alpha y = x\beta y$.

Dan berikut ini didefinisikan tentang operasi pada operasi biner.

Definisi 2

Misalkan M semigrup-Γ, $\alpha, \beta, \gamma \in \Gamma$ dan $a \in M$. Didefinisikan $\alpha a\beta = \gamma$ bila dan hanya bila untuk setiap $x, y \in M$ berlaku :

$$
\begin{aligned}
x\gamma y &= x(\alpha a\beta)y \\
&= (x\alpha a)\beta y \\
&= x\alpha(a\beta y)
\end{aligned}
$$

Dari definisi 2 di atas elemen-elemen M dapat dipandang sebagai operasi biner pada Γ.

Contoh :

Misalkan M = $\{a, b, c\}$ dan Γ = $\{\alpha, \beta, \gamma\}$

Dengan

a	a	b	c
a	a	b	c
b	b	c	a
c	c	a	b

β	a	b	c
a	c	a	b
b	a	b	c
c	b	c	a

γ	a	b	C
a	b	c	A
b	c	a	B
c	a	b	C

dari sini diperoleh

$(\alpha\beta\gamma)$	a	b	c
a	c	a	b
b	a	b	c
c	b	c	a

Jadi $\alpha b\gamma = \beta$

Selanjutnya theorema berikut menunjukkan bahwa, jika M semigrup-Γ dan $\alpha \in \Gamma$ sedemikian hingga, ada elemen identitas di dalam M untuk α, maka setiap elemen Γ dapat dibangun oleh α.

Theorema 1

Jika M semigrup-Γ dan $\alpha \in \Gamma$ sedemikian hingga ada $a \in M$ di mana untuk setiap $x \in M$, $a\alpha x = x\alpha a = x$, maka untuk setiap $\beta \in \Gamma$ ada $b \in M$ sedemikian hingga $\beta = \alpha b\alpha$.

Bukti

Misalkan β elemen sebarang di dalam Γ dan $b = a\beta a$, maka untuk setiap $x, y \in M$

$$
\begin{aligned}
x(\alpha b\alpha)y &= (x\alpha b)\,\alpha y \\
&= (x\alpha(a\beta a))\,\alpha y \\
&= ((x\alpha a)\,\beta a)\,\alpha y \\
&= (x\beta a)\,\alpha y \\
&= x\beta(a\alpha y) \\
&= x\beta y
\end{aligned}
$$

Jadi $\beta = \alpha b\alpha$.

Selanjutnya $\alpha \in \Gamma$ seperti dalam Theorema 1 tersebut disebut pembangun (generator) elemen-elemen Γ.

Selanjutnya muncul pertanyaan elemen-elemen Γ yang bagaimanakah yang mempunyai elemen identitas di dalam M ? Lemma-lemma dan theorema-theorema berikut mencoba akan menjawab permasalahan tersebut.

Lemma 1

Misalkan M semigrup-Γ dan $\alpha \in \Gamma$, jika untuk setiap $x \in M$ ada $y,z \in M$ sedemikian hingga $x = y\alpha z$, maka ada $a \in M$ sedemikian hingga untuk setiap $x \in M$ ada $y, z \in M$ sedemikian hingga $x = y(\alpha a\alpha)z$.

Bukti

Akan dibuktikan dengan kontradiksi. Andaikan untuk setiap $a \in M$ ada $x \in M$ sedemikian hingga untuk setiap $y, z \in M$, $x \neq y(\alpha a \alpha)z$. Ambil sebarang $u \in M$, maka ada $a,z \in M$ sedemikian hingga $u = a\alpha z$. Untuk $a \in M$ tersebut ada $x \in M$ sedemikian hingga untuk sebarang $y \in M$, berlaku : $x \neq y\alpha\,(a\alpha z) = y\alpha u$. Karena y dan u sebarang, maka ada x sedemikian hingga $x \neq y\alpha u$ kontradiksi dengan hipotesisnya. Jadi ada $a \in M$ sedemikian hingga untuk setiap $x \in M$ ada $y, z \in M$ sedemikian hingga $x = y(\alpha a \alpha)z$. Misalkan $M\alpha M = \{x \in M | x = y\alpha z, y,z \in M\}$ dan $M(\alpha a \alpha)M = \{x \in M | x = y(\alpha a \alpha)z, y,z \in M\}$. Maka Lemma 1 ekuivalen dengan pernyataan jika $M\alpha M = M$, maka ada $a \in M$ sedemikian hingga $M(\alpha a \alpha)M = M$.

Lemma 2

Misalkan M semigrup-Γ dengan $\alpha \in \Gamma$ dan $a \in M$. Jika $x \in M(\alpha a \alpha)M$ maka $x\alpha x \in M(\alpha a \alpha)M$.

Lemma 3

Misalkan M semigrup-Γ dengan $\alpha \in \Gamma$, $a \in M$ dan misalkan $M\alpha a = \{x \in M | x = y\alpha a, y \in M\}$ dan $a\alpha M = \{x \in M | x = a\alpha y, y \in M\}$

Jika $x \neq M\,\alpha a$ dan $x \notin a\alpha M$, maka $x \notin M(\alpha a \alpha)M$.

Bukti

Misalkan $x \neq M\alpha a$ dan $x \notin a\alpha M$, maka untuk semua $y,z \in M$, $x \neq y\alpha a$ dan $x \neq a\alpha z$. Sehingga :

$$\begin{aligned} x\alpha x &\neq (y\alpha a)\alpha(a\alpha z) \\ &= y(\alpha a \alpha)(a\alpha z) \subseteq M(\alpha a \alpha)(a\alpha M) \subseteq M(\alpha a \alpha)\,M \end{aligned}$$

Jadi $x\alpha x \notin M(\alpha a \alpha)M$. Dan menurut Lemma 2, maka $x \notin M(\alpha a \alpha)\,M$.

Pernyataan Lemma 3 tersebut ekuivalen dengan pernyataan jika $x \in M(\alpha a \alpha)M$, maka $x \in M\alpha a$ atau $x \in a\alpha M$. Sebagai akibat langsung Lemma 3 tersebut diperoleh pernyataan jika $M(\alpha a \alpha)M = M$, maka $M\alpha a =$

M atau $a\alpha M = M$. Dari Lemma 1 dan Lemma 3 diperoleh akibat sebagai berikut :

Akibat

Misalkan M semigrup-Γ dan $\alpha \in \Gamma$. Jika $M\alpha M = M$, maka ada $a \in M$ sedemikian hingga $a\alpha M = M$ atau $M\alpha a = M$.

Selanjutnya dalam tulisan ini hanya akan membahas untuk pernyataan jika $M\alpha M = M$, maka ada $a \in M$ sedemikian hingga $a\alpha M = M$ dan $M\alpha a = M$. Sedangkan untuk $a\alpha M \neq M$ dan $M\alpha a = M$ atau sebaliknya belum dibahas dalam tulisan ini karena mempunyai pendekatan yang berbeda.

Theorema 2

Misalkan M semigrup-Γ dan $\alpha \in \Gamma$, $a \in M$ dengan $a\alpha a = a$.

1. Jika $a\alpha M = M$, maka untuk semua $x \in M$, $a\alpha x = x$ dan $x \in M$
2. Jika $M\alpha a = M$, maka untuk semua $x \in M$, $x\alpha a = x$.

Bukti

Akan dibuktikan untuk bagian 1, sedangkan bagian 2 analog. Andaikan ada $x \in M$ sedemikian hingga $a\alpha x \neq x$. Dan misalkan $x = a\alpha z$ dengan $z \neq x$. Maka diperoleh $a\alpha x = a\alpha(a\alpha z) = (a\alpha a)\alpha z = a\alpha z = x$, kontradiksi. Jadi untuk semua $x \in M$ $a\alpha x = x$.

Sehingga menurut akibat Lemma 1, Lemma 3 dan Theorema 2 tersebut jika $M\alpha M = M$ dan $a \notin M$ dengan $a\alpha a = a$, maka a merupakan elemen identitas untuk α pada M. Dan menurut Theorema 1, maka α menjadi pembangun bagi elemen-elemen Γ.

Selanjutnya timbul pertanyaan, misalkan $M\alpha M = M$ apakah ada $a \in M$ sedemikian hingga $a\alpha a = a$ dengan $M\alpha a = M$ dan $a\alpha M = M$. Jika permasalahan ini terjawab, maka untuk $\alpha \in \Gamma$ dengan $M\alpha M = M$ merupakan pembangun bagi elemen-elemen Γ yang lain. Namun sebelum menjawab masalah ini akan dibahas lemma berikut ini dulu.

Lemma 4

Misalkan M semigrup- Γ, dan $\alpha \in \Gamma$ dengan $M\alpha M = M$. Dan misalkan $A = \{a \in M | a \in M = M \text{ dan } M\alpha a = M\}$

Jika $a \in A$ dengan $a\alpha a \neq a$ dan untuk $b \in M$ dengan :

1. $a\alpha b = b$, maka $b \notin A$
2. $a\alpha b = a$, maka $b \in A$

Bukti

1. Andaikan $b \in A$. Dan misalkan $a = b\alpha y$, $y \notin M$, maka $a\alpha a = a\alpha(b\alpha y) = (a\alpha b)\alpha y = b\alpha y = a$, Kontradiksi. Jadi $b \notin A$.
2. Andaikan $b\alpha M \neq M$.

Dari pengandaian ini ada dua kemungkinan $a \in b\alpha M$ atau $a \notin b\alpha M$.

a. Misalkan $a \in b\alpha M$, maka ada $y \in M$ dengan $a = b\alpha y$. Dan misalkan x sebarang elemen M dengan $x = a\alpha z$, $z \in M$. Maka diperoleh $x = a\alpha z = (b\alpha y)\alpha z = b\alpha(y\alpha z) \in b\alpha M$. Karena $x \in M$ sebarang, maka $b\alpha M = M$ kontradiksi, jadi $a \notin b\alpha M$.

b. Misalkan $a \notin b\alpha M$. Sehingga untuk setiap $x \in M$, $a \neq b\alpha x$. Sehingga untuk setiap $x \in M$

$$\begin{aligned} a\alpha x &= (a\alpha b)\alpha x \\ &= a\alpha(b\alpha x) \\ &\neq a\alpha a = c \end{aligned}$$

Jadi $c = a\alpha a \notin a\alpha M$. Kontradiksi dengan $a \in A$.

Jadi $b\alpha M = M$. Untuk menunjukkan $M\alpha b = M$ analog. Jadi $b \in A$.

Theorema 3 berikut akan menjawab permasalahan yang timbul di depan.

Theorema 3

Jika M semigrup- Γ dan jika $\alpha \in \Gamma$ dengan $M\alpha M = M$, maka ada $a \in M$ sedemikian hingga $a\alpha a = a$ dengan $M\alpha a = M$ atau $a\alpha M = M$.

Sebelum membuktikan Theorema 3 ini perlu diulangi lagi bahwa dalam tulisan ini hanya akan dibahas untuk kasus $M\alpha a = M$ dan $a\alpha M = M$, sedangkan untuk kasus yang lain akan dibahas pada tulisan lain.

Bukti

Dari Lemma 3 diperoleh jika $M\alpha M = M$, maka terdapat $b \in M$ sedemikian hingga $b\alpha M = M$ atau $M\alpha b = M$. Seperti dijelaskan di atas dalam tulisan ini akan dibuktikan untuk kasus $M\alpha b = M$ dan $b\alpha M = M$. Jika $b\alpha b = b$, maka bukti selesai.

Misalkan $b\alpha b \neq b$. Karena $b\alpha M = M$, maka ada $a \in M$ sedemikian hingga $b\alpha a = b$. Dan misalkan $a = y\alpha b \in M\alpha b$, maka

$$\begin{aligned} a &= y\alpha b \\ &= y\alpha(b\alpha a) \\ &= (y\alpha b)\alpha a \\ &= a\alpha a \end{aligned}$$

Jadi untuk $a \in M$ dengan $b\alpha a = b$, maka $a\alpha a = a$. Dan dengan Lemma 4(2), maka $a \in M = M$ dan $M\alpha a = M$. Theorema terbukti.

Sebagai akibat langsung dari Theorema 1, Theorema 2 dan Theorema 3. Jika M semigrup- Γ dan $\alpha \in \Gamma$ dengan $M\alpha M = M$, maka α merupakan pembangun bagi elemen-elemen Γ yang lain. Dan elemen ini disebut elemen pembangun (generator) Γ pada semigrup- Γ.

3. KESIMPULAN

Misalkan M himpunan tak kosong dan Γ merupakan himpunan operasi-operasi biner assosiatif pada M sedemikian hingga untuk setiap $\alpha, \beta \in \Gamma$ dan untuk setiap $x, y, z \in M$ berlaku $(x\alpha y)\beta z = x\alpha(y\beta z)$, maka M merupakan semigrup-Γ. Jika $\alpha \in \Gamma$ dengan $M\alpha M = M$ maka setiap $\beta \in \Gamma$ dapat dinyatakan dengan $\beta = \alpha b\alpha$ dengan $b \in M$.

DAFTAR PUSTAKA

1. Guowey, Yong, *Inter-related Semigroups of-semigroup, Southeast Asian Bulletin of Mathematics*, Hongkong of Science Press LTD, 1996, 20 : 2.

2. J. M. Hovie, *An Introduction to Semigroup Theory,* New York and San Fransisco Academic Press, London, 1976.