DEFORMASI INTERAKSI DUA PAKET GELOMBANG DARI PERSAMAAN IMPROVED KdV (IKdV)

Sutimin
Jurusan Matematika FMIPA Universitas Diponegoro
Jl. Prof. H. Soedarto SH Tembalang, Semarang 50275
E-mail: **su_timin@yahoo.com**

Abstract: Here, We will study the nonlinear two waves packet interaction. The two waves packet is modeled by Improved Koreteweg de-Vries (IKdV) equation. The primary amplitudes are modulated by two-soliton of the nonlinear Schrődinger (NLS) equation. In this paper, we analyzed the interaction patterns of the two waves packet at the peak interaction. We have shown here, that during under going to the interaction region, the deformation of amplitudes profile will be occurred. The large deformation is characterized by the ratio of the amplitudes parameter and the wave numbers of each wave packets. The symmetry interaction also can be analyzed by the characterization of the parameters.

Keywords: Improved KdV (IKdV), Soliton, Nonlinear Schrődinger (NLS)

1. PENDAHULUAN

Paper ini membahas masalah interaksi paket gelombang taklinier dari persamaan Improved Korteweg-de Vries (IKdV). Dua paket gelombang yang yang merambat dengan kecepatan grup yang berbeda akan mengalami tumbukan, dalam hal ini dikatakan interaksi. Selama proses menuju daerah interaksi ini, individu paket gelombang akan mengalami deformasi selama perambatannya menuju puncak interaksi.

Masalah ini dimotivasi oleh ekperimen dan pengamatan yang dilakukan oleh [3] melalui pembangkitan paket gelombang bikromatik. Paket gelombang ini mendiskripsikan superposisi dua gelombang monokromatik dengan amplitudo sama tetapi ada perbedaan sedikit bilangan gelombangnya. Berdasarkan pengamatan ini, signal yang semula berbentuk paket gelombang bikromatik di pembangkit gelombang, kemudian terjadi distorsi dari paket gelombang ini dalam perambatannya

Dalam analisis ini dikembangkan fenomena paket gelombang tak linier. Kajian ini memanfaatkan perilaku soliton sebagai amplitudo paket gelombang. Paket gelombang ini dimodelkan oleh selesaian paket gelombang dua soliton dari persamaan IKdV. Secara analitik interaksi paket gelombang dari persamaan IKdV dengan amplitudonya didasarkan pada persamaan NLS telah dikaji oleh [4] dan [2] (dengan memperhatikan amplitudo sama, yaitu $q_1 = q_2$).

Dalam tulisan ini dititikberatkan pada identifikasi parameter yang menentukan interaksi dua paket gelombang berbentuk simetris pada puncak interaksi. Dan mengkonstruksi secara analitik profil interaksi ini berdasarkan simulasi numerik.

2. MODEL PAKET GELOMBANG

Model persamaan gelombang permukaan air direpresentasikan oleh Improved Korteweg-de Vries (IKdV). Dalam bentuk variabel tanpa dimensi dinyatakan oleh,

$$\partial_t u = -\partial_x (Ru + \tfrac{3}{4}u^2) \qquad (2.1)$$

dimana $u(x,t)$ menyatakan elevasi gelombang permukaan dan R adalah operator pseudo diferensial yang menjelaskan sifat dispersi [5], dinyatakan dalam simbol $\hat{R} = \sqrt{\tanh(k)/k}$. Persamaan (2.1) memiliki sifat dispersif yang baik untuk gelombang linier permukaan air, bahkan sifat dispersif gelombang linier permukaan air sepenuhnya terwakili.

Model satu paket gelombang untuk persamaan IKdV dinyatakan dalam bentuk,

$$u(x,t) = \varepsilon\{A\ (\xi\ ,\tau)e^{i\theta}\ \} + hot + c.c \quad (2.2)$$

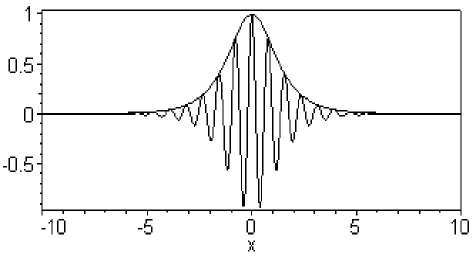
dengan mengambil amplitudo paket gelombang berbentuk 1-soliton persmaan NLS sebagai

$$A(\xi,\tau) = 2q\sqrt{\tfrac{2\beta}{\gamma}}\sec h(\xi)\exp(-iq^2\beta t). \quad (2.3)$$

Maka satu paket gelombang dari persamaan IKdV, dinyatakan oleh

$$u(x,t) = 2q\sqrt{\tfrac{2\beta}{\gamma}}\sec h(\xi)\cos(\Theta(k_0,q) + \Delta p), \quad (2.4)$$

dengan $\Theta(k_0,q) = k_0 x - \varpi t$ dan $\varpi = \Omega(k_0) + \beta q^2$. Profil satu paket gelombang untuk persamaan IKdV dapat digambarkan dibawah ini,



Gambar 1. Profil satu paket gelombang IKdV.

Model dua paket gelombang untuk persamaan IKdV dalam koordinat berjalan yang berbeda, diberikan oleh Ansatz

$$u(x,t) = \varepsilon\{A_1(\xi_1,\tau)e^{i\theta_1} + A_2(\xi_2,\tau)e^{i\theta_2}\} + hot + c.c. \quad (2.5)$$

dimana $\theta_i = k_i x - \Omega(k_i)t, i = 1,2$. Untuk menjelaskan proses interaksi maka model ini harus dinyatakan dalam koordinat yang sama. Hubungan ini dapat dinyatakan oleh $\xi_i = \xi + 2c_i\beta\tau$, dimana c_i adalah parameter frekuensi gelombang amplitudo dari paket gelombang ke-i, dan β adalah koefisien dispersi pada persamaan NLS. Sehingga diperoleh model paket gelombang sebagai berikut,

$$u(x,t) = \varepsilon A(\xi,\tau)e^{i\theta_0} + hot + c.c \quad (2.6)$$

dimana $A(\xi,\tau)$ menyatakan suatu amplitudo bernilai kompleks yang berbentuk dua soliton dari persamaan NLS yang merambat dengan variasi lamban, bila dibanding dengan osilasi gelombang pembawa dengan fase $\theta_0 = k_0 x - \Omega(k_0)t$, dengan $\xi = \varepsilon(x - \Omega'(k_0)t)$ menyatakan koordinat bergerak yang bervariasi lamban dan koordinat waktu lamban $\tau = \varepsilon^2 t$, sedangkan $\Omega(k_0)$ adalah frekuensi gelombang pembawa yang memenuhi relasi dispersi eksak [4] $\Omega(k) = \sqrt{k\tanh k}$, dan bilangan gelombang k_0 bergantung pada k_1 dan k_2. Amplitudo kompleks $A(\xi,\tau)$ persamaan (2.6) adalah selesaian dua soliton yang memenuhi persamaan *NLS*,

$$\partial_\tau A + i\beta\partial_\xi^2 A + \gamma|A|^2 A = 0 \quad (2.7)$$

Amplitudo dua paket gelombang pada saat berjauhan dapat dinyatakan sebagai superposisi dua individu soliton.

3. DUA PAKET GELOMBANG

Selesaian dua soliton dari persamaan NLS telah dikaji oleh [1]. Selesaian ini juga dapat dinyatakan sebagai superposisi dari dua fungsi kompleks dengan masing masing memiliki amplitudo dan fase riil berikut ini,

$$A(x,t) = \frac{4\sqrt{\frac{2\beta}{\gamma}}}{N(x,t)},$$

$$\sum_{i=1}^{2} R_i \operatorname{Re}(\exp(I(\psi_i + \zeta_{3-i} + \Phi_{3-i} - \theta_i + \theta_0))) \cdot \quad (3.1)$$

dimana,

$$N(x,t) = e^{\Delta}\cosh(q_1\xi_1 + q_2\xi_2 + \Delta) + \cosh(q_1\xi_1 - q_2\xi_2) - \frac{4q_1q_2}{(q_1+q_2)^2 + (c_1-c_2)^2}\cos(\psi_1 - \psi_2 + 2\alpha)$$

$$R_j = q_j e^{\frac{\Delta}{2}}\sqrt{\cosh(2\xi_{3-j} + \Delta) + \cos(2\Phi_{3-j})}$$

$$\tan(\varsigma_j) = \tanh(\xi_j + \frac{\Delta}{2})\tan(\Phi_j),$$

$$\tan\alpha = \frac{q_1 + q_2}{c_1 - c_2}$$

$$\Delta = \ln\left|\frac{(q_1-q_2)^2+(c_1-c_2)^2}{(q_1+q_2)^2+(c_1-c_2)^2}\right| ,$$

$$\tan\ \Phi_j = \frac{2q_j(c_1-c_2)}{q_1^2-q_2^2+(-1)^j(c_1-c_2)^2} .$$

Profil amplitudo pada puncak interaksi yang dinyatakan oleh selesaian dua soliton persamaan NLS telah diberikan [2], dalam bentuk fungsi amplitudo dan fase riil berikut ini,

$$A(x,t) = 2\sqrt{\frac{2\beta}{\gamma}}\ \frac{R(x,t)}{N(x,t)}\ \exp(I\Psi(x,t)) \tag{3.2}$$

dimana,

$$R(x,t) = \sqrt{\Gamma},$$

$$\Gamma = R_1^2 + R_2^2 + 2R_1R_2\cos(\psi_1 - \psi_2 + \varsigma_2 - \varsigma_1 + 2\alpha)$$

$$\Psi(x,t) = \frac{1}{2}(\Theta_1 + \Theta_2) + \arctan\left(\frac{R_1 - R_2}{R_1 + R_2}\right)\times$$

$$\tan\frac{1}{2}(\psi_1 - \psi_2 + \varsigma_2 - \varsigma_1 + 2\alpha),$$

$$\Theta_j = \psi_j + \Phi_{3-j} + \varsigma_{3-j},$$

$$\psi_j = c_j\xi + \beta(c_j^2 - q_j^2)\tau + p_j,\ j = 1,2.$$

Struktur amplitudo paket gelombang pada saat berjauhan dapat dijelaskan sebagai berikut

i. Untuk $\xi_2 \to \infty$, dan ξ_1 konstan:

$$A(\xi,\tau) \to \sqrt{\frac{2\beta}{\gamma}}q_1\sec h(q_1\xi_1 + \Delta)\times$$
$$\exp(I(\psi_1 + 2\Phi_2 - \theta_1 + \theta_0))$$

ii. Untuk $\xi_1 \to \infty$, dan ξ_2 konstan,

$$A(\xi,\tau) \to \sqrt{\frac{2\beta}{\gamma}}q_2\sec h(q_2\xi_2 + \Delta)\times$$
$$\exp(i(\psi_2 + 2\Phi_2 - \theta_2 + \theta_0))$$

iii. Untuk $\xi_2 \to -\infty$, pada ξ_1 konstan,

$$A(\xi,\tau) \to \sqrt{\frac{2\beta}{\gamma}}q_1\sec h(q_1\xi_1)\times$$
$$\exp(I^i(\psi_1 - \theta_1 + \theta_0))$$

iv. Untuk $\xi_1 \to -\infty$, pada ξ_2 konstan,

$$A(\xi,\tau) \to \sqrt{\frac{2\beta}{\gamma}}q_2\sec h(q_2\xi_2)\times$$
$$\exp(i(\psi_2 - \theta_2 + \theta_0))$$

Pada saat yang terpisah jauh selesaian dua soliton dinyatakan sebagai superposisi dari satu individu soliton. Maka interaksi dua paket gelombang pada saat terpisah jauh dipandang sebagai superposisi dua individu paket gelombang. Struktur amplitudo paket gelombang pada saat terpisah jauh dapat dituliskan sebagai berikut,

$$u(x,t) = \begin{cases} A_1(q_1,k_1,0,p_1)\big|_{\xi_1=tetap}e^{i\theta_1} + A_2(q_2,k_2,\Delta,p_2+2\Phi_1)\big|_{\xi_2=tetap}e^{i\theta_2}, t \to -\infty \\ A_1(q_1,k_1,\Delta,p_1+2\Phi_2)\big|_{\xi_1=tetap}e^{i\theta_1} + A_2(q_2,k_2,0,p_2)\big|_{\xi_2=tetap}e^{i\theta_2}, t \to \infty \end{cases}$$

Dari analisis di atas dapat dijelaskan bahwa pada saat terpisah jauh dua paket gelombang dinyatakan sebagai superposisi individu paket gelombang yang masing masing mempunyai parameter amplitudo q_1, q_2 dan bilangan gelombang k_1, k_2. Dua parameter yang lain p_1, p_2 mempunyai hubungan fisik sebagai selisih fase, yang akan menentukan proses interaksi.

4. IDENTIFIKASI PARAMETER

Pada saat terpisah amplitudo paket gelombang merambat secara translasi. Perhatikan bahwa osilasi modulasi sekunder memiliki fase $\psi_i - \theta_i + \theta_0$. Dengan demikian fase $\psi_i - \theta_i + \theta_0$ harus dinyatakan dalam koordinat bergerak ξ_i, dengan $\xi_i = \xi + 2c_i\beta\tau$.

Persamaan fase ini dituliskan kembali menjadi,

$$\begin{aligned}\psi_i - \theta_i + \theta_0 =&\ c_i\xi + \beta(c_i^2 - q_i^2)\tau + p_i - \\ & k_i x + \Omega(k_i)t + k_0 x - \Omega(k_0)t \\ =&\ (c_i + \frac{k_0 - k_i}{\varepsilon})\xi_i - \\ & \left\{\beta(c_i^2 + q_i^2) - (k_0 - k_i)\left(\frac{\Omega'(k_0)}{\varepsilon^2} - \right.\right. \\ & \left.\left.\frac{2c_i\beta}{\varepsilon}\right) + \frac{\Omega(k_0) - \Omega(k_1)}{\varepsilon^2}\right\}\tau + p\end{aligned}$$

Untuk ini harus ditentukan koefisien dari τ sama dengan nol. Sehingga diperoleh persamaan untuk c_i yang bergantung pada k_i dan q_i, dengan bilangan gelombang k_0 dipilih sebagai $k_0 = \frac{1}{2}(k_1 + k_2)$. Maka persamaan untuk c_i, memenuhi fungsi implisit berikut ini,

$$\beta(c_i^2 + q_i^2) - (k_0 - k_i)\left(\frac{\Omega'(k_0)}{\varepsilon^2} - \frac{2c_i\beta}{\varepsilon}\right) + \frac{\Omega(k_0) - \Omega(k_1)}{\varepsilon^2} = 0 \qquad (4.1)$$

Dengan demikian fase dari individu gelombang amplitudo hanya tergantung pada koordinat berjalan $\xi_i, i = 1,2$. Ini menunjukkan bahwa amplitudo $A(\xi_i, \tau)$ berjalan secara translasi.

Selanjutnya dengan pemilihan parameter tersebut dianalisis profil interaksi yang berbentuk simetris disekitar puncak interaksi. Pada puncak interaksi berlaku persamaan, $q_i\xi_i + \frac{1}{2}\Delta = 0, i = 1,2$. Dengan menyelesaikan sistem persamaan ini diperoleh titik pusat interaksi (x_0, t_0) pada sistem koordinat fisis (x, t), dimana

$$x_0 = \frac{\Delta(\Omega'(k_0)q_1 - \Omega'(k_0)q_2 + 2c_2\beta\varepsilon q_2 - 2c_1\beta\varepsilon q_1)}{\beta\varepsilon^2 q_1 q_2 \Delta k}$$

dan

$t_0 = \dfrac{\Delta(q_1 - q_2)}{4\beta\varepsilon^2 q_1 q_2 \Delta k}$. Untuk interaksi amplitudo pada puncak interaksi, terdapat hubungan antara c_i dan k_i yang dinyatakan oleh $c_i + (k_0 - k_i)/\varepsilon = 0.$ Dengan melakukan transformasi koordinat, $\bar{x} \to x - x_0$, maka komponen fase pada formula (2.5) menjadi

$$\psi_1 - \psi_2 + 2\alpha = (\Delta k)\bar{x} + \Delta p \qquad (4.2)$$

$$2q_i\xi_i + \Delta = 2q_i\bar{x} \qquad (4.3)$$

$$\psi_1 - \psi_2 + \varsigma_2 - \varsigma_1 + 2\alpha = \Delta k\bar{x} + \arctan(\tanh(q_2\bar{x})\tan\Phi_2) \; \arctan(\tanh(q_1\bar{x})\tan\Phi_1) + \Delta p \qquad (4.4)$$

$$q_1\xi_1 + q_2\xi_2 + \Delta = (q_1 + q_2)\bar{x} \qquad (4.5)$$

$$q_1\xi_1 - q_2\xi_2 = (q_1 - q_2)\bar{x} \qquad (4.6)$$

Dengan hasil analisis pada persamaan (4.2)–(4.6) ini, menyatakan bahwa komponen fungsi pada formula (3.1) tersebut adalah simetris terhadap $\bar{x} = 0$. Ini berarti bahwa interaksi amplitudo gelombang pada puncak interaksi adalah simetris. Selisih fase $p_1 - p_2$, ini menentukan profil interaksi. Untuk $p_1 - p_2 = 0 \bmod (2\pi)$, menyatakan profil interaksi *in-phase* (dalam fase), sedangkan untuk $p_1 - p_2 = \pi \bmod (2\pi)$ menyatakan profil interaksi *out-of-phase* (luar fase).

Pada interaksi amplitudo terdapat dua fungsi yang menentukan osilasi modulasi sekunder yaitu

$$\cos(\psi_1 - \psi_2 + 2\alpha)\big|_{(x_0,t_0)} = \cos(\Delta k\bar{x} + \Delta p) \qquad (4.7)$$

yang mempunyai panjang gelombang $\frac{2\pi}{\Delta k}$ dan

$$\cos(\psi_1 - \psi_2 + \zeta_2 - \zeta_1 + 2\alpha)\big|_{(x_0,t_0)} = \cos(\Delta k\bar{x} + \zeta_2 - \zeta_1 + \Delta p) \qquad (4.8)$$

dengan panjang gelombang disekitar $(x_0, t_0) \approx \dfrac{2\pi}{\Delta k}$. Kedua fungsi ini adalah simetris pada puncak interaksi terhadap koordinat x.

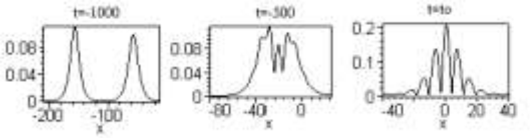
Profil interaksi amplitudo tersebut akan lebih rumit untuk nilai parameter $\mu = \tan\alpha = \dfrac{q_1 + q_2}{\Delta k}$ yang lebih kecil. Hal ini dapat dilihat dengan memperhatikan perbedaan skala panjang pada proses yang berkaitan. Ada dua skala panjang yang menentukan proses interaksi. Skala panjang yang menentukan lebar interval interaksi, yang nilainya berbanding terbalik jumlah parameter masing masing amplitudo,

$$\chi_{\text{int}} \approx \frac{1}{q_1 + q_2}$$

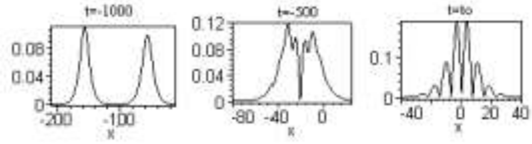
Skala panjang yang menentukan gelombang modulasi, diberikan oleh $\chi_{\text{mod}} = \frac{2\pi}{\Delta k}$. Parameter karakteristik dikenali mempunyai nilai yang sebading dengan rasio antara skala panjang modulasi dan skala panjang interaksi $\mu = \frac{q_1 + q_2}{\Delta k} \approx \frac{\chi_{\text{mod}}}{\chi_{\text{int}}}$

5. SIMULASI NUMERIK

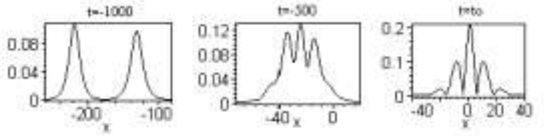
Profil interaksi amplitudo dua paket gelombang digambarkan dengan simulasi numerik pada, pada saat terpisah jauh sebelum interaksi dan sesudah interaksi), dan pada $t = t_0$ yaitu pada puncak interaksi dalam koordinat fisik (x,t). Dipilih dua nilai parameter karakteristik untuk $\mu = 1{,}1$, $\mu = 1.4$ dan $k_1 = 4$, $k_2 = 4{,}5$



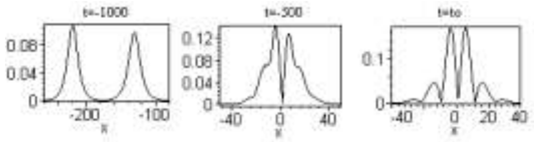
Gambar 2. Interaksi dalam fase ($\mu = 1{,}1$)



Gambar 3. Interaksi luar fase ($\mu = 1{,}1$)



Gambar 4.Interaksi dalam fase ($\mu = 1.4$)



Gambar 5. Interaksi luar fase untuk $\mu = 1.4$

Selama menuju proses interaksi amplitudo paket gelombang merambat secara translasi mengalami deformasi dan destorsi. Kemudian membentuk profil interaksi yang berbentuk simetris pada puncak interaksi.

6. PENUTUP

Telah dibahas dan dianalisis interaksi amplitudo paket gelombang dari persamaan IKdV dengan amplitudo memenuhi persamaan NLS. Interaksi ini menjelaskan secara implisit interaksi tak linier dua individu amplitudo paket gelombang.

Banyaknya hump interaksi amplitudo dua paket gelombang pada puncak interaksi ditentukan oleh rasio antara parameter skala panjang interaksi amplitudo dan skala panjang modulasi dari interaksi gelombang. Berkenaan dengan interaksi dua paket gelombang masih banyak masalah yang perlu dikaji yang berkaitan dengan gelombang pembawa.

Ucapan Terima Kasih

Ucapan terima kasih disampaikan kepada Prof. Dr. Edy Soewono atas sumbangan pemikiran dan Dirjen DIKTI melalui Hibah Penelitian Kerjasama Antar Perguruan Tinggi (Hibah Pekerti) dengan nomor kontrak: 064/P4T/DPPM/HPTP,PHP /III/2004

7. DAFTAR PUSTAKA

[1] Hirota, R, (1973), *J. Math. Phys.,* **14**: 805.

[2] Nusantara T, (2001), *Tesis Doktor*, ITB.

[3] Stansberg C.T. (1997), *Proc. 3rd Int. Symp. on the Ocean Wave Measurement and Analysis*, **2:** 1227.

[4] van Groesen E, T. Nusantara and E. Soewono, (2001), *Optical and Quantum Electronics,* **33**: 499.

[5] Van Groesen E, Andonowati, and E. Soewono, (1999), *Proc. Estonian Acad. Sci., Phys. Math.,* **48**:206.