TEORI HEMIRING

Mahasiswa S1 Program Studi Matematika, Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Diponegoro
Jl. Prof. H. Soedarto, S.H., Semarang Indonesia 50275
email :tri_matematika@yahoo.com

ABSTRAK

Diberikan Semring (A,+, .). Sebuah Semiring (A,+, .) disebut hemiring, jika operasi '+' A merupakan semigrup komutatif dan mempunyai elemen identitas penjumlahan. Teorema utama homomorfisma Ring dapat digeneralisasikan pada hemiring. Di dalam paper ini akan dijelaskan kelas N-homomorfisma dari hemiring, hemiring tipe (K), hemiring semisubtraktif, dan hemiring hereditarily semi subtraktif.

Kata Kunci : hemiring, homomorfisma hemiring, teorema homomorfisma, N-homomorfisma, hemiring tipe (K), hereditarily semi subtraktif.

PENDAHULUAN

Pada teori Ring didefinisikan bahwa himpunan A disebut Ring, jika A grup komutatif, pergandaan asosiatif, dan distributif kanan kiri. Karena sifat ini dipandang terlalu kuat, didefinisikan teori hemiring yaitu setiap semiring A yang memenuhi aksioma komutatif dan mempunyai identitas penjumlahan. Seperti halnya teori Ring yang mempunyai hipunan bagian yang disebut ideal, dalam konsep hemiring juga mempunyai ideal yang memiliki sifat yang lebih spesifik disebut h-ideal.

N-HOMOMORFISMA

Definisi 1. Homomorfisma hemiring ϕ dari S ke T disebut homomorfisma maksimal jika setiap $t \in T$ terdapat $C_t \in \phi^{-1}(t)$ sedemikian hingga untuk setiap $x \in \phi^{-1}(t)$ terdapat $x + \ker \phi \subseteq C_t + \ker \phi$.

Definisi 2. Homomorfisma hemiring ϕ dari S ke T disebut N-homomorfisma jika untuk setiap $t \in T$ terdapat kumpulan $\left\{x+\ker\phi : x \in \phi^{-1}(t)\right\}$ dimana memuat dua himpunan yang tidak saling asing.

Lemma 1. Homomorfisma $\phi : S \longrightarrow T$ disebut N-homomorfisma jika dan hanya jika $(\exists\, x, y \in S)\ \phi(x) = \phi(y)$ sedemikian hingga $x + k_1 = y + k_2$; $k_1, k_2 \in \ker\phi$

Bukti

$\Rightarrow$ N-homomorfisma

Berdasarkan definisi N-homomorfisma untuk setiap $t \in T$ terdapat himpunan $x + \ker\phi$; $x \in \phi^{-1}(t)$ dan terdapat dua himpunan yang tidak saling asing.

$x + k_1 = y + k_2$; $k_1, k_2 \in \ker\phi$

$\phi(x + k_1) = \phi(y + k_2)$

$\phi(x) + \phi(k_1) = \phi(y) + \phi(k_2)$

$\phi(x) + 0' = \phi(y) + 0'$

$\phi(x) = \phi(y)$

$\Rightarrow \phi(x) = \phi(y)$

$\phi(x) = \phi(y)$

$\phi(x) - \phi(y) = \phi(y) - \phi(y)$

$\phi(x + y) = \phi(y - y)$

$\phi(x - y) = \phi(0)$

$\phi(x - y) = 0'$

$x - y \in \ker\phi$

$x + \ker\phi = y + \ker\phi$

Lemma 2..Homomorfisma $\phi : \mathrm{S} \longrightarrow T$ merupakan homomorfisma maksimal jika dan hanya jika himpunan prapeta dari setiap $t \in T$ adalah koset $\ker\phi$.

Bukti.

$\Rightarrow \phi : S \longrightarrow T$ Homomorfisma maksimal

Berdasarkan definisi homomorfisma maksimal,untuk setiap $t \in T$ terdapat $C_t \in \phi^{-1}(t)$ sedemikian hingga $x \in \phi^{-1}(t)$ punya $x + \ker\phi \subseteq C_t + \ker\phi$. Maka Untuk setiap $x \in \phi^{-1}(t)$ dapat di tulis $x = c + \ker\phi$ sedemikian hingga $\phi^{-1}(t)$ koset $\ker\phi$.

$\Leftarrow \phi^{-1}(t)$ koset $\ker\phi$

Berdasarkan apa yang diketahui bahwa untuk setiap
$x \in \phi^{-1}(t)$ dapat di bentuk $x = c + \ker\phi$.

$$x_1 = c_1 + \ker\phi$$
$$x_2 = c_2 + \ker\phi$$
$$x_3 = c_3 + \ker\phi$$
.
.
.
$$x_n = c_n + \ker\phi$$

Jadi untuk setiap $x \in \phi^{-1}(t)$ punya $x + \ker\phi \subseteq C_t + \ker\phi$.

Teorema.1

Jika $\phi : S \longrightarrow T$ adalah homomorfisma maksimal maka ϕ adalah N-homomorfisma.

Bukti.

Misalkan ambil sembarang $t \in T$ sedemikian hingga berdasarkan definisi homomorfisma maksimal bahwa.

Ambil sembarang $x, y \in \phi^{-1}(t)$

$x = c + k_1$
$y = c + k_2 \quad k_1, k_2 \in \ker\phi$
$x + k_2 = c + k_1 + k_2$
$y + k_1 = c + k_2 + k_1$
$x + k_2 = y + k_1 \quad ; k_1, k_2 \in \ker\phi$
$x + \ker\phi \cap y + \ker\phi \neq \varnothing$

Jadi ϕ N-homomorfisma

Sejak setiap homomorfisma Ring adalah maksimal dan ada juga yang N-homomorfisma,hal ini akan membuktikan bahwa setiap homomorfisma natural hemiring $S \longrightarrow S/I$ adalah N-homomorfisma.

Contoh.1

Misalkan diberikan hemiring S={0,1,2,3,4} yang operasi penjumlahannya didefinisikan seperti tabel di bawah ini

	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	1	4	4	4
2	2	4	4	4	4
3	3	4	4	4	4
4	4	4	4	4	4

Misalkan T subhemiring {0,1} dari S,jika di definisikan pemetaan
$\phi: S \longrightarrow T$
dengan ϕ:0,1 $\rightarrow$ 0 dan 2,3,4 $\rightarrow$ 1 maka ϕ homomorfisma dengan $\ker\phi = \{0,1\}$.
adapun $\phi^{-1}(1) = \{2,3,4\}$ dan terdapat dua himpunan yang tidak saling asing $2+\ker\phi, 3+\ker\phi, 4+\ker\phi$.
Jadi ϕ N-homomorfisma,akan tetapi bukan homomorfisma maksimal karna $\phi^{-1}(1)$ bukan koset $\ker\phi$.

TEOREMA UTAMA HOMOMORFISMA

Untuk kelas N-homomorfisma kita akan mengalami hal yang sama seperti yang di akibatkan dalam teori Ring.

Lemma 3.

Jika ϕ adalah N-homomorfisma dari S ke T dengan kerϕ={0},maka ϕ adalah N-homomorfisma.
Bukti.

Andaikan

$\phi(x)=\phi(y)$ sedemikian hingga

$x+k_1 = y+k_2$

$x+0 = y+0$

$x = y$

Jadi ϕ adalah isomorfisma.

Teorema2. Jika ϕ adalah N-homomorfisma dari S ke T maka $S/\ker\phi \cong T$.

Bukti.

Akan di tunjukan bahwa:

a. ω Well defined
b. ω homomorfisma
c. ω injektif
d. ω surjektif

Akan di buktikan a) ω well defined

Ambil sembarang $[s_1],[s_2]\in S/\ker\phi$ dengan $[s_1]=[s_2]$

akan di tunjukan $\omega([s_1])=\omega([s_2])\overset{dfns}{=}\phi(s_1)=\phi(s_2)$

$[s_1]=[s_2]\xleftrightarrow{artinya} s_1+\ker\phi = s_2+\ker\phi$

$\phi(s_1)=\phi(s_2)$

b) ω homomorfisma

Akan di buktikan bahwa untuk setiap $t\in T$ terdapat himpunan $s+\ker\phi$; $s\in\phi^{-1}(t)$

$(\forall t\in T)$ $(\exists[s]\in s/\ker\phi)$

Ambil sembarang $t \in T, (\exists s \in S)\ \phi(s) = t$

untuk $s \in S$ di atas dapat di bentuk $[s] \in S/\ker\phi$

$\exists t = \phi(s) = \omega([s])$

jadi bila di ambil sembarang $t \in T$ maka terdapat $[s] \in S/\ker\phi = s + \ker\phi$

c) ω injektif

$(\forall [s_1],[s_2] \in S/\ker\phi)$ dengan $\omega([s_1]) = \omega([s_2])$

akan di buktikan $[s_1] = [s_2]$

$\omega([s_1]) = \omega([s_2])$

$\phi(s_1) = \phi(s_2)$

$s_1 + \ker\phi = s_2 + \ker\phi$

$[s_1] = [s_2]$

d) ω Surjektif

akan di buktikan bahwa $(\forall t \in T)\ (\exists [s] \in S/\ker\phi)\ \omega([s]) = t$

ambil sembarang $t \in T, (\exists x \in S)\ \phi(x) = t$

untuk $x \in S$ di atas dapat di bentuk $[s] \in S/\ker\phi$

jadi bila di ambil sembarang $t \in T$ maka terdapat $[s] \in S/\ker\phi$

akan di tunjukkan $[s]$ tunggal

andaikan terdapat $[s_1],[s_2] \in S/\ker\phi$ sedemikian hingga $\omega([s_1]) = \omega([s_2]) = t$

$\omega([s_1]) = \omega([s_2])$

$\phi(s_1) = \phi(s_2)$

Berdasarkan definisi N-homomorfisma bahwa untuk ssetiap $t \in T$ terdapat himpunan $s + \ker\phi$; $s \in \phi^{-1}(t)$ maka dari yang di dapat di atas dapat kita tuliskan

$s_1 + \ker\phi = s_2 + \ker\phi$
karna injektif maka $\ker\phi = \{0\}$
$s_1 + 0 = s_2 + 0$
$s_1 = s_2$

HEMIRING TIPE(K)

Definisi 1. sebuah hemiring S disebut tipe(K) jika terdapat I sebagai K-ideal dari S sedemikian hingga terjadi homomorfisma natural $\eta : S \longrightarrow S / I$ maka η mengawetkan K-ideal.

Definisi 2. hemiring S disebut semisubtraktif,jika untuk sepasang a,b elemen di S dapat di pecahkan a+x=b atau b+x=a

Definisi 3. hemiing S disebut hereditarily semisubrakif jika untuk setiap ideal di S semisubtraktif.

Lemma 4. jika S hemiring semisubtraktif dan K adalah K-ideal dari S maka k semisubtraktif.

Bukti.

Misalkan $a,b \in k$ maka $a,b \in S$,akan tetap ada $s \in S$ yang mana salah satu dari dua argumen ini di penuhi $a+s=b$ atau b+s=a ,misalkan yang terpenui $a+s=b$ karna $a \in k$ dan k adalah $k-ideal$ sedemikian hingga $a+s \in k$ maka $b \in k$, jadi k semisubtraktif karna terdapat elemen dari k yang dapat dipecahkan.

TEOREMA 3. Jika S adalah hereditarily semisubtraktif dan ϕ adalah N-homomorfisma dari $S \longrightarrow T$ maka ϕ mengawetkan $k-ideal$.

Bukti.

Misalkan K adalah $k-ideal$ dari S dan $\overline{K} = \phi(k)$

Akan ditunjukan bahwa $\overline{K}^* \subseteq \overline{K}$ dan $\overline{K}$ adalah $k-ideal$.

Misalkan

$\overline{x} \in \overline{K}^{*}$

$\overline{x} + \overline{k}_1 = \overline{k}_2$;$\overline{k}_1, \overline{k}_2 \in \overline{K}$

$\phi(x + k_1) = \phi(k_2)$

$x + k_1 + z_1 = k_2 + z_2$

$x + k_1 + z_1 + t = k_2 + z_2 + t$ $\quad t \in k + \ker\phi$ sedemikian hingga salah satu ini di penuhi

$k_1 + t = z_2$ atau $k_1 = z_2 + t$

$x + z_1 + z_2 = k_2 + z_2 + t$

$\phi(x + z_1 + z_2) = \phi(k_2 + z_2 + t) \in \phi(k) = \overline{k}.$

Jika yang satu yang dipenuhi $k_1 = z_2 + t$

$x + k_1 + z_1 + t = k_2 + z_2 + t$

$x + k_1 + z_1 + t = k_2 + k_1 =$;$t \in K + \ker\phi \quad t = k_3 + z_3$

$x + k_1 + z_1 + k_3 + z_3 = k_2 + k_1$

maka $\phi(x + z_1 + z_3) \in \phi(k) = \overline{k}$

Jadi $\overline{k}^{*} \subseteq \overline{k}$ dan jadi $\phi(k) = \overline{k}$ adalah $k-ideal$ dari T.

Proposisi 1. Jika S adalah hemiring hereditarily semisubtraktif maka S adalah hemiring dari tipe(K).

Bukti.

Jika I adalah $k-ideal$ dari hemiring S dan terjadi homomorfisma natural

$\eta : S \longrightarrow S/I$ adalah N-hommorfisma

Karna berdasarkan Teorema diatas bahwa η mengawetkan

$k-ideal$ yang mana S hemiring.