JURNAL MATEMATIKA DAN KOMPUTER
Vol. 4. No. 1, 23 - 32, April 2001, ISSN : 1410-8518

KAJIAN DISKRETISASI DENGAN METODE GALERKIN SEMI DISKRET TERHADAP EFISIENSI SOLUSI MODEL RAMBATAN PANAS TANPA SUKU KONVEKSI

Suhartono dan Solikhin Zaki
Jurusan Matematika FMIPA UNDIP

Abstrak

Penelitian ini bertujuan menyelidiki efek diskretisasi dengan metode Galerkin Semi Diskret terhadap efisiensi solusi model rambatan panas tanpa suku konveksi. Indikator efisiensi yang diukur dalam penelitian ini adalah lama waktu proses komputasi dan lama waktu proses komputasi perlangkah. Sebagai pembanding digunakan metode Beda Hingga. Permasalahan yang diteliti adalah bagaimana mentranformasikan model rambatan panas tanpa suku konveksi kebentuk sistem persamaan diferensial ordiner dengan melakukan diskretisasi pada peubah ruang dengan menggunakan metode Galerkin Semi Diskret. Selanjutnya sistem persamaan diferensial biasa yang diperoleh dari diskretisasi tersebut diintegrasikan dengan menggunakan metode Runge Kutta Implisit Diagonal (RKID). Hasil pengukuran menunjukkan bahwa solusi model rambatan panas tanpa suku konveksi yang diperoleh berdasarkan diskretisasi perubah ruang menggunakan metode Galerkin Semi Diskret kurang efisien jika dibandingkan dengan solusi model rambatan panas tanpa suku konveksi yang diperoleh dengan diskretisasi perubah ruang menggunakan metode Beda Hingga. Hal tersebut dapat ditunjukkan berdasarkan lama waktu proses komputasi dan lama waktu proses komputasi perlangkah.

Kata Kunci : Diskretisasi, Metode Galerkin Semi Diskret, model rambatan panas

1. PENDAHULUAN

Model rambatan panas secara matematis dapat dinyatakan dalam bentuk persamaan diferensial parsial. Model tersebut sering digunakan dalam berbagai disiplin ilmu, misalnya : fisika, kimia, biologi dan lain sebagainya.

Penyelesaian model rambatan panas dapat dilakukan baik secara analitik maupun secara numerik dengan bantuan komputer. Penyelesaian secara analitik sering lebih sulit dari pada penyelesaian secara numerik. Oleh karena itu, penyelesaian model rambatan panas ini dilakukan secara numerik.

Secara numerik, salah satu metode untuk menyelesaian model rambatan panas tanpa suku konveksi yang ingin digunakan dalam kajian ini adalah dengan diskretisasi peubah ruang, yang dilanjutkan dengan integrasi terhadap waktu. Salah satu metode diskretisasi perubah ruang yang digunakan dalam kajian ini adalah metode Galerkin Semi diskret (Mitchell A.R,1985), sedangkan untuk integrasi hasil diskretisasi digunakan metode Runge Kutta Implisit Diagonal (disingkat dengan RKID), dengan perubahan ukuran langkah (*step-size)*. Ukuran langkah adalah panjang langkah yang digunakan oleh suatu program untuk melakukan suatu komputasi.

Permasalahan yang akan diteliti di sini adalah bagaimana mentranformasikan model rambatan panas dalam bentuk persamaan parabolik ke bentuk sistem persamaan diferensial ordiner dengan melakukan diskretisasi peubah ruang dengan metode Galerkin Semi Diskret. Selanjutnya dilakukan pengukuran terhadap indikator efisiensi dengan melakukan integrasi sistem persamaan diferensial ordiner yang diperoleh dari diskretisasi model rambatan panas tanpa suku konveksi menggunakan metode RKID dengan perubahan ukuran langkah.

Tujuan penelitian adalah menyelidiki efek dari diskretisasi dengan metode Galerkin Semi Diskret terhadap efisiensi solusi model rambatan panas tanpa suku konveksi. Indikator efisiensi yang diuji dalam penelitian ini adalah waktu proses (waktu yang digunakan oleh komputer untuk menjalankan suatu program) dan waktu proses perlangkah..

2. LANDASAN TEORI

METODE GALERKIN SEMI DISKRET

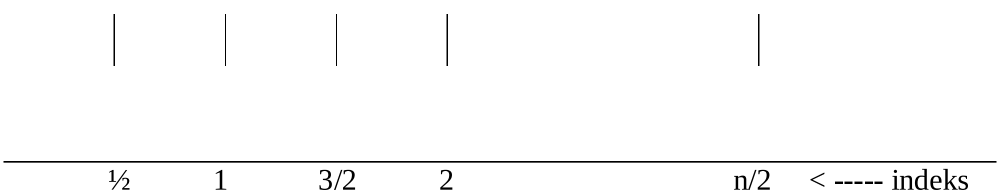
Metode Galerkin Semi Diskret adalah suatu metode diskretisasi peubah ruang dari suatu persamaan diferensial parsial, yang dalam kajian ini berupa persamaan parabolik. Dengan metode Galerkin Semi Diskret maka persamaan parabolik dapat ditransformasikan ke sistem persamaan diferensial biasa. Dalam penelitian ini dikaji salah satu model rambatan panas tanpa suku konveksi yang disajikan dalam bentuk persamaan parabolik. Berikut akan dibahas mengenai diskretisasi model rambatan panas tanpa suku konveksi dengan menggunakan metode Galerkin Semi Diskret:

Pandang model rambatan panas tanpa suku konveksi dalam bentuk:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad \text{.............................(1)}$$

dengan syarat batas**,** Dirichlet (Farlow,1982).

Persamaan (1) terdefinisi pada interval [0,1]. Jika h adalah ukuran langkah ruang yang membagi interval [0,1] menjadi (n+1)/2 sub-interval bagian yang sama dengan h = 2/ (n+1) dan jika setiap sub-interval dibagi 2 dan titik ini diberi indeks tengahan maka dalam interval [0,1] terdapat n titik interior.



Gambar 1: n titik interior dalam interval [0,1] dengan indeks tengahan dan indeks bilangan bulat

Jika U(x,t) adalah pendekatan Galerkin untuk u(x,t), u(x,t) adalah solusi sebenarnya dari model rambatan panas maka U(x,t) dapat ditulis sebagai :

$$U(x,t) = \sum_{i=0}^{n+1} U_i(t) Q_i(x) \qquad \text{.............................(2)}$$

Dengan $Q_i(x)$ merupakan fungsi basis dalam bentuk kuadratik. (Mitchell A.R,1985)

Dari persamaan (1) dan (2) diperoleh:

$$\sum_{i=0}^{n+1} \dot{U}_i (Q_i, Q_j) = \sum_{i=0}^{n+1} U_i \,(Q_i' \, Q_j') \qquad \text{........................(3)}$$

dengan

(Q_i, Q_j) adalah inner product dari Q_i dan Q_j

$Q_j^{'}$ adalah turunan Q_j terhadap perubah x

$\dot{U}_i$ adalah turunan dari U terhadap peubah t.

Jika M dan S adalah matriks yang elemen ke ij nya masing- masing adalah (Q_i, Q_j) dan $(Q_i^{'}, Q_j^{'})$ maka persamaan (3) dapat dinyatakan sebagai

$M\dot{\underline{U}} = S\underline{U} + \underline{b}$ ………………………………………….(4)

dengan

$\dot{\underline{U}} = [\dot{U}_1, \dot{U}_2, \dot{U}_3, \ldots\ldots\ldots, \dot{U}_n]^T$

$\underline{U} = [U_1, U_2, U_3, \ldots\ldots\ldots, U_n]^T$

$\underline{b}$ adalah vektor yang memuat syarat batas

Jika diberikan 3 fungsi basis kuadratik yaitu $Q_1 = X(X-1)/2$, $Q_2 = -X^2 + 1$, $Q_3 = X(X+1)/2$

Maka diperoleh:

$$M = h/30\begin{bmatrix} 16 & 2 & 0 & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 0 \\ 2 & 8 & 2 & -1 & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & 2 & 16 & 2 & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 8 & 16 & 2 & -1 & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & \ldots & \ldots & 0 & 2 & 16 & 2 & 0 \\ 0 & \ldots & \ldots & \ldots & 0 & -1 & 2 & 8 & 2 \\ 0 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 0 & 2 & 16 \end{bmatrix}$$

JURNAL MATEMATIKA DAN KOMPUTER
Vol. 4. No. 1, 23 - 32, April 2001, ISSN : 1410-8518

$$S = 1/3h \begin{bmatrix} -16 & 8 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 8 & -14 & 8 & -1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 8 & -16 & 8 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 8 & -14 & 8 & -1 & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & -1 & 8 & -14 & 8 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & 8 & -16 \end{bmatrix}$$

METODE RUNGE KUTTA IMPLISIT DIAGONAL

Persamaan (4) yang merupakan sistem persamaan diferensial ordiner dapat diselesaikan dengan RKID yang memiliki notasi Butcher berikut:

½	½			
1	0	1		
½	3/2	-3/2	½	
0	-3	2	0	
	1/6	1/3	1/6	1/3

Dengan perhitungan :

$$k_i = f(t + c_i h, u + \mathrm{h}\sum_{j=1}^{i} a_{ij} k_j)$$

Untuk mencari solusi

$$U_{m+1} = U_m + h\sum_{i=1}^{4} b_i k_i$$

U_{m+1} adalah solusi pada t ke m+1 (Conte SD,1980)

Untuk menyelesaikan persamaan (4) dapat digunakan algoritma berikut:

1. Inisialisasi
2. Panggil RKID 4 tahap untuk mendapatkan solusi dengan langkah h , namakan U_1

3. Panggil RKID 4 tahap untuk mendapatkan solusi dengan langkah h/2, namakan U_2
4. Jika $||\ U_1 - U_2\ ||$ > tol

   Jika h > 2* h_{min} maka $h_{baru} = h_{lama} / 2$

   Kembali ke langkah 2 dengan h_{baru} sampai t tertentu tercapai

   Jika h < 2* h_{min} maka program dihentikan
5. Jika $||\ U_1 - U_2\ ||$ > tolmin

   Jika 2* h< h_{min} maka $h_{baru} = h_{lama} * 2$

   Kembali ke langkah 2 dengan h_{baru} sampai t tertentu tercapai
6. Jika tolmin < $||\ U_1 - U_2\ ||$ < tol , maka kembali ke langkah 2 dengan h_{baru} = h_{lama} sampai t tertentu tercapai.
7. Stop jika t_{akhir} tercapai

Algoritma tersebut diatas diimplementasikan menggunakan perangkat lunak

Matlab dan perangkat keras pentium 166 mmx.

3. HASIL PENGUKURAN DAN PEMBAHASAN

Dalam penelitian ini dikaji efisiensi solusi model rambatan panas tanpa suku konveksi, yang diperoleh dengan melakukan integrasi sistem persamaan diferensisl ordiner yang diperoleh dari diskretisasi perubah ruang metode Galerkin Semi Diskret terhadap model rambatan panas tanpa suku konveksi, dengan syarat awal U(x,0) = exp(x/$\sqrt{6}$) dan syarat batas Dirichlet , yaitu:

$$u(0,t) = \exp(t/6)$$
$$u(1,t) = \exp(t/6 + 1/\sqrt{6})$$

Efisiensi solusi model rambatan panas yang diperoleh berdasarkan diskretisasi perubah ruang dengan Metode Galerkin Semi Diskret dapat ditunjukkan dengan memperbandingkan antara hasil pengukuran yang diperoleh berdasarkan diskretisasi dengan metode Galerkin Semi Diskret terhadap hasil yang diperoleh berdasarkan diskretisasi dengan metode Beda Hingga.

Pengukuran dilakukan dengan mengambil banyak diskretisasi yaitu n= 39 dengan toleransi $10^{-6.}$ Pengamatan dilakukan pada t = 1,2,3, …,7. Hasil pengukuran dapat ditunjukkan pada tabel 1 dan tabel 2 berikut:

Tabel 1: Hasil pengukuran untuk n=39 dan tol 10^{-6} pada t =1, 2, 3, …., 7
Dengan J adalah banyak langkah yang diterima oleh program,
t = panjang langkah yang harus dilakukan oleh program.

t_{satuan}	$h_{maksimum}$		$H_{minimum}$	
	$h_{maksimum}$ / J (dalam %)		$h_{minimum/J}$ (dalam %)	
	Galerkin	Beda Hingga	Galerkin	Beda Hingga
1	0,0269 7.68	0,0269 7.68	0,0135 0,21	0,0135 0,21
2	0,0269 7.68	0,0269 7.68	0,0135 15,56	0,0135 15,56
3	0,0269 7.68	0,0269 7.68	0,0135 30,91	0,0135 30,91
4	0,0269 7.68	0,0269 7.68	0,0135 46,27	0,0135 46,27
5	0,0269 7.68	0,0269 7.68	0,0135 61,62	0,0135 61,62
6	0,0269 7.68	0,0269 7.68	0,0135 76,97	0,0135 76,97
7	0,0269 7.68	0,0269 7.68	0,0135 92,32	0,0135 92,32

Hasil pengukuran data pada tabel 1 menunjukkann bahwa :

- Ukuran langkah maksimum dan ratio $h_{maksimum}$ terhadap banyak langkah yang diterima oleh program untuk menyelesaikan model rambatan panas tanpa suku konveksi menunjukkan tidak ada beda nyata (atau mempunyai langkah yang sama) dalam setiap langkahnya dari t = 1,2,3,4,…,7 baik dilakukan dengan menggunakan metode Beda Hingga maupun menggunakan metode

Galerkin Semi Diskret. Dari tabel terlihat bahwa $h_{maksimum}$ yang digunakan selalu tetap.

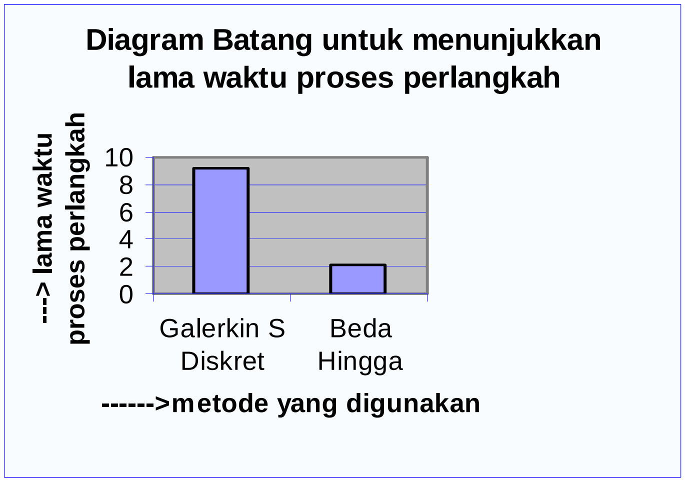
- ♦ Untuk $h_{minimum}$ yang dipergunakan untuk menyelesaikan model rambatan panas tanpa suku konveksi menunjukkan tidak ada beda nyata (atau mempunyai langkah yang sama) dalam setiap langkahnya dari t = 1,2,3,4,…,7 baik dilakukan dengan menggunakan metode Beda Hingga maupun menggunakan metode Galerkin Semi Diskret.
- ♦ Ratio $h_{minimum}$ terhadap jumlah langkah yang diterima menunjukkan makin bertambah untuk setiap pertambahan t, baik menggunakan metode Galerkin Semi Diskret maupun metode Beda Hingga.
- ♦ Pada tabel 2 dapat ditunjukkan mengenai hasil pengukuran yang dilakukan terhadap banyak langkah yang diterima, banyak langkah yang ditolak serta waktu proses (running time)

Tabel 2: hasil pengukuran banyak langkah yang diterima, banyak langkah yang ditolak serta waktu proses

Banyak diskretisasi	Metode yang digunakan	Banyak langkah yang diterima	Banyak langkah yang ditolak	Waktu proses (dalam detik)
39	Galerkin Semi Diskret	482	4	4450
	Beda Hingga	482	4	1015

Waktu proses yang digunakan untuk menyelesaikan model rambatan panas tanpa suku konveksi dilakukan dengan metode Galerkin Semi Diskret dan metode Beda Hingga menunjukkan beda yang cukup nyata. Dari tabel 2 terlihat bahwa solusi rambatan panas tanpa suku konveksi yang diperoleh akibat diskretisasi dengan menggunakan metode Galerkin Semi Diskret kurang efisien jika dibandingkan dengan menggunakan metode Beda Hingga

Selanjutnya untuk menguji Efek efisiensi dari solusi model rambatan panas tanpa suku konveksi juga dapat dikaji menggunakan waktu proses perlangkah yang disajikan pada gambar 1 berikut :



Gambar 1: Diagram batang untuk lama waktu proses perlangkah.

Dari gambar dapat ditunjukkan bahwa lama waktu proses perlangkah menggunakan diskretisasi metode Galerkin Semi Diskret lebih besar (dengan perbandingan 9,16 : 2,09) dari pada waktu proses perlangkah menggunakan diskretisasi metode beda hingga. Lama waktu proses perlangkah diperoleh dari lama waktu proses dibagi dengan banyaknya langkah yang digunakan untuk menyelesaikan program. Dengan demikian dapat dikatakan bahwa solusi rambatan panas tanpa suku konveksi dengan diskretisasi peubah ruang menggunakan metode Galerkin Semi Diskret kurang efisien, jika dibandingkan dengan menggunakan diskretisasi peubah ruang metode Beda Hingga.

4. KESIMPULAN

Dari hasil pengukuran dan pembahasan dapat disimpulkan bahwa solusi model rambatan panas tanpa suku konveksi yang diperoleh berdasarkan diskretisasi perubah ruang menggunakan metode Galerkin Semi Diskret kurang efisien jika dibandingkan dengan solusi model rambatan panas tanpa suku konveksi yang diperoleh dengan diskretisasi perubah ruang menggunakan metode Beda Hingga. Hal tersebut dapat ditunjukkan berdasarkan waktu proses dan waktu proses perlangkah.

DAFTAR PUSTAKA

1. Conte S. D, Carl D. B, *Elementary Numerical Analysis*, Third edition, Mc Graw–Hill, 1980.

2. Farlow S J, *Partial Differential Equations*, John Wiley & Sons, New York,1982.

3. Mitchell A.R, Griffiths DF, *The Finite Difference Methods in Partial Differential Equation,* John Wiley and Sons, New York, 1985.