

**INVERS MATRIKS MOORE PENROSE ATAS RING KOMUTATIF  
DENGAN ELEMEN SATUAN**

**(THE MOORE PENROSE INVERSE OF MATRICES OVER  
COMMUTATIVE RING WITH UNITY)**

**Titi Udjiani SRRM**

Matematika FMIPA Universitas Diponegoro Semarang

**Abstrak**

Jika  $A$  adalah matriks dengan elemen Ring komutatif dengan elemen satuan yang berukuran  $m \times n$  maka matriks invers dari  $A$  yang disebut dengan matriks invers Moore Penrose dari  $A$  ditulis  $G(A)$  dapat diperoleh dengan memenuhi syarat perlu dan cukup agar  $G(A)$  merupakan invers Moore Penrose dari  $A$

**Kata Kunci** : invers matrik, ring komutatif

**1. PENDAHULUAN**

Sudah diketahui bahwa invers matriks bujur sangkar dengan determinan  $\neq 0$  dapat diperoleh dengan menggunakan pertolongan matriks adjoint. Pengertian matriks invers dari matriks berukuran  $m \times n$  dengan elemen bilangan riil yang sekarang dikenal dengan sebutan matriks inverse Moore Penrose (Moore E. H., 1920). Tulisan ini membahas penentuan matriks invers Moore Penrose  $G(A)$  dari matriks atas ring komutatif dengan elemen satuan  $A$  dan menentukan syarat perlu dan cukup agar  $G(A)$  merupakan invers Moore Penrose dari  $A$ .

**2. MATRIKS INVERS MOORE PENROSE**

Dalam tulisan ini,  $R$  adalah ring komutatif dengan elemen satuan dan dengan involusi  $\bar{\phantom{a}}$ . Involusi  $\bar{\phantom{a}}$  adalah pemetaan  $a \in R \rightarrow \bar{a} \in R$  sedemikian sehingga untuk setiap  $a, b \in R$  berlaku :

$$(1) \overline{a+b} = \bar{a} + \bar{b}; (2) \overline{ab} = \bar{a} \cdot \bar{b}; (3) \overline{\bar{a}} = a$$

Selanjutnya  $M_R$  adalah himpunan matriks atas ring  $R$  dengan involusi :

$$(a_{ij}) \rightarrow (a_{ij})^* = (\overline{a_{ji}}), \text{ sedemikian sehingga berlaku :}$$

$$(i) (A + B)^* = A^* + B^*$$

$$(ii) (AB)^* = B^*A^*$$

$$(iii) A^{**} = A$$

dengan ukuran matriks A dan B memenuhi kondisi di atas.

**Definisi 1 (R.B.Bapat,1992)**

Suatu matriks  $A \in M_R$  dikatakan mempunyai invers Moore Penrose di  $M_R$  jika terdapat matriks  $A^+ \in M_R$  sedemikian sehingga : (i)  $AA^+A = A$  ; (ii)  $A^+AA^+ = A^+$  ;

(iii)  $(AA^+)^* = AA^+$  ; (iv)  $(A^+A)^* = A^+A$

Jika  $A^+$  ada maka tunggal dan disebut invers Moore Penrose dari A.

**Teorema 2(R.B.Bapat,1992)**

Diketahui  $A \in M_R$ .

Pernyataan di bawah ini berlaku untuk setiap invers Moore Penrose dari A

- a.  $(A^{++}) = A$
- b.  $(A^*)^+ = (A^+)^*$
- c.  $(AA^+)^+ = (A^+)^* A^+$  dan  $(A^+A)^+ = A^+(A^+)^*$
- d.  $AA^+, A^+A, I- AA^+, I- A^+A$  adalah hermit dan idempoten.

**Notasi:**

$A \in M_R$  yang berukuran  $m \times n$

$Q_{r, m}$  adalah himpunan dari himpunan bagian berurutan  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_r)$  dengan

$$1 \leq \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_r \leq m$$

$Q_{r, n}$  adalah himpunan dari himpunan bagian berurutan  $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots \beta_r)$  dengan

$$1 \leq \beta_1 < \beta_2 < \dots < \beta_r \leq n$$

$A_{\beta}^{\alpha}$  adalah sub matriks A yang ditentukan oleh baris sesuai dengan  $\alpha$  dan kolom sesuai dengan  $\beta$ . Jika  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_m)$  maka  $A_{\beta}^{\alpha}$  cukup ditulis  $A_{\beta}$ . Jika  $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots \beta_n)$  maka  $A_{\beta}^{\alpha}$  cukup ditulis  $A^{\alpha}$ .

$A = (a_{ji}) \in M_R$  yang berukuran  $m \times n$

$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_r) \in Q_{r, m}$  dan  $1 \leq j \leq m, j \in \alpha$  artinya terdapat indeks t sedemikian sehingga  $j = \alpha_t$  untuk suatu indeks t atau  $t = j(\alpha)$

Demikian juga  $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r) \in Q_{r, n}$  dan  $1 \leq i \leq n$ ,  $i \in \beta$  artinya terdapat indeks  $s$  sedemikian sehingga  $i = \beta_s$  atau  $s = i(\beta)$

Jika  $j \in \alpha$  dan  $i \in \beta$  maka kofaktor elemen  $a_{ij}$  submatriks  $A_{\beta}^{\alpha}$  dari  $A_{(m \times n)}$

adalah  $(-1)^{j(\alpha)+i(\beta)}$  det  $A_{\beta_i}^{\alpha_j}$  dengan  $\alpha_j \in Q_{r-1, m}$  berisi elemen-elemen  $\alpha$  dengan mengabaikan baris ke  $j$  dan  $\beta_i \in Q_{r-1, m}$  berisi elemen-elemen  $\beta$  dengan mengabaikan kolom ke  $i$ .

Selanjutnya jika  $j \in \alpha$  dan  $1 \leq k \leq m$  didefinisikan  $A_{\beta}^{\alpha_{(j \leftarrow k)}}$  adalah matriks berukuran  $r \times r$  yang sama dengan matriks  $A_{\beta}^{\alpha}$ , kecuali pada elemen  $a_{j\beta}$ , dari baris  $j(\alpha)$  diganti secara bersesuaian dengan elemen-elemen  $a_{k\beta}$ .

### **Teorema 3 (R.B.Bapat,1992)**

Jika  $A = (a_{ji}) \in M_R$  dengan rank  $r$ ,

$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r) \in Q_{r, m}$

$\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r) \in Q_{r, n}$ ,  $j \in \alpha$ ,  $1 \leq k \leq m$ ,  $1 \leq h \leq n$  maka

$$1. \text{ Det } A_{\beta}^{\alpha_{(j \leftarrow k)}} = \sum_{i \in \beta} (-1)^{j(\alpha)+i(\beta)} a_{ki} \text{ det } A_{\beta_i}^{\alpha_j}$$

$$2. a_{kh} \text{ det } A_{\beta}^{\alpha} = \sum_{j \in \alpha} a_{jh} \text{ det } A_{\beta}^{\alpha_{(j \leftarrow k)}} .$$

### **Bukti :**

(1) Dengan menggunakan ekspansi baris ke  $k$

$$\text{det } A_{\beta}^{\alpha_{(j \leftarrow k)}} = \sum_{s=1}^r (-1)^{j(\alpha)+s} a_{k\beta_s} \text{ det } A_{\beta_{\beta_s}}^{\alpha_j} = \sum_{i \in \beta} (-1)^{j(\alpha)+i(\beta)} a_{ki} \text{ det } A_{\beta_i}^{\alpha_j}$$

(2) Diambil  $A_{(\beta, h)}^{(\alpha, k)}$  adalah matriks berukuran  $(r + 1) \times (r + 1)$  yang dibangun oleh baris-baris  $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r, k)$  dan kolom-kolom  $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r, h)$  dari  $A$ . Karena rank  $A = r$  maka semua minor yang berukuran  $(r + 1) \times (r + 1)$  bernilai nol. Akibatnya  $A_{(\beta, h)}^{(\alpha, k)} = 0$ . Dengan menggunakan ekspansi kolom terakhir diperoleh :

$$0 = \sum_{t=1}^r (-1)^{t+(r+1)} a_{\alpha_t, h} \text{ det } A_{\beta}^{(\alpha_{\alpha_t}, k)} + (-1)^{(r+1)+(r+1)} a_{kh} \text{ det } A_{\beta}^{\alpha}$$

$$\begin{aligned} a_{kh} \det A_{\beta}^{\alpha} &= \sum_{t=1}^r (-1)^{t+r} a_{\alpha_t, h} \det A_{\beta}^{(\alpha_t, k)} = \sum_{j \in \alpha} (-1)^{j(\alpha)+r} a_{jh} \det A_{\beta}^{(\alpha_j, k)} \\ &= \sum_{j \in \alpha} (-1)^{j(\alpha)+r} a_{jh} (-1)^{r-j(\alpha)} \det A_{\beta}^{\alpha_{(j \leftarrow k)}} = \sum_{j \in \alpha} a_{jh} \det A_{\beta}^{\alpha_{(j \leftarrow k)}} \end{aligned}$$

(Terbukti)

**Teorema 4 (R.B.Bapat,1992)**

Diketahui  $A \in M_R$  ( $m \times n$ ) dengan rank  $r$ . Jika  $u(A) = \sum_{\alpha \in Q_{r,m}} \sum_{\beta \in Q_{r,n}} \det A_{\beta}^{\alpha} \overline{\det A_{\beta}^{\alpha}}$

mempunyai invers Moore Penrose  $u(A)^+$  di  $R$  dan  $g_{ij} = u(A)^+$

$\sum_{\alpha \in Q_{r,m}} \sum_{\substack{\beta \in Q_{r,n} \\ j \in \alpha \\ i \in \beta}} (-1)^{j(\alpha)+i(\beta)} \overline{\det A_{\beta}^{\alpha}} \det A_{\beta_i}^{\alpha_j}$ . Maka  $G(A) = (g_{ij}(A))$  adalah invers Moore

Penrose dari  $A$  jika dan hanya jika  $u(A) u(A)^+ A = A$ .

**Bukti :**

Selanjutnya untuk menyederhanakan penulisan  $\sum_{\alpha \in Q_{r,m}}$  ditulis dengan  $\sum_{\alpha}$ .

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow (1). (A G(A))_{kj} &= \sum_{i=1}^n a_{ki} g_{ij} = \sum_{i=1}^n a_{ki} \left( u(A)^+ \sum_{\alpha} \sum_{\substack{\beta \\ j \in \alpha \\ i \in \beta}} (-1)^{j(\alpha)+i(\beta)} \overline{\det A_{\beta}^{\alpha}} \det A_{\beta_i}^{\alpha_j} \right) \\ &= u(A)^+ \sum_{\alpha} \sum_{\beta} \overline{\det A_{\beta}^{\alpha}} \sum_{\substack{\beta \\ i \in \beta}} (-1)^{j(\alpha)+i(\beta)} a_{ki} \det A_{\beta_i}^{\alpha_j} \\ &= u(A)^+ \sum_{\alpha} \sum_{\beta} \overline{\det A_{\beta}^{\alpha}} \det A_{\beta}^{\alpha_{(j \leftarrow k)}} \end{aligned}$$

Jika  $j = k$ ,  $\det A_{\beta}^{\alpha_{(j \leftarrow k)}} = \det A_{\beta}^{\alpha}$  sehingga  $(A G(A))_{jj} = u(A)^+ \sum_{\alpha} \sum_{\beta} \overline{\det A_{\beta}^{\alpha}} \det A_{\beta}^{\alpha}$

$$= \overline{(A G(A))_{jj}}$$

Jika  $j \neq k$  dan  $k \in \alpha$ , maka terdapat dua baris yang sama sehingga  $\det A_{\beta}^{\alpha_{(j \leftarrow i)}} = 0$

Jika  $j \neq k$  dan  $k \notin \alpha$ ,  $\alpha_{jk} \in Q_{r,m}$  adalah elemen-elemen dari  $\alpha$  dengan mengganti  $j$  dengan  $k$ .

$$\det A_{\beta}^{\alpha(j \leftarrow k)} = (-1)^{j(\alpha)+k(\alpha_k)} \det A_{\beta}^{\alpha_k}$$

jika  $\gamma = \alpha_{jk}$  maka  $\alpha = \gamma_{kj}$ .

$$\begin{aligned} \left(\overline{AG(A)}\right)_{kj} &= u(A)^+ \sum_{\substack{\alpha \\ j \in \alpha \\ k \notin \alpha}} \sum_{\beta} \det A_{\beta}^{\alpha} \overline{\det A_{\beta}^{\alpha(j \leftarrow k)}} \\ &= u(A)^+ \sum_{\substack{\alpha \\ j \in \alpha \\ k \notin \alpha}} \sum_{\beta} (-1)^{j(\alpha)+k(\alpha_k)} \det A_{\beta}^{\alpha} \overline{\det A_{\beta}^{\alpha_k}} \\ &= u(A)^+ \sum_{\substack{\gamma \\ k \in \gamma \\ j \notin \gamma}} \sum_{\beta} (-1)^{j(\gamma_{kj})+k(\gamma_k)} \det A_{\beta}^{\gamma_{kj}} \overline{\det A_{\beta}^{\gamma}} \\ &= u(A)^+ \sum_{\substack{\gamma \\ k \in \gamma \\ j \in \gamma}} \sum_{\beta} \overline{\det A_{\beta}^{\gamma}} \det A_{\beta}^{\gamma(k \leftarrow j)} = (AG(A))_{jk} \end{aligned}$$

Sampai di sini terbukti bahwa  $(AG(A))^* = AG(A)$ .

$$\begin{aligned} \text{(ii)} (G(A)A)_{ih} &= \sum_{j=1}^m G_i a_{jh} \\ &= \sum_{j=1}^m u(A)^+ \sum_{\substack{\alpha \\ j \in \alpha}} \sum_{\substack{\beta \\ i \in \beta}} (-1)^{j(\alpha)+i(\beta)} \overline{\det A_{\beta}^{\alpha}} \det A_{\beta_i}^{\alpha_j} a_{jh} \\ &= u(A)^+ \sum_{\substack{\alpha \\ i \in \beta}} \sum_{\beta} \overline{\det A_{\beta}^{\alpha}} \sum_{\substack{j \\ j \in \alpha}} (-1)^{j(\alpha)+i(\beta)} a_{jh} \det A_{\beta_i}^{\alpha_j} \\ &= u(A)^+ \sum_{\alpha} \sum_{\substack{\beta \\ i \in \beta}} \overline{\det A_{\beta}^{\alpha}} \det A_{\beta(j \leftarrow h)}^{\alpha} \end{aligned}$$

Jika  $i = h$ ;

$$\begin{aligned} \det A_{\beta(j \leftarrow h)}^{\alpha} &= \det A_{\beta}^{\alpha} \text{ sehingga } (G(A)A)_{ii} = u(A)^+ \sum_{\alpha} \sum_{\substack{\beta \\ i \in \beta}} \overline{\det A_{\beta}^{\alpha}} \det A_{\beta}^{\alpha} \\ &= u(A)^+ u(A) = \left(\overline{G(A)A}\right)_{ii} \end{aligned}$$

Jika  $i \neq h$ ,  $h \in \beta$  maka terdapat dua kolom yang sama sehingga  $\det A_{\beta(i \leftarrow h)}^{\alpha} = 0$

Jika  $i \neq h$ ,  $h \notin \beta$ .  $\beta_{ih} \in Q_{r,m}$  adalah elemen-elemen dari  $\beta$  dengan mengganti  $i$  dengan  $h$ .

Jika  $\delta = \beta_{ih}$  maka  $\beta = \delta_{hi}$ .

$$\begin{aligned}
 \overline{(G(A)A)}_{ih} &= u(A)^+ \sum_{\alpha} \sum_{\substack{\beta \\ i \in \beta \\ h \notin \beta}} \det A_{\beta}^{\alpha} \overline{\det A_{\beta(i \leftarrow h)}^{\alpha}} \\
 &= u(A)^+ \sum_{\alpha} \sum_{\substack{\beta \\ i \in \beta \\ h \notin \beta}} (-1)^{i(\beta)+h(\beta_h)} \det A_{\beta}^{\alpha} \overline{\det A_{\beta_h}^{\alpha}} \\
 &= u(A)^+ \sum_{\alpha} \sum_{\substack{\delta \\ h \notin \delta \\ i \notin \delta}} (-1)^{i(\delta_{hi})+h(\delta)} \det A_{\delta_{hi}}^{\alpha} \overline{\det A_{\delta}^{\alpha}} \\
 &= u(A)^+ \sum_{\alpha} \sum_{\substack{\delta \\ h \in \delta \\ i \notin \delta}} \overline{\det A_{\delta}^{\alpha} \det A_{\beta(i \leftarrow h)}^{\alpha}} = (G(A)A)_{ih}
 \end{aligned}$$

Terbukti  $(G(A)A)^* = G(A)A$

$$\begin{aligned}
 \text{(iii) } (A G(A) A) &= \sum_{h=1}^m (A G(A))_{ih} a_{hj} \\
 &= \sum_h u(A)^+ \sum_{\alpha} \sum_{\substack{\beta \\ h \in \alpha}} \overline{\det A_{\beta}^{\alpha} \det A_{\beta}^{\alpha_{(h \leftarrow i)}}} a_{hj} \\
 &= u(A)^+ \sum_{\alpha} \sum_{\beta} \overline{\det A_{\beta}^{\alpha}} \sum_{\substack{h \\ h \in \alpha}} a_{hj} \det A_{\beta}^{\alpha_{(h \leftarrow i)}} \\
 &= u(A)^+ \sum_{\alpha} \sum_{\beta} \overline{\det A_{\beta}^{\alpha}} a_{ij} \det A_{\beta}^{\alpha} \\
 &= u(A)^+ \left( \sum_{\alpha} \sum_{\beta} \overline{\det A_{\beta}^{\alpha} \det A_{\beta}^{\alpha}} \right) a_{ij} = u(A)^+ u(A) a_{ij}.
 \end{aligned}$$

$$A G(A) A = u(A)^+ u(A) A = u(A) u(A)^+ A = A$$

$$\begin{aligned}
 \text{(iv) } (G(A) A G(A))_{ij} &= \sum_{h=1}^n \sum_{k=1}^m g_{ik} a_{kh} g_{hj} \\
 &= \sum_h \sum_k u(A)^+ \sum_{\substack{\alpha \\ k \in \alpha}} \sum_{\substack{\beta \\ i \in \beta}} (-1)^{k(\alpha)+i(\beta)} \overline{\det A_{\beta}^{\alpha} \det A_{\beta_1}^{\alpha_k}} \times \\
 &\quad a_{kh} \times \left( u(A)^+ \sum_{\gamma} \sum_{\substack{\delta \\ h \in \delta}} (-1)^{j(\gamma)+h(\delta)} \overline{\det A_{\delta}^{\gamma} \det A_{\delta_h}^{\gamma_j}} \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \left( \left[ u(A)^+ \right]^2 \sum_{\alpha} \sum_{\substack{\beta \\ i \in \beta}} \sum_{\substack{\gamma \\ j \in \gamma}} \sum_{\delta} (-1)^{i(\beta)+j(\gamma)} \overline{\det A_{\beta}^{\alpha}} \overline{\det A_{\beta}^{\gamma}} \right) \\
 &\quad \left( \sum_{h \in \delta} \sum_{k \in \alpha} (-1)^{k(\alpha)+h(\delta)} \det A_{\beta_i}^{\alpha_k} a_{kh} \det A_{\delta_h}^{\gamma_j} \right) \\
 &= \left( \left[ u(A)^+ \right]^2 \sum_{\alpha} \sum_{\substack{\beta \\ i \in \beta}} \sum_{\substack{\gamma \\ j \in \gamma}} \sum_{\delta} (-1)^{i(\beta)+j(\gamma)} \overline{\det A_{\delta}^{\alpha}} \overline{\det A_{\beta}^{\gamma}} \right) \\
 &\quad \left( \sum_{h \in \delta} \sum_{k \in \alpha} (-1)^{k(\alpha)+h(\delta)} \det A_{\delta_h}^{\alpha_k} a_{kh} \det A_{\beta_i}^{\gamma_j} \right) \\
 &= \left( \left[ u(A)^+ \right] \sum_{\substack{\beta \\ i \in \beta}} \sum_{\substack{\gamma \\ j \in \gamma}} (-1)^{i(\beta)+j(\gamma)} \overline{\det A_{\beta}^{\gamma}} \det A_{\beta_i}^{\gamma_j} \right) \\
 &\quad \left( u(A)^+ \sum_{\alpha} \sum_{\delta} \sum_{h \in \delta} \sum_{k \in \alpha} (-1)^{k(\alpha)+h(\delta)} a_{kh} \det A_{\delta_h}^{\alpha_k} \overline{\det A_{\delta}^{\alpha}} \right) \\
 &= u(A)^+ u(A) g_{ij} = g_{ij}
 \end{aligned}$$

$$G(A) A G(A) = G(A)$$

Dari (i),(ii),(iii) dan (iv) terbukti bahwa  $G(A)$  adalah invers Moore Penrose dari  $A$ .

$\Rightarrow$  karena  $A G(A) A = u(A) u(A)^+ A$ ;  $G(A) A G(A) = G(A)$ ;  $(A G(A))^* = A G(A)$ ;

$(G(A) A)^* = G(A) A$  maka  $A^+ = G(A)$  jika dan hanya jika  $u(A) u(A)^+ A = A$

**(terbukti).**

**Contoh :**

Diberikan  $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 3 & 1 \end{bmatrix} \in M_{Z_5}$  dengan rank  $r = 3$ .

Akan ditentukan matriks invers Moore Penrose  $G(A)$  dari  $A$ .

$$j = 1, 2, 3 ; i = 1, 2, 3 ; \det A_{\beta}^{\alpha} = \det \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 3 \end{bmatrix} = 0$$

$$j = 1, 2, 3 ; i = 1, 2, 4 ; \det A_{\beta}^{\alpha} = \det \begin{bmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix} = 3$$

$$j = 1, 2, 3 ; i = 1, 3, 4 ; \det A_{\beta}^{\alpha} = \det \begin{bmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix} = 0$$

$$j = 1, 2, 3 ; i = 2, 3, 4 ; \det A_{\beta}^{\alpha} = \det \begin{bmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \end{bmatrix} = 2$$

$$u(A) = 0.0 + 3.3 + 0.0 + 2.2 = 3; \quad u(A)^+ = 2$$

$$g_{11} = 2 \{ (-1)^{1+1}.0. \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} + (-1)^{1+1}.3. \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{1+1}.0. \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \} = 0$$

Dengan cara sama diperoleh  $g_{12} = 4 ; g_{13} = 0 ; g_{21} = 1 ; g_{22} = 0 ; g_{23} = 1 ; g_{31} = 0$

$$; g_{32} = 4 ; g_{33} = 0 ; g_{41} = 1 ; g_{42} = 1 ; g_{43} = 2. \text{ Sehingga } G(A) = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa  $G(A)$  adalah invers Moore Penrose dari  $A$ .

$$\begin{aligned} \text{(i) } A G(A) A &= \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 3 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 3 & 1 \end{bmatrix} = A \end{aligned}$$



$$(ii) G(A) A G(A) = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} = G(A)$$

$$(iii) (A G(A)) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = A G(A)$$

$$(iv) (G(A) A) = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = G(A) A$$

Dari (i), (ii), (iii) dan (iv) terbukti  $A^+ = G(A)$ . Selanjutnya  $u(A) u(A)^+ A = 3.2.A = A$

Dalam hal ini  $u(A) u(A)^+ = e(A)$  disebut Moore indempotent dari A.

### 3. KESIMPULAN

Jika A adalah matriks berukuran m x n atas ring komutatif dengan elemen satuan dan rank A = r, maka matriks invers Moore Penrose dari A adalah

$$G(A) = (g_{ij}(A)) \text{ dengan } g_{ij} = u(A)^+ \sum_{\substack{\alpha \in Q_r, m \\ j \in \alpha}} \sum_{\substack{\beta \in Q_r, n \\ i \in \beta}} (-1)^{j(\alpha)+i(\beta)} \overline{\det A_\beta^\alpha} \det A_{\beta_i}^{\alpha_j} \text{ dan}$$

$$u(A) = \sum_{\alpha \in Q_{r,m}} \sum_{\beta \in Q_{r,n}} \overline{\det A_\beta^\alpha} \det A_\beta^\alpha \text{ mempunyai invers Moore Penrose } u(A)^+ \text{ di } R.$$

Syarat perlu dan cukup agar G(A) merupakan invers Moore Penrose dari A adalah  $u(A) u(A)^+ A = A$ .

**DAFTAR PUSTAKA :**

- F.R. Gantmacher , 1960, The Theory of Matrices, Chealsea Publishing Company, New York.
- Jin Ho Kwak, Sung pyo Hong,1997,Linear Algebra, Birkhauser,Boston.
- John B Fraeleigh, 1994, A First Course in Abstract Algebra, Addison Wesley Publishing Company Inc, United States.
- R.B. Bapat, Donald W. Robinson, 1992, The Moore Penrose Inverse over a commutative Ring, Elsevier Science Publishing Co.,Inc.,New York.
- R.B.Bapat, K.P.S. Bhaskara Rao and K.Manjunatha Prasad, 1990, Generalized Inverses Over Integral Domain, Elsevier Science Publishing Co.,Inc.,New York..
- William C.Brown, 1993, Matrices Over Commutative Rings, Marcel Dekker Inc., New York.