

**PENDEKATAN REGRESI POLINOMIAL ORTHOGONAL
PADA RANCANGAN DUA FAKTOR
(DENGAN APLIKASI SAS DAN MINITAB)**

Tatik Widiharih

Jurusan Matematika FMIPA UNDIP

Abstrak

Pendekatan regresi polinomial orthogonal dapat dilakukan pada rancangan dengan faktor kuantitatif dan jarak antar taraf faktor sama. Pendekatan ini dilakukan bila peneliti ingin menentukan taraf faktor dari masing-masing faktor yang mengoptimalkan respon yang diamati. Penentuan derajat polinomial berdasarkan kontras-kontras orthogonal yang nyata (significant) dari masing-masing faktor, kemudian dapat ditemukan bentuk regresi pendekatannya. Persamaan yang diperoleh merupakan fungsi matematika dengan dua peubah. Dengan menggunakan hitung differensial dapat ditentukan titik ekstrem dari fungsi tersebut. Bila dikembalikan ke bentuk rancangan berarti dapat ditentukan taraf faktor dari masing-masing faktor yang mengoptimalkan respon yang diamati.

Kata kunci : faktor kuantitatif, respon, polinomial orthogonal, kontras orthogonal.

1. PENDAHULUAN

Rancangan dua faktor pada tulisan ini dibatasi pada rancangan dengan kedua faktor kuantitatif, jarak antar taraf faktor sama, ulangan sama dan model yang dipilih adalah model tetap (fixed model). Pendekatan regresi polinomial orthogonal ini dapat diterapkan dalam percobaan faktorial, split – plot maupun split – blok.

Setelah menentukan rancangan yang dipilih, dan berdasarkan data pengamatan (respon), pertama tama disusun tabel analisa variansnya (tabel anova). Dari tabel anova tersebut akan terlihat faktor-faktor mana yang nyata (significant) yang mempengaruhi respon yang diamati. [1, 2, 3]. Jumlah kuadrat faktor utama (yang nyata / significant) dapat dipecah menjadi jumlah kuadrat kontras-kontras yang saling orthogonal yang berderajat bebas 1. Banyaknya

kontras orthogonal yang dapat dibentuk sebanyak taraf faktornya dikurangi satu. Koefisien dari kontras-kontras orthogonal ditentukan berdasarkan tabel koefisien polinomial orthogonal (lampiran 1). Melalui uji kontras dapat ditentukan derajat polinomial dari faktor utama. Untuk faktor interaksi, kontras-kontras orthogonalnya ditentukan melalui kontras-kontras dari faktor utama (seolah – olah seperti perkalian bilangan riil biasa). Jumlah kuadrat faktor interaksi dapat dipecah menjadi jumlah kuadrat kontras-kontras orthogonal yang berderajat bebas 1. Banyaknya kontras ortogonal yang dapat dibentuk sebanyak perkalian antara banyaknya kontras orthogonal dari faktor ke 1 dengan faktor ke 2. Dengan melalui uji kontras dapat ditentukan bentuk interaksi dan derajat dari polinomialnya [2]. Dengan menggabungkan polinomial dari faktor utama dan faktor interaksi akan diperoleh pendekatan regresi polinomial orthogonal.

Bentuk persamaan regresi yang diperoleh merupakan bentuk fungsi matematika dengan dua peubah, sehingga dengan menggunakan pendekatan hitung differensial dapat ditentukan titik-titik yang mengoptimalkan fungsi tersebut (dengan kata lain dapat ditentukan taraf faktor dari masing-masing faktor yang mengoptimalkan respon yang diamati). Dalam tulisan ini penentuan kondisi optimum ini dilakukan dengan paket program Maple 6.

Berdasarkan uraian tersebut diatas maka tujuan penulisan dari makalah ini adalah menentukan kontras-kontras orthogonal yang nyata baik untuk faktor utama maupun faktor interaksi sehingga dapat ditentukan bentuk umum dari pendekatan polinomial orthogonalnya dengan menggunakan program SAS. Berdasarkan bentuk yang diperoleh pendekatan persamaan regresi polinomial dilakukan dengan program MINITAB. Penentuan taraf faktor dari masing-masing faktor yang mengoptimalkan respon dilakukan dengan paket program MAPLE 6. Sebagai contoh kasus dalam tulisan ini dipilih percobaan faktorial dengan rancangan dasar rancangan acak kelompok. Faktor pertama (A) mempunyai 5 buah taraf faktor, faktor kedua (B) mempunyai 3 buah taraf faktor dan percobaan dilakukan pada 3 kelompok yang berbeda.

2. DISKRIPSI TEORITIS

Percobaan faktorial dengan rancangan dasar rancangan acak kelompok, faktor A mempunyai 5 buah taraf faktor, faktor B mempunyai 3 buah taraf faktor dan percobaan dilakukan pada 3 kelompok yang berbeda mempunyai model linier :

$$Y_{ijk} = \mu + \kappa_k + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij} + \epsilon_{ijk} \quad i = 1,2,\dots,5; j = 1,2,3; k = 1,2,3 \dots\dots\dots(2.1)$$

Dengan :

Y_{ijk} : observasi pada taraf ke i faktor A , taraf ke j faktor B dan kelompok ke k

μ : rata-rata umum

κ_k : pengaruh kelompok ke k

α_i : pengaruh taraf ke i faktor A

β_j : pengaruh taraf ke j faktor B

$(\alpha\beta)_{ij}$: pengaruh interaksi taraf ke i faktor A dan taraf ke j faktor B

ϵ_{ijk} : pengaruh galat percobaan.

Digunakan model tetap dengan asumsi :

$$\sum_i \alpha_i = 0 \quad ; \quad \sum_j \beta_j = 0 \quad ; \quad \sum_i (\alpha\beta)_{ij} = \sum_j (\alpha\beta)_{ij} = 0$$

ϵ_{ijk} menyebar normal dengan rata-rata 0 dan variansi σ_ϵ .

Data pengamatan dapat disajikan sebagai berikut :

FAKTOR A	FAKTOR B	KELOMPOK		
		1	2	3
A ₁	B ₁	Y ₁₁₁	Y ₁₁₂	Y ₁₁₃
	B ₂	Y ₁₂₁	Y ₁₂₂	Y ₁₂₃
	B ₃	Y ₁₃₁	Y ₁₃₂	Y ₁₃₃
....
A ₅	B ₁	Y ₅₁₁	Y ₅₁₂	Y ₅₁₃
	B ₂	Y ₅₂₁	Y ₅₂₂	Y ₅₂₃
	B ₃	Y ₅₃₁	Y ₅₃₂	Y ₅₃₃

Hipotesa yang dapat diambil adalah :

1. $H_0 : \kappa_k = 0; \forall k=1,2,3;$ (tidak ada pengaruh kelompok terhadap respon yang diamati)
 H_1 : paling sedikit ada satu k dengan $\kappa_k \neq 0$; (ada pengaruh kelompok terhadap respon yang diamati)
2. $H_0 : \alpha_i = 0 \quad ; \quad \forall i = 1,2,3,4,5;$ (tidak ada pengaruh taraf ke i faktor A terhadap

respon yang diamati)

H_1 : paling sedikit ada satu i dengan $\alpha_i \neq 0$; (ada pengaruh taraf ke i faktor A terhadap respon yang diamati)

3. H_0 : $\beta_j = 0$; $\forall j = 1,2,3$; (tidak ada pengaruh taraf ke j faktor B terhadap respon yang diamati)

H_1 : paling sedikit ada satu j dengan $\beta_j \neq 0$; (ada pengaruh taraf ke j faktor B terhadap respon yang diamati)

4. H_0 : $(\alpha\beta)_{ij} = 0$; $\forall i \& j$ (tidak ada pengaruh interaksi taraf ke i faktor A dan taraf ke j faktor B terhadap respon yang diamati)

H_1 : paling sedikit ada sepasang (i, j) dengan $(\alpha\beta)_{ij} \neq 0$; (ada pengaruh taraf ke i faktor A terhadap respon yang diamati)

Perhitungan-perhitungan :

Derajat bebas total = 44. Derajat bebas kelompok = 2. Derajat bebas faktor A = 4

Derajat bebas faktor B = 2. Derajat bebas interaksi AB = 8. Derajat bebas galat =

28. Kuadrat Tengah (KT) = Jumlah Kuadrat (JK) dibagi derajat bebasnya.

Adapun rumus-rumus yang diperlukan untuk menghitung Jumlah Kuadrat (JK) adalah :

$$FK = \frac{Y_{...}^2}{5 \times 3 \times 3} \dots \text{dengan } Y_{...} = \sum_{i,j,k} Y_{ijk}$$

$$JKT = \sum_{i,j,k} Y_{ijk}^2 - FK$$

$$JKK = \sum_k \frac{Y_{..k}^2}{5 \times 3} - FK \dots \text{dengan } Y_{..k} = \sum_{i,j} Y_{ijk}$$

$$JKA = \sum_i \frac{Y_{i..}^2}{3 \times 3} - FK \dots \text{dengan } Y_{i..} = \sum_{j,k} Y_{ijk}$$

$$JKB = \sum_j \frac{Y_{.j.}^2}{5 \times 3} - FK \dots \text{dengan } Y_{.j.} = \sum_{i,k} Y_{ijk}$$

$$JKAB = \sum_{i,j} \frac{Y_{ij.}^2}{3} - FK - JKA - JKB \dots \text{dengan } Y_{ij.} = \sum_k Y_{ijk}$$

$$JKG = JKT - JKK - JKA - JKB - JKAB$$

Berdasarkan perhitungan-perhitungan tersebut dapat disusun tabel ANOVA sebagai berikut :

Tabel 1. Tabel Anova.

Sumber Variasi	Derajat Bebas	JK	KT	F _{hitung}	F _{tabel}
Kelompok	2	JKK	KTK	KTK/KTG	F _{2;28;(α)}
A	4	JKA	KTA	KTA/KTG	F _{2;28;(α)}
B	2	JKB	KTB	KTB/KTG	F _{4;28;(α)}
AB	8	JKAB	KTAB	KTAB/KTG	F _{8;28;(α)}
Galat	28	JKG	KTG		
Total	44	JKT			

Kriteria uji : tolak H₀ jika F_{hitung} > F_{tabel}.

Berdasarkan tabel 1 tersebut dapat ditentukan faktor mana saja yang nyata (significant) yang mempengaruhi respon yang diamati. Faktor yang nyata tersebut kemudian dilakukan uji kontras orthogonal untuk menentukan regresi polinomial orthogonal pendekatannya.

Bila faktor A nyata, maka dapat dibentuk 4 buah kontras arthogonal yaitu Linier (A_L), Kuadratik (A_K), Qubic (A_C), dan Quartik (A_Q). Koeffisien dari kontras-kontras dapat ditentukan berdasarkan tabel koeffisien polinomial orthogonal (Lampiran 1). Jumlah kuadrat faktor A (JKA) dapat dipecah menjadi JKA_L , JKA_K , JKA_C DAN JKA_Q yang masing-masing berderajat bebas satu dan dicari dengan cara sebagai berikut :

Total taraf faktor A	Koeffisien kontras orthogonal			
	Linier	Kuadratik	Qubic	Quartik
Y _{1..}	-2	2	-1	1
Y _{2..}	-1	-1	2	-4
Y _{3..}	0	-2	0	6
Y _{4..}	1	-1	-2	-4
Y _{5..}	2	2	1	1
Effect : $\sum C_i \cdot Y_{i..}$	EA _L	EA _K	EA _C	EA _Q
JK= (effect) ² / (b.n. $\sum C_i^2$)	(EA _L) ² /(3x3x10)	(EA _K) ² /(3x3x14)	(EA _C) ² /(3x3x10)	(EA _Q) ² /(3x3x70)

Bila faktor B nyata, maka dapat dibentuk dua buah kontras rothogonal yaitu Linier (B_L) dan Kuadratik (B_K). Jumlah kuadrat faktor B (JKB) dapat

dipecah menjadi JK_{B_L} dan JK_{B_K} yang masing-masing berderajat bebas satu, dan dicari dengan cara sebagai berikut :

Total taraf faktor B	Koeffisien kontras orthogonal	
	Linier	Kuadratik
Y _{.1.}	-1	1
Y _{.2.}	0	-2
Y _{.3.}	1	1
Effect : $\sum C_j \cdot Y_{.j}$	EB _L	EB _K
JK= (effect) ² / (a.n. $\sum C_j^2$)	(EB _L) ² / (5x3x2)	(EB _K) ² / (5x3x6)

Bila faktor interaksi AB nyata , maka dapat dibentuk 8 buah kontras orthogonal yaitu : $A_L B_L$, $A_K B_L$, $A_C B_L$, $A_Q B_L$, $A_L B_K$, $A_K B_K$, $A_C B_K$ dan $A_Q B_K$. Jumlah kuadrat interaksi AB (JKAB) dipecah menjadi : $JK(A_L B_L)$, $JK(A_K B_L)$, $JK(A_C B_L)$, $JK(A_Q B_L)$, $JK(A_L B_K)$, $JK(A_K B_K)$, $JK(A_C B_K)$ dan $JK(A_Q B_K)$ yang masing-masing berderajat bebas satu. Penentuan jumlah kuadrat kontras ini kontras faktor utama A dan B, dalam hal ini diberikan salah satu ilustrasi kontras dari interaksi tersebut dan yang lain ditentukan secara analog , misalnya di sini akan menentukan $JK(A_L B_L)$ sebagai berikut :

A _L	B _L		
	-1	0	1
-2	2	0	-2
-1	1	0	-1
0	0	0	0
1	-1	0	1
2	-2	0	2

$$A_L B_L = \sum C_{ij} \cdot Y_{ij}$$

$$= (2) \times Y_{11} + (0) \times Y_{12} + (-2) \times Y_{13} + (1) \times Y_{21} + (0) \times Y_{22} + (-1) \times Y_{23} + (0) \times Y_{31} + (0) \times Y_{32} + (0) \times Y_{33} + (-1) \times Y_{41} + (0) \times Y_{42} + (1) \times Y_{43} + (-2) \times Y_{51} + (0) \times Y_{52} + (2) \times Y_{53}$$

$$JK(A_L B_L) = (A_L B_L)^2 / (n \times \sum C_{ij}^2) = (A_L B_L)^2 / (3 \times (2^2 + 0^2 + \dots + 2^2)) = (A_L B_L)^2 / (3 \times 20)$$

Tabel 1 dapat disusun kembali menjadi tabel 2 berikut :

Tabel 2. Tabel Anova

Sumber Variasi	Der. Bebas	JK	KT	F _{HITUNG}	F _{TABEL}
Kelompok	2	JKK			F _{1;28;(α)}
A	(4)	(JKA)			
A _L	1	JKA _L	KTA _L	KTA _L /KTG	
A _K	1	JKA _K	KTA _K	KTA _K /KTG	
A _C	1	JKA _C	KTA _C	KTA _C /KTG	
A _Q	1	JKA _Q	KTA _Q	KTA _Q /KTG	
B	(2)	(JKB)			
B _L	1	JKB _L	KT _B _L	KT _B _L /KTG	
B _K	1	JKB _K	KT _B _K	KT _B _K /KTG	
AB	(8)	(JKAB)			
A _L B _L	1	JKA _L B _L	KTA _L B _L	KTA _L B _L /KT	
A _K B _L	1	JKA _K B _L	KTA _K B _L	G	
A _C B _L	1	JKA _C B _L	KTA _C B _L	KTA _K B _L /KT	
A _Q B _L	1	JKA _Q B _L	KTA _Q B _L	G	
A _L B _K	1	JKA _L B _K	KTA _L B _K	KTA _C B _L /KT	
A _K B _K	1	JKA _K B _K	KTA _K B _K	G	
A _C B _K	1	JKA _C B _K	KTA _C B _K	KTA _Q B _L /KT	
A _Q B _K	1	JKA _Q B _K	KTA _Q B _K	G	
Galat	28	JKG	KTG	KTA _L B _K /KT G KTA _K B _K /K TG KTA _C B _K /KT G KTA _Q B _K /K TG	
Total	44	JKT			

Dari tabel 2 tersebut dapat ditentukan bentuk dan derajat polinomial orthogonal berdasarkan kontras-kontras yang nyata. Bentuk umum polinomial orthogonal dengan menotasikan A sebagai X₁ dan B sebagai X₂ adalah sebagai berikut :

$$\begin{aligned} \hat{Y} = & \hat{\alpha}_0 + \hat{\alpha}_{10}P_1(X_1) + \hat{\alpha}_{20}P_2(X_1) + \hat{\alpha}_{30}P_3(X_1) + \hat{\alpha}_{40}P_4(X_1) \\ & + \hat{\alpha}_{01}P_1(X_2) + \hat{\alpha}_{02}P_2(X_2) + \hat{\alpha}_{11}P_1(X_1)P_1(X_2) + \hat{\alpha}_{21}P_2(X_1)P_1(X_2) \\ & + \hat{\alpha}_{31}P_3(X_1)P_1(X_2) + \hat{\alpha}_{41}P_4(X_1)P_1(X_2) + \hat{\alpha}_{12}P_1(X_1)P_2(X_2) \\ & + \hat{\alpha}_{22}P_2(X_1)P_2(X_2) + \hat{\alpha}_{32}P_3(X_1)P_2(X_2) + \hat{\alpha}_{42}P_4(X_1)P_2(X_2) \end{aligned}$$

$$\text{Dengan: } \hat{\alpha}_{ij} = \frac{\sum_{i,j} Y_{ij} P_i(X_{1i}) P_j(X_{2j})}{\sum_{i,j} [P_i(X_{1i}) P_j(X_{2j})]^2}$$

$$P_0(X) = 1$$

$$P_1(X) = \lambda_1 \left[\frac{X - \bar{X}}{d} \right]$$

$$P_2(X) = \lambda_2 \left[\left(\frac{X - \bar{X}}{d} \right)^2 - \left(\frac{a^2 - 1}{12} \right) \right]$$

$$P_3(X) = \lambda_3 \left[\left(\frac{X - \bar{X}}{d} \right)^3 - \left(\frac{X - \bar{X}}{d} \right) \left(\frac{3a^2 - 7}{20} \right) \right]$$

$$P_4(X) = \lambda_4 \left[\left(\frac{X - \bar{X}}{d} \right)^4 - \left(\frac{X - \bar{X}}{d} \right)^2 \left(\frac{3a^2 - 13}{14} \right) + \frac{3(a^2 - 1)(a^2 - 9)}{560} \right]$$

Dalam hal ini : a = banyaknya taraf faktor

d = jarak antar taraf faktor

λ_i = ditentukan dalam tabel (lampiran 1).

3. CONTOH KASUS DENGAN APLIKASI SAS DAN MINITAB .

Suatu penelitian dilakukan untuk mengetahui pengaruh kadar pemupukan Nitrogen (N) dengan taraf faktor 20 ; 40 ; 60 ; 80 dan 100 kg/ha dan kadar P₂O₅ dengan taraf faktor 40 ; 60 dan 80 kg/ha terhadap produksi serat kenaf Hc 48 dikonversikan dalam ton/ha. Percobaan dilakukan pada tiga kelompok yang berbeda [3], diperoleh data sebagai berikut :

Kadar N	Kadar P	Kelompok		
		1	2	3
20	40	2.10	2.25	1.95
40	40	2.55	2.75	2.50
60	40	3.20	3.15	3.00
80	40	3.50	3.65	3.50
100	40	3.00	3.10	3.05
20	60	2.25	2.30	2.00
40	60	2.60	2.65	2.55
60	60	3.50	3.60	3.65
80	60	3.80	3.90	3.85
100	60	3.25	3.30	3.27
20	80	2.30	2.15	2.28
40	80	2.65	2.75	2.77
60	80	3.50	3.55	3.60
80	80	3.90	3.85	3.80
100	80	3.20	3.35	3.22

Dengan menggunakan paket program SAS 6.12 diperoleh, F hitung untuk kadar N adalah 555.92, kadar P adalah 41.17 dan interaksi kadar N*P adalah 4.23. Bila diambil $\alpha=1\%$, dapat disimpulkan :

- Ada pengaruh Kadar pemupukan N terhadap respon yang diamati.
- Ada pengaruh Kadar pemupukan P terhadap respon yang diamati
- Ada pengaruh interaksi antara kadar pemupukan N dan P terhadap respon yang diamati.

Berdasar uji kontras dengan taraf nyata 1% terlihat bahwa N linier, kuadratik, qubic nyata, P linier dan kuadratik nyata, untuk faktor interaksi tidak ada yang nyata, dengan paket program minitab 11.12 diperoleh persamaan regresi pendekatannya adalah :

$$\text{Serat} = 1.38 - 0.0490 N + 0.00181 N^2 - 0.000012 N^3 + \\ 0.0342 P - 0.000235 P^2$$

Dari persamaan regresi tersebut dengan menggunakan hitung differensial diperoleh bahwa $N = 84.4306$ dan $P = 72.7659$ merupakan ekstrem maksimum, dengan dugaan serat pada titik tersebut adalah 4.1674.

DAFTAR PUSTAKA

1. Mattjik, A. A, Ir.MSc.Ph.D dan Sumertajaya, I. M, Ir. Msi, *Perancangan Percobaan Dengan Aplikasi SAS dan Minitab*, Jilid 1, IPB Press Bogor. 2000.
2. Montgomery, D.C, *Design And Analysis of Experiments*, Third Edition, John Wiley and Sons Inc, Singapura, 1991.
3. Sastrosupadi, A.Dr.Ir.MS, *Rancangan Percobaan Praktis Bidang Pertanian*, Edisi Revisi, Penerbit Kanisius, Yogyakarta , 2000.
4. *SAS / STAT User's Guide*, Version 6, Fourth Edition, SAS Institute Inc. Cary, NC, USA, 1990, Vol. 1.

LAMPIRAN 1. KOEFISIEN DARI POLINOMIAL ORTHOGONAL

X _j	N = 3		N = 4			N = 5			
	P ₁	P ₂	P ₁	P ₂	P ₃	P ₁	P ₂	P ₃	P ₄
1	-1	1	-3	1	-1	-2	2	-1	1
2	0	-2	-1	-1	3	-1	-1	2	-4
3	1	1	1	-1	-3	0	-2	0	6
4			3	1	1	1	-1	-2	-4
5						2	2	1	1
$\Sigma\{P_i(X_j)\}^2$	2	6	20	4	20	10	14	10	70
λ	1	3	2	1	10/3	1	1	5/6	35/12

X _j	N = 6					N = 7					
	P ₁	P ₂	P ₃	P ₄	P ₅	P ₁	P ₂	P ₃	P ₄	P ₅	P ₆
1	-5	5	-5	1	-1	-3	5	-1	3	-1	1
2	-3	-1	7	-3	5	-2	0	1	-7	4	-6
3	-1	-4	4	2	-10	-1	-3	1	1	-5	15
4	1	-4	-4	2	10	0	-4	0	6	0	-20
5	3	-1	-7	-3	-5	1	-3	-1	1	5	15
6	5	5	5	1	1	2	0	-1	-7	-4	-6
7						3	5	1	3	1	1
$\Sigma\{P_i(X_j)\}^2$	70	84	180	28	252	28	84	6	154	84	924
λ	2	3/2	5/3	7/12	27/10	1	1	1/6	7/12	7/20	27/60