JURNAL MATEMATIKA DAN KOMPUTER
Vol. 4. No. 2, 65 - 70, Agustus 2001, ISSN : 1410-8518

SYARAT PERLU LAPANGAN PEMISAH

Bambang Irawanto
Jurusan Matematika FMIPA UNDIP

Abstact

Field is integral domain and is a such that every non-zero elemen in it has multiplicative inverse. Extension field F of field K is splitting field of collections polinomial { fi(x) | i $\in$ I } of K if F is the smallest subfield $\overline{K}$ containing K and all the zeros in $\overline{K}$ of the polinomial fi(x). Elemen $\alpha \in$ F is algebra over K if f (α) = 0 for some 0 $\neq$ f (x) $\in$ K[x]. Splitting field is extension algebra.

Keywords : extension fields, elemen algebra

1. PENDAHULUAN

Lapangan adalah daerah integral yang setiap elemen yang tidak nol mempunyai invers terhadap pergandaan. Lapangan F disebut lapangan perluasan F atas lapangan K jika lapangan merupakan subfield dari lapangan F (Hungerford, T. W, 1984). Polinomial f (x) $\in$ K[x] dan a $\in$ K adalah akar dari f (x) jika dan hanya jika (x – a) faktor dari f (x) (Hungerford T. W, 1984). Lapangan perluasan F disebut lapangan pemisah (splitting field) dari polinomial f (x)$\in$ K [x] jika f (x) terfaktor dalam F [x] dengan akar-akar f (x) berada dalam F (Hungerford T.W, 1984).

Lapangan pemisah F untuk koleksi polinomial { f_i (x) | I $\in$ I } atas K jika F subfield terkecil dalam penutup aljabar $\overline{K}$ yang memuat semua akar-akar dari f_i (x) dan K. (Fraleigh, J. B, 1994). Dalam tulisan ini dipelajari syarat perlu lapangan pemisah dalam hubungan dengan elemen aljabar.

2. LAPANGAN PERLUASAN

Hungerford T.W, (1984), memberikan pengertian lapangan perluasan F atas lapangan K, jika lapangan K merupakan subfield dari lapangan F berdasarkan pengertian ini dibuktikan teorema Kronecker.

Teorema 1. (Teorema Kronecker)

Misal K adalah lapangan dan f(x) polinomial yang tidak konstan dalan K[x], maka terdapatlah lapangan perluasan (Extension field) F dari K, dan elemen $\alpha \in F$ sedemikian sehingga $f(\alpha) = 0$.

Bukti :

K[x] adalah daerah ideal utama, karena daerah ideal utama merupakan daerah faktorisasi tunggal, maka $f(x) \in K[x]$ dapat difaktorkan secara tunggal sebagai $f(x) = p_1(x)\ p_2(x)\ldots\ p_n(x)$, dengan $p_i\ (x)\ (i = 1,2,\ldots n)$ adalah polinomial prima yang tak tereduksi ; karena p(x) polinomial tak tereduksi maka <p(x)> adalah ideal maximal, dalam K[x], dengan $\frac{K[x]}{\langle p(x)\rangle}$ suatu lapangan. Didefinisikan suatu pemetaan ψ oleh $\psi : K \to \frac{K[x]}{\langle p(x)\rangle}$ dengan $a \mapsto a + \langle p(x)\rangle$ ψ adalah pemetaan 1 – 1, sebab $\forall\ a,b \in K$ jika $\psi(a) = \psi(b)$ maka $a + \langle p(x)\rangle = b + \langle p(x)\rangle$ $\Leftrightarrow$ $a\text{-}b \in \langle p(x)\rangle \Leftrightarrow a\text{-}b = k\ p(x)$, jadi a - b suatu kelipatan p(x) yang berderajat 0 maka a - b = 0 atau a = b. ψ homomorfisma ring.

Sehingga $\psi(K) = \{a + \langle p(x)\rangle \mid a \in K\} \subseteq \frac{K[x]}{\langle p(x)\rangle}$ merupakan sub field dari $\frac{K[x]}{\langle p(x)\rangle}$, jadi $K \cong \{a + \langle p(x)\rangle \mid a \in K\}$.

Misal $F = \frac{K[x]}{\langle p(x)\rangle}$ maka F merupakan lapangan perluasan dari K.

Akan dibuktikan $f(\alpha) = 0$, $a \in F = \frac{K[x]}{\langle p(x)\rangle}$, ambil $\alpha \in F$ dengan $\alpha = x + \langle p(x)\rangle$.

Jika $p(x) = a_0x^0 + a_1x^1 + \ldots.. + a_nx^n \in K$, maka $p(\alpha) = a_0\alpha^0 + a_1\alpha^1 + \ldots.. + a_n\alpha^n = \bar{0} \in \frac{K[x]}{\langle p(x)\rangle}$

$P(\alpha) = 0$. Karena $f(x) = p_1(x).\ p_2(x)\ldots\ldots\ldots\ldots\ p_n(x)$, maka $f(\alpha) = 0$.

Contoh :

Misal K = R, f(x) = x^2 + 1, f(x) tak tereduksi dalam R, maka $<x^2+1>$ ideal maksimal dalam R[x] jadi $\frac{R[x]}{\langle x^2+1\rangle}$ lapangan dengan

$\frac{R[x]}{\langle x^2+1\rangle} = \{g(x) + <x^2+1> \mid g(x) \in R[x]\}$.

Ambil $\alpha = x + <x^2+1>$ maka $f(\alpha) = (x + <x^2+1>)^2 + 1 = \bar{0} \in \frac{R[x]}{\langle x^2+1\rangle}$.

Elemen $\alpha \in F$ disebut elemen aljabar atas K jika $f(\alpha) = 0$, untuk suatu $0 \neq f(x) \in K[x]$ sebaliknya α bukan aljabar disebut transedental (Fraleigh J.B, 1994).

Selanjutnya dari pengertian aljabar diperoleh pengertian perluasan aljabar.

Definisi 1. F adalah lapangan perluasan atas lapangan K disebut perluasan aljabar jika setiap elemen dari F merupakan aljabar atas K. F dapat dipandang sebagai ruang vektor atas lapangan K. Dimensi ruang vektor F atas K disebut derajat dari lapangan perluasan F atas K, yang selanjutnya dinotasikan dengan [F:K]. Lebih lanjut lapangan perluasan disebut perluasan berhingga bila [F:K] berhingga.

Teorema 2. Setiap perluasan berhingga dari (finite extention) suatu lapangan merupakan perluasan aljabar. **(**Raisinghania MD, 1980).

Bukti :

Pandang F perluasan berhingga lapangan K yang mempunyai derajat F atas K berhingga sebut n, maka ruang vektor F atas K memiliki dimensi n. Akan ditunjukkan F adalah perluasan aljabar berarti setiap elemen didalam F adalah aljabar atas K. Ambil α sebarang elemen dalam F, maka $\alpha, \alpha^2, \ldots, \alpha^n$ elemen-elemen dalam F dan jika 1 adalah unit dari F maka $1, \alpha, \alpha^2, \ldots, \alpha^n$ merupakan elemen-elemen di dalam F berjumlah (n+1).

Karena ruang vektor F berdimensi n, maka setiap himpunan (n+1) elemen atau lebih tak bebas linier, sehingga himpunan $\{1, \alpha, \alpha^2, \ldots, \alpha^n\}$ tak bebas linear, jadi terdapat elemen-elemen $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ dari K yang tidak semuannya nol sedemikian sehingga,

$$a_0.1 + a_1\alpha + a_2\alpha^2 + \ldots + a_n\alpha^n = 0$$

ini menunjukkan bahwa α adalah akar dari polinomial tidak nol $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$ dalam K[x], sehingga α adalah aljabar atas K. Karena α adalah sebarang elemen dalam F, maka F adalah perluasan aljabar.

Himpunan $\bar{K}_F = \{ \alpha \in F \,/\, \alpha$ aljabar atas K$\}$ merupakan subfield dari F, selanjutnya disebut penutup aljabar (aljabraic closure) dari K dalam F (Fraleigh J. B, 1994).

3. LAPANGAN PEMISAH

Definisi 2. Misal K suatu lapangan dengan penutup aljabar (algebraic closure) $\overline{K}$. $\{ f_i(x) \,/\, i \in I \}$ koleksi dari polinomial-polinomial dalam K[x]. Suatu lapangan F $\leq \overline{K}$ disebut lapangan pemisah (splitting field) dari $\{ f_i(x) \,/\, i \in I \}$ atas K jika F adalah sub field terkecil dari $\overline{K}$ yang memuat K dan semua akar dalam $\overline{K}$ dari setiap $f_i(x)$, untuk $i \in I$. Suatu lapangan $F \leq \overline{K}$ adalah lapangan pemisah (splitting field) atas K, jika $F \leq \overline{K}$ adalah lapangan pemisah (splitting field) dari himpunan sebarang dari polinomial-polinomial dalam K[x].

Dean R. A (1996) menyebutkan bahwa semua lapangan K dan semua f(x) $\in$ K[x] sedemikian sehingga deg (f) ≥ 1, terdapatlah perluasan F dari K yang merupakan lapangan pemisah untuk f(x) atas K.

Teorema 4. Misal F lapangan pemisah dari polinomial f(x) $\in$ K[x] atas K, jika E lapangan pemisah dari f(x) $\in$ K[x] yang lain maka terdapatlah isomorfisma $\varnothing : E \rightarrow F$

Bukti :

Pandang polinomial jika $f(x) = a_0x^0 + a_1x^1 + \ldots + a_nx^n$, $a_i \in K$, $i = 0, 1, \ldots n$.

F lapangan pemisah dari polinomial f(x) atas K maka akar-akar f(x) berada dalam F. Misal $\alpha \in F$ maka $f(\alpha) = a_0\alpha^0 + a_1\alpha^1 + \ldots + a_n\alpha^n = 0$ begitu juga untuk $\beta \in E$ maka $f(\beta) = a_0\beta^0 + a_1\beta^1 + \ldots + a_n\beta^n = 0$ (karena E lapangan pemisah dari f(x) atas K).

Bentuk pemetaan $\varnothing : E \rightarrow F$ dengan $\beta \mapsto \alpha$, maka $\forall\ \beta_1, \beta_2 \in E$ dan $\forall\ \alpha_1, \alpha_2 \in F$ maka $\varnothing(\beta_1 + \beta_2) = (\alpha_1 + \alpha_2) = \alpha_1 + \alpha_2 = \varnothing(\beta_1) + \varnothing(\beta_2)$ dan $\varnothing(\beta_1 . \beta_2) = (\alpha_1 . \alpha_2) = \alpha_1 . \alpha_2 = \varnothing(\beta_1) . \varnothing(\beta_2)$ jadi $\varnothing$ homomorfisma dan jika $\varnothing(\beta_1) = \varnothing(\beta_2)$ maka $\alpha_1 = \alpha_2$ dan $\forall\ \alpha \in F$ maka terdapatlah $\beta \ni \varnothing(\beta) = \alpha$ jadi $\varnothing$ isomorfisma.

Dan untuk $\varnothing(f(\beta))$
$$= \varnothing(a_0\beta^0 + a_1\beta^1 + \ldots + a_n\beta^n)$$
$$= a_0 \varnothing(\beta^0) + a_1 \varnothing(\beta^1) + \ldots + a_n \varnothing(\beta^n)$$
$$= a_0 \alpha^0 + a_1 \alpha^1 + \ldots + a_n \alpha^n$$

Teorema 5. (Raisinghania, M.D, 1980). Lapangan pemisah meerupakan perluasan aljabar.

Bukti :

Pandang F lapangan pemisah dari polinomial f(x) atas lapangan K dan $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ adalah akar –akar dari f(x), maka F dapat ditulis $F = K(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n)$ atau

$$F_1 = K(\alpha_1)$$
$$F_2 = K_1(\alpha_2) = (K(\alpha_1))(\alpha_2) = K(\alpha_1, \alpha_2)$$
$$\vdots$$
$$F_n = K_{n-1}(\alpha_n) = (K(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{n-1}))(\alpha_n) = K(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n) = F.$$

Tetapi setiap elemen-elemen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ merupakan akar-akar polinomial tidak nol f(x) atas lapangan K, jadi $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ merupakan aljabar atas K, maka F merupakan perluasan berhingga dari lapangan K (sebab $[K(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n) : K]$ berhingga).

Jadi (menurut Teorema 2) F merupakan perluasan ajabar.

Contoh :

Misal $f(x) = x^4 - x = x^2 - x \in Z_2[x]$, p = 2, n = 2.

$x^4 - x = x(x - 1)(x^2 + x + 1)$. Ambil $\alpha = x + <x^2 + x + 1>$

Maka 0, 1, α, 1 + α, adalah akar-akar dari $f(x) = x^4 - x$ sehingga $Z_2(\alpha)$ merupakan lapangan pemisah dari $f(x) = x^4 - x$ atas Z_2 yang merupakan suatu perluasan aljabar.

4. KESIMPULAN

1. Setiap perluasan berhingga merupakan perluasan aljabar.
2. Untuk semua lapangan K dan semua $f(x) \in K[x]$ sedemikian sehingga deg (f) ≥ 1, terdapatlah perluasan F dari K yang merupakan lapangan pemisah untuk f(x) atas K.
3. Lapangan pemisah merupakan perluasan aljabar.

DAFTAR PUSTAKA

1. Dean R. A. *Element of Abstract Algebra*, John Wiley & Sons, USA, 1966.

2. Fraleigh, J. B , *A First Course in Abstract Algebra*, Addison – Wesley Publishing Company, USA, 1994.

3. Hungerford, T. W, *Graduete Text in Mathematics Algebra*, Springer Verlag, New York, Heidelberg Berlin, 1984.

4. Raisinghania M. D, Aggarwal R. S, *Modern Algebra*, S Chand & Company Ltd, New Delhi, 1980.