

# Makalah Seminar Tugas Akhir

## Simulasi Penapisan *Kalman* Dengan Kendala Persamaan Keadaan Pada Kasus Penelusuran Posisi Kendaraan (*Vehicle Tracking Problem*)

Iput Kasiyanto<sup>[1]</sup>, Budi Setiyono, S.T, M.T<sup>[2]</sup>, Darjat, S.T, M.T<sup>[2]</sup>

Jurusan Teknik Elektro, Fakultas Teknik, Universitas Diponegoro  
Jln. Prof. Sudharto, Tembalang, Semarang, Indonesia

*Abstrak-Penapisan merupakan hal yang sangat dibutuhkan dalam banyak situasi, terutama di bidang teknik dan sistem tertanam. Tapis Kalman adalah tapis optimum yang sangat terkenal. Selain sebagai tapis, tapis Kalman juga merupakan estimator yang sangat efektif dalam mengestimasi state(keadaan) dinamika sistem yang kompleks, khususnya sistem yang melibatkan derau proses maupun derau pengukuran berupa white noise. Ada tiga pendekatan yang bisa digunakan dalam mencari estimasi state berkendala, yaitu metode peluang maksimum, metode rata-rata kuadrat, dan metode proyeksi. Dalam Tugas Akhir ini dibangun sebuah metode analitik yang berusaha memasukkan kendala persamaan state ke dalam struktur tapis Kalman pada kasus penelusuran posisi kendaraan (vehicle tracking problem). Kendala state yang digunakan pada Tugas Akhir ini merupakan kendala linear dengan parameter konstan. Dari hasil pengujian diperoleh bahwa kinerja tapis berkendala selalu lebih baik daripada tapis tanpa kendala, kecuali untuk kasus kondisi buruk dan kasus sudut arah kendaraan  $\theta = 0^\circ$ .*

**Kata Kunci :** Tapis Kalman, kendala state, estimasi

### I. PENDAHULUAN

Penapisan merupakan hal yang sangat dibutuhkan dalam banyak situasi, terutama di bidang teknik dan sistem tertanam[2]. Dalam dunia nyata seringkali informasi yang diinginkan ternyata terkorupsi oleh derau. Oleh karenanya, penapisan yang optimum menjadi kebutuhan yang sangat penting, terlebih lagi pada aplikasi yang membutuhkan ketelitian dan akurasi data yang tinggi, misalnya pada bidang penjelajahan ruang angkasa.

Tapis *Kalman* merupakan tapis optimum yang sangat terkenal dan sudah mengalami banyak sekali pengembangan sejak dikenalkan oleh *Rudolf E. Kalman* pada tahun 1960. Tapis ini memiliki banyak kelebihan dibandingkan tapis optimum yang lain. Meskipun pada awalnya tapis ini diaplikasikan pada proyek penjelajahan ruang angkasa, tepatnya pada sistem navigasi pesawat *Apollo* yang merupakan proyek *NASA*, namun tapis *Kalman* telah banyak diaplikasikan pada bidang industri maupun bidang lainnya.

Selain sebagai tapis, tapis *Kalman* juga merupakan *estimator* yang sangat efektif dalam mengestimasi *state*(keadaan) dinamika sistem yang kompleks, khususnya sistem yang melibat-

kan derau proses maupun derau pengukuran berupa *white noise*. Misalnya, pada estimasi kesehatan mesin *turbofan* pesawat udara. Pada aplikasi tapis *Kalman* seringkali diketahui ada informasi sinyal atau model yang diabaikan maupun yang dihi-langkan. Sebagai contoh, kendala pada nilai *state*, yang bisa saja berupa besaran fisis, seringkali diabaikan karena tidak sesuai dengan struktur tapis *Kalman*.

Tujuan utama dari Tugas Akhir ini adalah mengembangkan sebuah metode analitik yang memasukkan kendala persamaan *state* ke dalam struktur tapis *Kalman* pada studi kasus penelusuran posisi kendaraan (*vehicle tracking problem*). Upaya ini dilakukan dengan harapan kinerja tapis nantinya lebih baik dari pada kinerja tapis tanpa kendala. Tugas Akhir ini juga membandingkan kinerja tapis untuk kasus berkendala, tanpa kendala maupun pengukuran sempurna. RMS eror estimasi *state* dan rata – rata eror kendala digunakan sebagai parameter kualitas kinerja tapis. Semakin kecil nilai RMS eror estimasi dan rata – rata eror kendalanya, semakin baik kualitas kinerja tapis. Pada Tugas Akhir ini tidak dibahas prinsip kerja *transponder*.

### II. TAPIS KALMAN

#### 2.1 Deskripsi Model Sistem

Sistem yang ditinjau dianggap merupakan sistem diskret dinamik linear yang terkorupsi oleh derau *white Gaussian*. Jika tapis *Kalman* ingin digunakan untuk mengestimasi *state* sebuah sistem, maka sistem tersebut harus dimodelkan sesuai kerangka tapis *Kalman*, yang dinyatakan dalam persamaan *state* berikut:

$$x_k = F_k x_{k-1} + B_k u_{k-1} + w_{k-1} \dots \dots \dots (2.1)$$
$$w_k \sim N(0, Q_k)$$

dan persamaan pengukuran berikut:

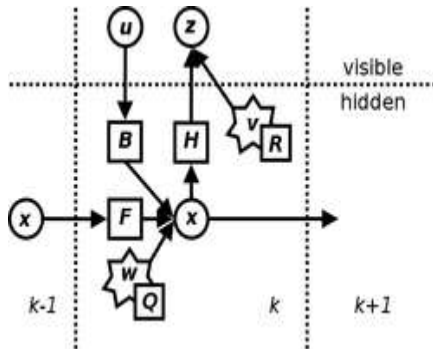
$$z_k = H_k x_k + v_k \dots \dots \dots (2.2)$$
$$v_k \sim N(0, Q_k)$$

dengan  $x_k$  adalah vektor *state*,  $u_k$  vektor masukan kontrol;  $F_k$ ,  $B_k$  dan  $H_k$  masing – masing ialah matriks transisi dari vektor yang terkait dengannya;  $w_k$  dan  $v_k$  berturut – turut adalah

<sup>1</sup> Mahasiswa Jurusan Teknik Elektro UNDIP <sup>2</sup> Staf Pengajar Jurusan Teknik Elektro UNDIP

derau proses dan derau pengukuran yang diasumsikan *white Gaussian*);  $Q_k$  dan  $R_k$  masing – masing ialah kovarian derau proses dan derau pengukuran. Untuk lebih detailnya, lihat [7]. Penjelasan tentang kovarian bisa ditemukan di [3].

Sebagai ilustrasi, perhatikan Gambar 2.1 di bawah ini.



Gambar 2.1 Model sistem yang digunakan untuk tapis Kalman

## 2.2 Fase Kerja Tapis Kalman

Tapis Kalman mempunyai dua fase kerja, yaitu fase Prediksi dan fase Update. Simbol  $\hat{x}_{n|m}$  menyatakan *estimate state*  $x$  pada waktu ke- $n$  jika diberikan nilai pengukuran hingga waktu ke- $m$ .

### a. Fase Prediksi

Fase Prediksi dinyatakan dengan persamaan berikut:

- *State* prediksi  

$$\Rightarrow \hat{x}_{k|k-1} = F_k \hat{x}_{k-1|k-1} + B_k u_k \quad (2.3)$$

- Kovarian *estimate* prediksi  

$$\Rightarrow P_{k|k-1} = F_k P_{k-1|k-1} F_k^T + Q_k \quad (2.4)$$

### b. Fase Update

Adapun untuk fase Update ditunjukkan oleh persamaan berikut:

- Selisih pengukuran/inovasi  

$$\Rightarrow \tilde{y}_k = z_k - H_k \hat{x}_{k|k-1} \quad (2.5)$$

- Kovarian inovasi  

$$\Rightarrow S_k = H_k P_{k|k-1} H_k^T + R_k \quad (2.6)$$

- Penguatan Kalman optimal  

$$\Rightarrow K_k = P_{k|k-1} H_k^T S_k^{-1} \quad (2.7)$$

- *Estimate state* update  

$$\Rightarrow \hat{x}_{k|k} = \hat{x}_{k|k-1} + K_k \tilde{y}_k \quad (2.8)$$

- Kovarian *estimate* update  

$$\Rightarrow P_{k|k} = (I - K_k H_k) P_{k|k-1} \quad (2.9)$$

Persoalan yang dihadapi adalah bagaimana mencari nilai estimasi  $x_k$ , disimbolkan sebagai  $\hat{x}_{k|k-1}$ , dari keluaran terukur  $\{z_0, z_1, \dots, z_k\}$ .

Untuk itu diasumsikan bahwa kondisi-kondisi berikut dipenuhi.

$$\begin{aligned} E[x_0] &= \bar{x}_0 & &= \Sigma_0 \\ E[w_k] &= 0 \\ E[v_k] &= 0 \\ E[x_k v_m^T] &= 0 \\ E[x_k w_m^T] &= 0 \end{aligned} \quad \begin{aligned} E[w_k w_m^T] &= Q \delta_{km} \\ E[v_k v_m^T] &= R \delta_{km} \\ E[w_k v_m^T] &= 0 \end{aligned}$$

## 2.3 Estimasi State Tak Berkendala

*Estimate* tapis Kalman merupakan tapis yang meminimumkan varians eror estimasi[1]. Penjelasan tentang varians dan nilai terharap bisa dibaca di [4,5]. Adapun nilai *estimate* tapis Kalman dengan varians minimum tersebut diberikan oleh

$$\hat{x}_{k+1} = \bar{x}_{k+1} \equiv \bar{x}_{k+1} + \Sigma_{xy} \Sigma_{yy}^{-1} (Y_k - \bar{Y}_k) \quad (2.10)$$

dengan,  $\bar{x}_{k+1}$  adalah nilai terharap dari  $x_{k+1}$ ,  $\bar{Y}_k$  ialah nilai terharap dari  $Y_k$ ,  $\Sigma_{xy}$  adalah matriks varians dari  $x_{k+1}$  dan  $Y_k$ ;  $\Sigma_{yy}$  ialah matriks kovarian dari  $Y_k$ , dan  $\bar{x}_{k+1}$  adalah rata-rata bersyarat dari  $x_{k+1}$  jika diberikan keluaran terukur  $Y_k$ . *Estimate* tapis Kalman  $\hat{x}_{k+1}$  dan  $Y_k$  juga saling *jointly Gaussian*, yang berarti  $\hat{x}_{k+1}$  merupakan *Gaussian* bersyarat untuk  $Y_k$  yang diberikan. Fungsi densitas peluang bersyarat untuk  $x_{k+1}$  jika diberikan  $Y_k$  adalah sebagai berikut:

$$P(x|Y) = \frac{\exp[-(x - \bar{x})^T \Sigma^{-1} (x - \bar{x}) / 2]}{(\pi)^{n/2} |\Sigma|^{1/2}} \quad (2.11)$$

dengan  $n$  adalah dimensi dari  $x$  dan

$$\Sigma = \Sigma_{xx} - \Sigma_{xy} \Sigma_{yy}^{-1} \Sigma_{yx} \quad (2.12)$$

dengan  $\Sigma_{xx}$  adalah matriks kovarian  $x_k$ . *Estimate* tapis Kalman ialah nilai  $x$  yang memaksimalkan fungsi densitas peluang bersyarat  $P(x|Y)$ , sedangkan  $\Sigma$  adalah matriks kovarian *estimate* tapis Kalman. Penjelasan tentang fungsi densitas peluang bersyarat dapat dilihat di [6,8,9].

## 2.4 Estimasi State Berkendala

Pada kasus *state* berkendala diberikan persamaan kendala sebagai berikut:

$$Dx_k = d_k \quad (2.13)$$

dengan  $D$  adalah matriks konstan berdimensi  $s \times n$ ,  $d$  ialah vektor  $s \times 1$ ,  $s$  adalah banyaknya kendala,  $n$  ialah banyaknya *state*, dan  $s \leq n$ . Pada Tugas Akhir ini diasumsikan bahwa matriks  $D$  mempunyai *rank* penuh, artinya  $D$  mempunyai *rank*  $s$ . Ada tiga pendekatan yang bisa digunakan untuk mencari *estimate state* berkendala, yaitu metode peluang maksimum, metode rata – rata kuadrat eror, dan metode proyeksi.

### a. Metode Peluang Maksimum

Tapis *Kalman* berkendala diperoleh dengan mencari nilai  $\tilde{x}$  sedemikian sehingga fungsi densitas peluang bersyarat  $P(\tilde{x}|Y)$  dimaksimalkan dan nilai  $\tilde{x}$  memenuhi persamaan kendala (2.11). Memaksimalkan  $P(\tilde{x}|Y)$  sama saja dengan memaksimalkan logaritma naturalnya. Jadi, persoalan yang harus diselesaikan adalah

$$\max \ln P(\tilde{x}|Y) \Rightarrow \min (\tilde{x} - \bar{x})^T \Sigma^{-1} (\tilde{x} - \bar{x}) \quad (2.14)$$

dengan kendala  $D\tilde{x} = d$

Untuk menyelesaikan persoalan tersebut pertama dibuat *Lagrangian* persamaan (2.14), yaitu:

$$L = (\tilde{x} - \bar{x})^T \Sigma^{-1} (\tilde{x} - \bar{x}) + 2\lambda^T (D\tilde{x} - d) \quad (2.15)$$

Selanjutnya, persamaan (2.15) diturunkan seka-li secara parsial untuk mencari nilai minimumnya.

$$\frac{\partial L}{\partial \tilde{x}} = 0 \Rightarrow \Sigma^{-1} (\tilde{x} - \bar{x}) + D^T \lambda = 0 \quad (2.16)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 \Rightarrow d = D\tilde{x} \quad (2.17)$$

Dari persamaan (2.16) dan (2.17) diperoleh

$$\lambda = (D\Sigma D^T)^{-1} (D\bar{x} - d) \quad (2.18)$$

$$\tilde{x} = \bar{x} - \Sigma D^T (D\Sigma D^T)^{-1} (D\bar{x} - d) \quad (2.19)$$

Mengingat bahwa  $\bar{x}$  (rata-rata bersyarat dari  $x$ ) merupakan *estimate* tapis *Kalman* ( $\hat{x}$ ) tanpa kendala, maka *estimate* tapis *Kalman* berkendala  $\tilde{x}$  dapat diturunkan dari *estimate* tak berkendalanya yaitu

$$\tilde{x} = \hat{x} - \Sigma D^T (D\Sigma D^T)^{-1} (D\hat{x} - d) \quad (2.20)$$

### b. Metode Rata-Rata Kuadrat

Persoalannya adalah mencari rata-rata kuadrat eror yang memenuhi kendala *state*. Secara matematis, ditulis

$$\min_{\tilde{x}} E(\|x - \tilde{x}\|^2 | Y) \quad (2.21)$$

dengan kendala  $D\tilde{x} = d$

Jika diasumsikan bahwa  $x$  dan  $Y$  *jointly distributed*, rata-rata kuadrat erornya bisa ditulis sebagai berikut:

$$E(\|x - \tilde{x}\|^2 | Y) = \int (x - \tilde{x})^T (x - \tilde{x}) P(x|Y) dx \quad (2.22)$$

$$= \int x^T x P(x|Y) dx - 2\tilde{x}^T \int x P(x|Y) dx + \tilde{x}^T \tilde{x} \quad (2.23)$$

*Lagrangian* untuk persamaan (2.22) dan (2.23) adalah sebagai berikut:

$$L = E(\|x - \tilde{x}\|^2 | Y) + 2\lambda^T (D\tilde{x} - d) \quad (2.24)$$

$$= \int x^T x P(x|Y) dx - 2\tilde{x}^T \int x P(x|Y) dx + \tilde{x}^T \tilde{x} + 2\lambda^T (D\tilde{x} - d)$$

$$= \int x^T x P(x|Y) dx - 2\tilde{x}^T \int x P(x|Y) dx + \tilde{x}^T \tilde{x} + 2\lambda^T (D\tilde{x} - d) \quad (2.25)$$

Perhatikan bahwa rata-rata bersyarat dari  $x$  bisa ditulis dalam bentuk

$$\hat{x} = \int x P(x|Y) dx \quad (2.26)$$

Syarat perlu agar persamaan (2.25) minimum adalah

$$\frac{\partial L}{\partial \tilde{x}} = 0 \Rightarrow -2\hat{x} + 2\tilde{x} + 2D^T \lambda = 0 \quad (2.27)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 \Rightarrow d = D\tilde{x} \quad (2.28)$$

Dengan menyelesaikan persamaan (2.27) dan (2.28) diperoleh

$$\lambda = (DD^T)^{-1} (D\hat{x} - d) \quad (2.29)$$

$$\tilde{x} = \hat{x} - D^T (DD^T)^{-1} (D\hat{x} - d) \quad (2.30)$$

### c. Metode Proyeksi

Persoalan yang akan diselesaikan adalah

$$\min_{\tilde{x}} (\tilde{x} - \hat{x})^T W (\tilde{x} - \hat{x}) \quad (2.31)$$

dengan kendala  $D\tilde{x} = d$

$W$  adalah matriks bobot simetris definite-positif.

Solusi dari persamaan (2.31) diberikan oleh persamaan berikut:

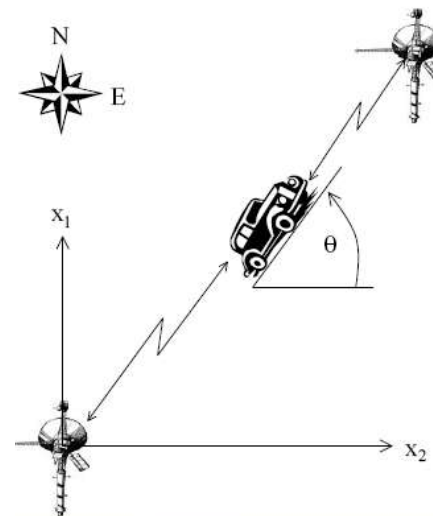
$$\tilde{x} = \hat{x} - W^{-1} D^T (DW^{-1} D^T)^{-1} (D\hat{x} - d) \quad (2.31)$$

*Estimate* tapis *Kalman* berkendala yang diturunkan dengan metode peluang maksimum (2.20) dan dengan metode rata-rata kuadrat (2.30) dapat diperoleh dari persamaan (2.31), yaitu dengan mengganti  $W = \Sigma^{-1}$  untuk persamaan (2.20) dan  $W = I$  untuk persamaan (2.31).

## III. PERANCANGAN

### 3.1 Deskripsi Sistem

Dalam Tugas Akhir ini penulis mengambil kasus nonlinear sederhana yang telah dilinearisasi, yaitu kasus penelusuran posisi kendaraan darat yang bergerak dengan lintasan tertentu[1]. Gambar 3.1 merupakan ilustrasi dari sistem yang ditinjau.



Gambar 3.1 Kendaraan yang dipantau posisinya setiap saat oleh dua transponder

Gambar 3.1 memperlihatkan sebuah kendaraan darat (mobil) yang dipantau posisinya setiap waktu oleh dua buah *transponder*. Dua *transponder* tersebut di letakkan pada posisi tertentu, yaitu di  $(r_{n1}, r_{e1})$  dan  $(r_{n2}, r_{e2})$ , yang nantinya akan menjadi acuan bagi posisi aktual kendaraan. Posisi acuan kendaraan dinyatakan relatif terhadap sumbu arah utara dan arah timur. Adapun *state* kendaraan itu sendiri pada Tugas Akhir ini dianggap terdiri dari empat *state* yaitu posisi relatif terhadap sumbu arah utara, posisi relatif terhadap sumbu arah timur, kecepatan relatif terhadap sumbu arah utara, dan kecepatan relatif terhadap sumbu arah timur. Persamaan yang menggambarkan dinamika sistem adalah sebagai berikut.

$$x_{k+1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & T & 0 \\ 0 & 1 & 0 & T \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x_k + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ T \sin \theta \\ T \cos \theta \end{bmatrix} u_k + w_k \quad (3.1)$$

$$y_k = \begin{bmatrix} (x_1 - r_{n1})^2 + (x_2 - r_{e1})^2 \\ (x_1 - r_{n2})^2 + (x_2 - r_{e2})^2 \end{bmatrix} + e_k$$

dengan  $T$  adalah periode cuplik *estimator* posisi dan  $\theta$  ialah sudut arah kendaraan (dihitung berlawanan arah jarum jam terhadap arah timur).

Perhatikan bahwa dari persamaan (3.1) dapat dilihat persamaan *statenya* linear, sedangkan persamaan pengukurannya nonlinear. Tapis *Kalman* yang diperluas (*extended Kalman filter*) dapat digunakan untuk mengestimasi vektor *state*. Pada Tugas Akhir ini akan digunakan posisi acuan 1 di (0,0) meter dan posisi acuan 2 di (173210, 100000) meter.

Adapun kovarian derau proses dan derau pengukuran ditentukan sebagai berikut:

$$Q = \text{diag}(4, 4, 1, 1)$$

$$R = \text{diag}(900, 900)$$

Pada Tugas Akhir ini tapis *Kalman* digunakan untuk mengestimasi posisi kendaraan. Meskipun demikian, pada bagian perancangan program dan pengujian program, penulis juga menyertakan estimasi kecepatan sebagai tambahan. Selama selang waktu tertentu kendaraan mungkin saja bergerak keluar dari lintasan (*off-road*) atau bergerak pada lintasan yang tak diketahui, yang berarti *state* kendaraan merupakan kasus tanpa kendala. Dalam selang waktu yang lain, bisa jadi kendaraan bergerak menempuh lintasan yang telah diberikan, yang berarti *state* kendaraan merupakan kasus berkendala. Adapun matriks kendalanya diberikan oleh persamaan berikut.

$$D = \begin{bmatrix} 1 & -\tan \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\tan \theta \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

$$d = [0 \ 0]^T$$

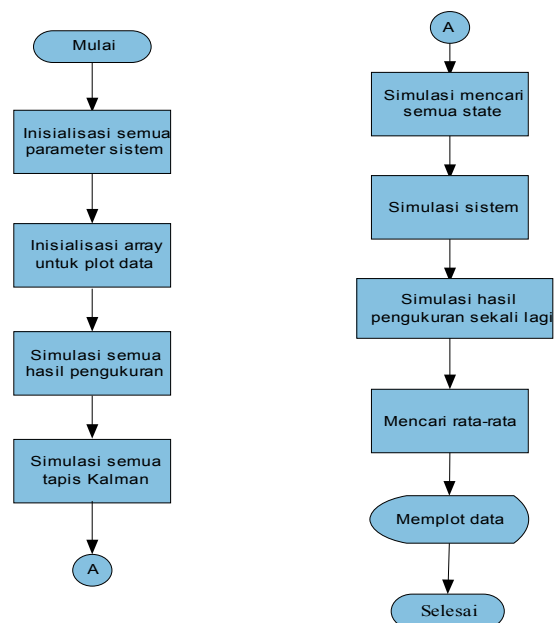
Pada Tugas Akhir ini periode cuplik  $T$  diset sebesar 3 detik, sementara sudut  $\theta$  ditentukan konstan sebesar  $\pi/3(60^\circ)$ . Untuk percepatan kontrol, diatur  $\pm 1 \text{ m/s}^2$  secara bergantian. Tujuannya adalah untuk memberikan efek cepat-lambat terhadap gerakan kendaraan. Perhatikan bahwa dengan mengatur sudut  $\theta$  sebesar  $60^\circ$  berarti lintasan yang ditempuh kendaraan merupakan garis lurus. Nilai awal untuk *state* dan matriks kovarian eror estimasi ditentukan sebagai berikut:

$$x = \hat{x}_0 = [0 \ 0 \ 173 \ 100]^T$$

$$P_0 = \text{diag}[900 \ 900 \ 4 \ 4]$$

### 3.2 Program Utama

Selanjutnya akan dijelaskan secara singkat program yang mensimulasikan tapis *Kalman* sekaligus pemplotan data untuk keperluan analisis. Pada Tugas Akhir ini digunakan bahasa pemrograman *Matlab* 6.5. Langkah pertama yang dilakukan adalah menentukan nilai awal (inisialisasi) semua parameter sistem, yaitu menentukan selang waktu simulasi, matriks  $Q$ , matriks  $R$ , matriks  $R1$ , sudut  $\theta$ , menentukan nilai awal semua *state* dan *estimate state*, masukan kontrol, matriks kovarian eror estimasi  $P$  dan  $P1$ , posisi acuan kedua *transponder*, matriks sistem  $A$ , dan matriks kendala *state*  $D$ . Selanjutnya, untuk kepentingan pemplotan data, nilai *array* juga diberi nilai awal terlebih dahulu. *Array* ini meliputi *array state* sebenarnya, *estimate state* pengukuran sempurna, *estimate state* tanpa kendala maupun *estimate state* berkendala, dan *array* eror kendala untuk semua kasus. Gambar 3.2 menunjukkan diagram alir program keseluruhan.



Gambar 3.2 Diagram alir jalannya program utama

#### IV. PENGUJIAN DAN ANALISIS

##### 4.1 Pengujian Jalannya Program

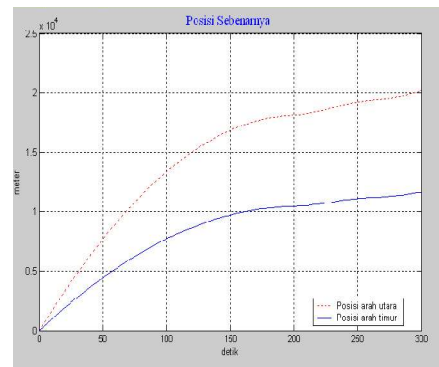
Pada pengujian jalannya program ini akan dilakukan sebanyak dua puluh simulasi. Untuk menjalankan program, pertama harus dibuka program Matlab 6.5. Contoh tampilan hasil eksekusi program yang terlihat pada jendela *Command* ditunjukkan oleh gambar 4.1 di bawah ini.

```

RMS Error Estimasi Posisi Tak Berkendala = 5,0327
RMS Error Estimasi Posisi (Pengukuran Seagurna) = 0,16664
RMS Error Estimasi Posisi Berkendala (W=I) = 0,16663
RMS Error Estimasi Posisi Berkendala (W=inv(P)) = 0,16664
RMS Error Estimasi Kecepatan Tak Berkendala = 1,5432
RMS Error Estimasi Kecepatan (Pengukuran Seagurna) = 0,98719
RMS Error Estimasi Kecepatan Berkendala (W=I) = 0,98581
RMS Error Estimasi Kecepatan Berkendala (W=inv(P)) = 0,98581

Rata-Rata Error Kendala (Kasus Tanpa Kendala) = 12,437
Rata-Rata Error Kendala (Pengukuran Seagurna) = 9,8919e-009
Rata-Rata Error Kendala (W=I) = 0,12351
Rata-Rata Error Kendala (W=inv(P)) = 0,12351
    
```

Gambar 4.1 Contoh tampilan hasil eksekusi program KalmanBerkendala



Gambar 4.2 Contoh Plot Posisi Sebenarnya

Gambar 4.2 merupakan contoh plot posisi sebenarnya dari kendaraan. Perhatikan bahwa pada waktu  $t = 300$  detik ternyata kendaraan belum mencapai posisi acuan (173210, 100000) m. Ini dikarenakan tujuan simulasi ini bukanlah memenuhi kendala waktu minimum, melainkan eror estimasi minimum.

Untuk memberi gambaran hasil simulasi, berikut ini diberikan tabel 4.1 yang berisi perbandingan RMS eror estimasi posisi dan eror estimasi kecepatan.

Tabel 4.1 Perbandingan RMS Error Estimasi Posisi Dan Kecepatan Pada Pengujian Jalannya Program

Simulasi ke-i	RMS Error Estimasi							
	Posisi(meter)				Kecepatan(meter/detik)			
	TK	PS	W=I	W=P <sup>-1</sup>	TK	PS	W=I	W=P <sup>-1</sup>
1.	6,3731	0,1757	0,17571	0,17571	1,4932	0,87509	0,87664	0,87664
2.	4,4762	0,18761	0,18761	0,18762	1,2071	0,91418	0,91466	0,91466
3.	4,2118	0,16471	0,16471	0,1647	1,2388	1,0219	1,0218	1,0218
4.	4,7648	0,1431	0,1431	0,1431	1,2001	0,87841	0,87739	0,87739
5.	4,7921	0,15147	0,15148	0,15148	1,2998	0,91079	0,91022	0,91022
6.	5,499	0,15725	0,15724	0,15725	1,4582	1,0119	1,0163	1,0163
7.	5,651	0,21806	0,21806	0,21807	1,4622	1,1205	1,1202	1,1202
8.	5,035	0,185	0,18499	0,185	1,3406	0,95573	0,95615	0,95615
9.	4,7179	0,19628	0,19628	0,19629	1,2503	0,92606	0,92636	0,92636
10.	4,8403	0,18012	0,18011	0,18012	1,2584	0,98203	0,98079	0,98079
11.	4,8603	0,16272	0,16273	0,16273	1,367	1,0749	1,0752	1,0752
12.	4,7206	0,1839	0,18389	0,1839	1,2064	0,86948	0,86915	0,86915
13.	4,7645	0,16134	0,16133	0,16134	1,2629	0,84534	0,84426	0,84426
14.	4,464	0,19175	0,19175	0,19176	1,1777	0,89737	0,89682	0,89682
15.	4,3075	0,21349	0,21349	0,2135	1,1821	0,8781	0,87842	0,87842
16.	4,5165	0,18989	0,18988	0,18989	1,1321	0,87415	0,87288	0,87287
17.	4,5933	0,17875	0,17875	0,17875	1,1135	0,76144	0,76124	0,76124
18.	5,5579	0,18819	0,18819	0,1882	1,3187	1,0007	1,0007	1,0009
19.	4,9269	0,17337	0,17337	0,17338	1,2082	0,76788	0,76825	0,76825
20.	5,1596	0,19314	0,19314	0,19314	1,3202	0,98011	0,97995	0,97995
$\bar{x}$	5	0,179792	0,179791	0,180591	1,274875	0,927303	0,927369	0,927379
$\sigma_x$	0,521313	0,019257	0,019256	0,019447	0,107577	0,092306	0,092545	0,092554

<sup>1</sup> Mahasiswa Jurusan Teknik Elektro UNDIP <sup>2</sup> Staf Pengajar Jurusan Teknik Elektro UNDIP

Pada tabel 4.1 dapat dilihat bahwa RMS eror estimasi posisi berkendala, baik untuk  $W=I$  maupun  $W=P^{-1}$ , jauh lebih kecil daripada RMS eror estimasi posisi tanpa kendala, yaitu hingga 1/25 kalinya. Ini berarti pengujian program telah berhasil sesuai dengan tujuan yang diinginkan.

Hal sedikit berbeda terjadi pada RMS eror estimasi kecepatan. Selisih RMS eror estimasi kecepatan tanpa kendala dan berkendala relatif sangat kecil, hanya 0,0727 m/detik.

Adapun untuk rata-rata eror kendalanya ditunjukkan oleh tabel 4.2 berikut.

Tabel 4.2 Perbandingan Rata-Rata Eror Kendala Pada Pengujian Program

Simulasi ke-i	Rata-Rata Eror Kendala			
	TK	PS	W=I	W=P <sup>-1</sup>
1.	15,7564	8,4094e-009	0,17554	0,17554
2.	10,9585	1,0529e-008	0,10492	0,10492
3.	9,772	7,3937e-009	0,081599	0,081599
4.	11,6201	8,0052e-009	0,12077	0,12077
5.	11,8994	7,1145e-009	0,12605	0,12605
6.	13,7841	8,4948e-009	0,18462	0,18462
7.	12,6125	1,1313e-008	0,12446	0,12446
8.	12,4657	8,2904e-009	0,12562	0,12562
9.	11,1216	8,3693e-009	0,1118	0,1118
10.	11,7384	8,342e-009	0,12632	0,12632
11.	11,9643	1,0361e-008	0,10632	0,10632
12.	11,6562	8,777e-009	0,098268	0,098268
13.	12,1892	7,98e-009	0,1659	0,1659
14.	11,0692	7,6452e-009	0,10536	0,10536
15.	10,4655	7,1805e-009	0,099442	0,099442
16.	10,7214	8,9934e-009	0,10035	0,10035
17.	11,1654	7,9241e-009	0,10087	0,10087
18.	12,2477	9,1843e-009	0,13141	0,13141
19.	11,9842	9,3162e-009	0,13523	0,13523
20.	12,2948	9,7257e-009	0,099603	0,099603
$\bar{x}$	11,87433	8,67e-009	0,121223	0,121223
$\sigma_x$	1,266349	1,13429e-009	0,027205	0,027205

Mencermati tabel 4.2 di atas terlihat bahwa rata-rata eror kendala pada tapis *Kalman* berkendala jauh lebih kecil dibanding pada kasus tanpa kendala, yaitu mencapai rasio dengan orde  $10^{-2}$ . Hal ini merupakan penegasan terhadap keberhasilan pengujian program. Perhatikan bahwa rata-rata eror kendala untuk kasus pengukuran sempurna sangat kecil, yaitu dalam orde  $10^{-8}$ - $10^{-9}$ . Dengan kata lain, nilainya mendekati nol. Ini terjadi karena pada kasus pengukuran sempurna juga dilakukan pengukuran kecepatan. Selain itu, sudut arah kendaraan pada kasus ini diasumsikan sama dengan sudut kendaraan sebenarnya sehingga tidak perlu dilakukan estimasi. Hal berbeda terjadi pada kasus tapis tanpa kendala maupun berkendala, yaitu harus mengestimasi terlebih dahulu sudut arah kendaraan berdasarkan informasi estimasi *state*.

## V. KESIMPULAN DAN SARAN

Dari hasil simulasi pengujian program dan analisis yang telah dilakukan dapat disimpulkan upaya untuk memasukkan kendala *state* linear ke dalam persamaan tapis *Kalman* terbukti sangat efektif. Keefektifan ini bisa dilihat dari RMS eror estimasi posisi tapis berkendala yang bernilai sangat kecil, yaitu sebesar 1/25 kali, dibandingkan hasil tapis tanpa kendala. Hal sedikit berbeda terjadi pada RMS eror estimasi kecepatan. Selisih RMS eror estimasi kecepatan tanpa kendala dan berkendala relatif sangat kecil, hanya 0,0727 m/detik.

Pemberian nilai awal parameter sistem dapat dilakukan secara lebih variatif hingga diperoleh kualitas kinerja tapis yang diinginkan. Sebaiknya jumlah simulasi yang dilakukan lebih banyak sehingga diperoleh data-data (sampel) yang lebih valid secara statistik. Untuk pengem-

bangan Tugas Akhir ini selanjutnya bisa digunakan persamaan kendala *state* yang berbeda agar didapatkan *optimal smoothing*. Selain itu juga bisa digunakan tapis *minimax* atau tapis  $H_\infty$  untuk mengakomodasi ketidakpastian derau (*noise uncertainty*) dan kesalahan dalam pemodelan sis-tem. Algoritma tapis *Kalman* yang telah dibahas pada Tugas Akhir ini bisa dikembangkan untuk diterapkan pada kasus navigasi *aerospace*, navi-gasi laut, maupun banyak aplikasi lainnya.

#### DAFTAR PUSTAKA

- [1] Simon, D., and T.L. Chia, "Kalman Filtering with State Equality Constraints", <http://academic.csuohio.edu/simond/kalmanconstrained/> November 2007.
- [2] Simon, D., *Kalman Filtering*, <http://www.cs.unc.edu/~welch/kalman/>, November 2007.
- [3] Weistein, E.W., *Covariance*, <http://mathworld.wolfram.com/Covariance.html>, November 2007.
- [4] ---, *Expected Value*, [http://en.wikipedia.org/wiki/expected\\_value](http://en.wikipedia.org/wiki/expected_value), November 2007.
- [5] ---, *Variance*, <http://en.wikipedia.org/wiki/variance>, November 2007.
- [6] ---, *Probability Density Function*, [http://en.wikipedia.org/wiki/Probability\\_density\\_function](http://en.wikipedia.org/wiki/Probability_density_function), November 2007.
- [7] ---, *Kalman Filter*, [http://en.wikipedia.org/wiki/Kalman\\_filter](http://en.wikipedia.org/wiki/Kalman_filter), November 2007.
- [8] ---, *Distribution Theory*, [http://xycoon.com/distribution\\_theory](http://xycoon.com/distribution_theory), November 2007.
- [9] ---, *Random Variables*, [http://xycoon.com/random\\_variables](http://xycoon.com/random_variables), November 2007.



Lahir di Semarang, 22 Maret 1984. Saat ini sedang melanjutkan studi pendidikan strata I di Jurusan Teknik Elektro, Fakultas Teknik Universitas Diponegoro Konsentrasi Kontrol.

Mengetahui dan mengesahkan,

Dosen Pembimbing I

Dosen Pembimbing II

Budi Setiyono, ST, MT  
NIP. 132 283 184

Darjat, ST, MT  
NIP. 132 231 135

Tanggal: 13 Pebruari 2008

Tanggal: 13 Pebruari  
2008



**Iput Kasiyanto (L2F 003 509)**