ANALISIS VARIAN RANCANGAN FAKTORIAL DUA FAKTOR RAL DENGAN METODE AMMI

SKRIPSI

Oleh:

Dwi Retno Sulistyaningsih S

J2A 605 037

PROGRAM STUDI MATEMATIKA JURUSAN MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS DIPONEGORO

SEMARANG

2010

ANALISIS VARIAN RANCANGAN FAKTORIAL DUA FAKTOR RAL DENGAN METODE AMMI

Oleh:

Dwi Retno Sulistyaningsih S

J2A 605 037

Sebagai Salah Satu Syarat untuk Memperoleh Gelar
Sarjana Sains pada Jurusan Matematika

JURUSAN MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS DIPONEGORO

SEMARANG

2010

HALAMAN PENGESAHAN I

Judul Skripsi : Analisis Varian Rancangan Faktorial Dua Faktor RAL dengan Metode AMMI

Nama Mahasiswa : Dwi Retno Sulistyaningsih S

NIM : J2A 605 037

Telah diujikan pada sidang Tugas Akhir tanggal 11 Agustus 2010 dan dinyatakan **LULUS** pada tanggal 24 Agustus 2010

Semarang, Agustus 2010

Panitia Penguji Tugas Akhir

Ketua,

Dra. Tatik Widiharih, M.Si
NIP. 1961 09 28 1986 03 2 002

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika
FMIPA UNDIP

Dr. Widowati, S. Si, M. Si
NIP. 1969 02 14 1994 03 2 002

Mengetahui,
a/n. Ketua Program Studi Matematika
Sekretaris

Suryoto, S.Si, M.Si
NIP. 1968 07 14 1994 03 1 004

HALAMAN PENGESAHAN II

Judul Skripsi : Analisis Varian Rancangan Faktorial Dua Faktor RAL dengan Metode AMMI

Nama Mahasiswa : Dwi Retno Sulistyaningsih S

NIM : J2A 605 037

Telah diujikan pada sidang Tugas Akhir tanggal 11 Agustus 2010.

Semarang, Agustus 2010

Pembimbing I	Pembimbing II
Triastuti Wuryandari, S.Si, M.Si	Diah Safitri, S.Si, M.Si
NIP. 1971 09 06 1998 03 2 001	NIP. 1975 10 08 2003 12 2 001

KATA PENGANTAR

Puji syukur penulis panjatkan kehadirat Allah SWT, yang telah melimpahkan rahmat dan hidayah-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan Tugas Akhir dengan judul "*Analisis Varian Rancangan Faktorial Dua Faktor RAL dengan Metode AMMI*" ini. Kemudian sholawat dan salam atas Nabi yang diutus Allah untuk menuntun semua hamba (manusia), dan keluarga serta sahabat yang mengikuti petunjuk-Nya.

Dalam penulisan ini tidak sedikit hambatan dan kesulitan yang penulis hadapi. Penulis menyadari bahwa Tugas Akhir ini tidak akan terselesaikan dengan baik tanpa dukungan, motivasi, nasehat dan bantuan dari berbagai pihak. Oleh karena itu dalam kesempatan ini penulis mengucapkan terima kasih kepada :

1. Ibu Dr. Widowati, S.Si, M.Si selaku Ketua Jurusan Matematika FMIPA Universitas Diponegoro,
2. Bapak Bambang Irawanto, S.Si, M.Si selaku Ketua Program Studi Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Diponegoro,
3. Ibu Triastuti Wuryandari, S.Si, M.Si selaku dosen pembimbing I yang dengan penuh kesabaran membimbing dan memberikan ilmu, arahan, nasehat dan sarannya kepada penulis dalam penulisan Tugas Akhir ini,
4. Ibu Diah Safitri, S.Si, M.Si selaku dosen pembimbing II yang juga telah membimbing dan mengarahkan penulis dalam penulisan Tugas Akhir ini,
5. Bapak Drs. YD.Sumanto, M.Si selaku dosen wali yang telah mengarahkan penulis dalam hal akademik selama masa perkuliahan.

6. Ayah, Ibu dan keluarga tercinta atas segala perhatian dan kasih sayang, bantuan materi maupun non materi yang tak ternilai harganya serta doa-doa yang senantiasa dipanjatkan.

Penulis menyadari bahwa Tugas Akhir ini masih jauh dari kesempurnaan, sehingga segala kritik dan saran yang membangun akan penulis terima dengan tangan terbuka. Semoga bermanfaat bagi semua pihak. Terima kasih.

Semarang,   Agustus 2010

Penulis

ABSTRAK

Percobaan faktorial adalah suatu percobaan dimana dalam satu keadaan (unit percobaan) dicobakan secara bersamaan dari beberapa (2 atau lebih) percobaan-percobaan tunggal. Percobaan faktorial dicirikan dengan perlakuan yang merupakan kombinasi dari semua kemungkinan kombinasi dari taraf-taraf faktor yang dicobakan. Dalam eksperimen ini, diasumsikan bahwa model AMMI (additive main effect and multiplicative interaction) adalah percobaan faktorial dua faktor dengan pengaruh utama perlakuan bersifat aditif dan pengaruh interaksi dimodelkan dengan model bilinier. Model AMMI menganalisis interaksi pada rancangan faktorial dua faktor dari analisis ragam dan analisis komponen utama.

Kata kunci: Percobaan Faktorial, AMMI, Analisis Ragam, Analisis Komponen Utama

ABSTRACT

Factorial experiment is an experiment where is in a condition (experiment unit) is being experimented in the same time from several (2 or more) single experiment. Factorial experiment characterized using treatment which are the combination of all combination's probabilities from experimented factor's levels. In this experiment, model is being assumed become AMMI (additive main effect and multiplicative interaction) model is factorial experiment two factor with additive main effect and multiplicative interaction with bilinier model. AMMI model to analyze the interaction on two factor design factorial from variability analysis and principal component analysis.

Key words: Factorial Design, AMMI, analysis of variance, principal component analysis

DAFTAR ISI

DAFTAR TABEL

DAFTAR LAMPIRAN

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Percobaan pada umumnya dilakukan untuk menemukan sesuatu. Oleh karena itu secara teoritis, percobaan diartikan sebagai tes atau penyelidikan terencana untuk mendapatkan fakta baru *(Steel dan Torrie 1991)*. Rancangan percobaan adalah suatu tes atau serangkaian tes dengan maksud mengamati dan mengidentifikasi perubahan-perubahan pada output respon yang disebabkan oleh perubahan-perubahan yang dilakukan pada variabel input dari suatu proses *(Montgomery, 2005)*. Dapat juga diartikan sebagai suatu uji atau sederetan uji baik itu menggunakan statistika deskripsi maupun statistika inferensia, yang bertujuan untuk mengubah peubah input menjadi suatu output yang merupakan respon dari percobaan tersebut *(Mattjik, A dan Sumertajaya, I 2000)*.

Suatu percobaaan biasanya dilakukan untuk menyelidiki apakah ada perbedaan efek dari beberapa perlakuan terhadap suatu percobaan. Kerap kali dijumpai bahwa hasil percobaan itu sebenarnya juga dipengaruhi oleh faktor-faktor lain yang diselidiki. Dengan adanya hal demikian maka di dalam menganalisis hasil percobaan harus diperhitungkan variabel-variabel yang dianggap mempengaruhi hasil percobaan.

Terkadang suatu percobaan digunakan hanya untuk menguji pengaruh dari satu faktor. Padahal dalam kenyataannya banyak faktor yang mempengaruhi suatu proses. Ada faktor yang bekerja sendiri, ada faktor yang bekerja sama dengan faktor yang lain. Bila peneliti hanya menguji pengaruh dari satu faktor saja, dirasakan pemahaman tentang kejadian yang sebenarnya sangat kurang, sehingga banyak peneliti melakukan percobaan dengan lebih dari satu faktor untuk mengetahui pengaruh masing-masing faktor dan interaksi antar faktor. Sebagian besar percobaan dalam penelitian meliputi beberapa variabel atau lebih dari dua faktor yang diamati dalam suatu percobaan. Pada situasi ini, rancangan yang digunakan adalah rancangan faktorial.

Percobaan faktorial adalah suatu percobaan dimana dalam satu keadaan (unit percobaan) dicobakan secara bersamaan dari beberapa (2 atau lebih) percobaan-percobaan tunggal. Dari percobaan faktorial, selain dapat diketahui pengaruh-pengaruh tunggal faktor yang diujikan, dapat diketahui pula pengaruh gabungan (interaksi) dari masing-masing faktor yang diujikan. Percobaan faktorial dicirikan dengan perlakuan yang merupakan kombinasi dari semua kemungkinan kombinasi dari taraf-taraf faktor yang dicobakan.

Keuntungan dari penggunaan percobaan faktorial adalah :

1. Karena percobaan faktorial merangkum beberapa percobaan faktor tunggal sekaligus, maka percobaan faktorial akan lebih menepatgunakan dan dapat menghemat waktu, bahan, alat, tenaga kerja dan modal yang tersedia dalam mencapai semua sasaran percobaan-percobaan faktor tunggal sekaligus.
2. Dapat diketahui adanya kerjasama antara faktor (interaksi) dan pengaruh faktor dari dua faktor atau lebih.

Selain keuntungan yang diperoleh, percobaan faktorial memiliki kelemahan, yaitu makin banyak faktor yang diteliti, kombinasinya perlakuan makin meningkat pula, sehingga ukuran percobaan makin besar dan akan mengakibatkan ketelitiannya makin berkurang, perhitungan / analisisnya menjadi lebih rumit bila faktor / level ditambah, sehingga memerlukan ketelitian yang lebih cermat dan interaksi lebih dari dua faktor agak sulit untuk menginterpretasikan *(Steel dan Torrie 1991)*.

Salah satu percobaan faktorial untuk mengetahui adanya kerjasama antar faktor interaksi dari percobaan dua faktor atau lebih adalah percobaan lokasi ganda. Percobaan lokasi ganda (*multilocation*) memainkan peranan penting dalam pengembangbiakan tanaman (*plant breeding*) dan penelitian-penelitian agronomi. Data yang diperoleh dari percobaan ini sedikitnya mempunyai tiga tujuan utama dalam bidang pertanian, yaitu keakuratan pendugaan dan peramalan hasil berdasarkan data percobaan yang terbatas, menentukan stabilitas hasil dan pola respon genotif atau perlakuan agronomi terhadap lingkungan dan seleksi genotip atau perlakuan agronomi terbaik untuk dikembangkan pada masa yang akan datang atau lokasi yang baru.

Analisis statistika yang biasa diterapkan pada percobaan uji daya hasil adalah analisis ragam (ANOVA), dan analisis komponen utama (AKU). Penilaian terhadap kedua analisis ini dianggap kurang memadai dalam menganalisis keefektifan struktur data yang kompleks. Analisis ragam merupakan suatu model aditif yang hanya menerangkan keefektifan pengaruh utama. Anova mampu menguji interaksi tetapi tidak mampu menentukan pola genotip atau lingkungan untuk meningkatkan interaksi. Sedangkan pada analisis komponen utama hanya efektif menjelaskan pengaruh interaksi tanpa menerangkan pengaruh utamanya.

Dengan demikian untuk memperoleh gambaran secara lebih luas dari struktur data faktorial diperlukan pendekatan lain yaitu pendekatan Pengaruh Utama Aditif dengan Interaksi Ganda (UIAG) atau Additive Main Effects Multiplicative Interaction

(AMMI), yang merupakan gabungan dari pengaruh aditif pada analisis ragam dan pengaruh multiplikasi pada analisis komponen utama.

1.2 Permasalahan

Permasalahan pada penulisan tugas akhir ini adalah menganalisa rancangan faktorial RAL dengan asumsi model yang digunakan adalah model AMMI, sehingga dapat diketahui tabel analisis variansinya dan dapat digunakan untuk mengatasi permasalahan dalam suatu percobaan.

1.3 Pembatasan Masalah

Dalam hal ini permasalahan yang akan dibahas terbatas pada rancangan faktorial dua faktor dengan dasar Rancangan Acak Lengkap (RAL) serta analisisnya dengan asumsi bahwa model yang digunakan adalah model AMMI

1.4 Tujuan Penulisan

Adapun tujuan dari penulisan ini adalah memahami rancangan percobaan khususnya rancangan faktorial dua faktor dengan dasar RAL dengan model AMMI, menganalisa pengaruh faktor genotip dan lingkungan, menentukan banyaknya komponen utama AMMI dengan menggunakan gabungan dari pengaruh aditif pada analisis ragam dan pengaruh multiplikasi pada analisis komponen utama.

1.5 Sistematika Penulisan

Sistematika penulisan tugas akhir ini adalah : Bab I merupakan pendahuluan yang berisi tentang latar belakang, permasalahan, pembatasan masalah, tujuan penulisan dan sistematika penulisan. Bab II merupakan konsep dasar berisi tentang rancangan faktorial dua faktor RAL, checking model, uji perbandingan berganda Duncan, matriks, analisis komponen utama, dan analisis biplot.. Bab III merupakan pembahasan tentang metode AMMI berisi penguraian bilinier pengaruh interaksi, model linier metode AMMI, perhitungan jumlah kuadrat, penguraian derajat kebebasan, penguraian nilai singular, nilai komponen AMMI, penentuan banyaknya komponen AMMI, manfaat analisis AMMI, contoh aplikasi faktorial dua faktor model AMMI dan analisis AMMI. Bab IV merupakan kesimpulan yang dapat diambil berdasarkan pembahasan bab sebelumnya.

BAB II

KONSEP DASAR

2.1 Rancangan Faktorial RAL Dua Faktor

Dalam beberapa bidang tertentu seringkali respon yang muncul merupakan akibat dari beberapa faktor. Bila respon yang muncul hanya dipengaruhi oleh satu faktor dikenal dengan percobaan faktor tunggal. Apabila faktor yang muncul lebih dari satu dikenal dengan percobaan multi faktor (*Widiharih, T 2007).*

Percobaan dicirikan dengan perlakuan yang merupakan komposisi dari semua kemungkinan kombinasi dari taraf-taraf faktor dari faktor yang dicobakan. Percobaan yang melibatkan dua faktor, faktor A dengan 2 taraf faktor (a_1 dan a_2) dan faktor B dengan 3 taraf faktor (b_1, b_2, dan b_3) dapat dinyatakan sebagai percobaan faktorial 2 x 3. Jika faktor A mempunyai a taraf dan faktor B mempunyai b taraf maka banyaknya kombinasi dinyatakan dengan a x b x n. Dimana n adalah banyaknya ulangan. Percobaan yang melibatkan dua faktor, faktor A dengan 2 taraf faktor (a_1 dan a_2) dan faktor B dengan 3 taraf faktor (b_1, b_2, dan b_3) maka yang dimaksud dengan perlakuan merupakan kombinasi dari semua taraf faktor yaitu : a_1b_1, a_1b_2, a_1b_3, a_2b_1, a_2b_2, a_2b_3.

Percobaan dua faktor dapat diaplikasikan secara langsung terhadap seluruh satuan-satuan percobaan. Jika satuan percobaan yang digunakan relatif homogen, maka disebut rancangan dua faktor dalam Rancangan Acak Lengkap (RAL). Jika satuan percobaan yang digunakan heterogen dan memerlukan pengelompokan satu arah maka digunakan rancangan dasar Rancangan Acak Kelompok Lengkap (RAKL).

2.1.1 Model Linier Rancangan Faktorial RAL Dua Faktor

Model linier untuk percobaan faktorial yang terdiri dari 2 faktor (faktor A dan faktor B) dengan menggunakan rancangan dasar RAL adalah :

$$Y_{ger} = \mu + \alpha_g + \beta_e + (\alpha\beta)_{ge} + \varepsilon_{ger} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2.1)$$

g = 1,2,…,a: e = 1,2,…b; r = 1,2,…,n

Y_{ger} : pengamatan pada ulangan ke-r yang mendapat perlakuan faktor A taraf ke-g dan faktor B taraf ke-e

μ : rataan umum

α_g : pengaruh faktor A taraf ke-g

β_e : pengaruh faktor B taraf ke-e

$(\alpha\beta)_{ge}$: pengaruh interaksi faktor A taraf ke-g dan faktor B taraf ke-e

ε_{ger} : komponen galat oleh faktor A taraf ke-g, faktor B taraf ke-e dan ulangan ke-r

Model linier untuk percobaan faktorial terdiri dari 3 model yaitu model tetap, model random dan model campuran. Tetapi dalam penulisan ini diambil model tetap, sehingga asumsi yang harus dipenuhi dalam model tetap adalah

$$\sum_{g=1}^{a} \alpha_g = 0 \qquad \sum_{g=1}^{a} (\alpha\beta)_{ge} = \sum_{e=1}^{b} (\alpha\beta)_{ge} = 0$$

$$\sum_{e=1}^{b} \beta_e = 0 \qquad \varepsilon_{ger} \sim NID(0, \sigma^2)$$

Tabel 2.1. Layout Data Untuk Rancangan Faktorial RAL Dua Faktor

Faktor A	Faktor B	Ulangan			
		1	2	...	n
A_1	B_1	Y_{111}	Y_{112}	...	Y_{11n}
A_2	B_2	Y_{121}	Y_{122}	...	Y_{12n}
...	...	...	...	...	...
A_a	B_b	Y_{1b1}	Y_{1b2}	...	Y_{1bn}
...	...	...	...	...	...
A_1	B_1	Y_{a11}	Y_{a12}	...	Y_{a1n}
A_2	B_2	Y_{a21}	Y_{a22}	...	Y_{a2n}
...	...	...	...	...	...
A_a	B_b	Y_{ab1}	Y_{ab2}	...	Y_{abn}

Tabel 2.2. Total Interaksi Faktor A dan Faktor B

Faktor A	Faktor B				Total	Rataan
	1	2	...	b	$(Y_{g..})$	$(\overline{Y}_{g..})$
1	$Y_{11.}$	$Y_{12.}$	...	$Y_{1b.}$	$Y_{1..}$	$\overline{Y}_{1..}$
2	$Y_{21.}$	$Y_{22.}$	...	$Y_{2b.}$	$Y_{2..}$	$\overline{Y}_{2..}$
...	...	...	...	...	...	...
a	$Y_{a1.}$	$Y_{a2.}$	...	$Y_{ab.}$	$Y_{a..}$	$\overline{Y}_{a..}$
Total B $(Y_{.e.})$	$Y_{.1.}$	$Y_{.2.}$	...	$Y_{.b.}$	$Y_{...}$	$\overline{Y}_{...}$
Rataan $(\overline{Y}_{.e.})$	$\overline{Y}_{.1.}$	$\overline{Y}_{.2.}$	...	$\overline{Y}_{.b.}$		

2.1.2 Hipotesis

Hipotesis yang dapat diambil:

1. Pengaruh utama faktor A

   H$_0$: $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_a = 0$ (tidak ada pengaruh faktor A terhadap respon yang diamati)

   H$_1$: paling sedikit ada satu g dengan $\alpha_g \neq 0$ (ada pengaruh faktor A terhadap respon yang diamati)

2. Pengaruh utama faktor B

   H$_0$: $\beta_1 = \beta_2 = ... = \beta_b = 0$ (tidak ada pengaruh faktor B terhadap respon yang diamati)

   H$_1$: paling sedikit ada satu e dengan $\beta_e \neq 0$ (ada pengaruh faktor B terhadap respon yang diamati)

3. Pengaruh interaksi faktor A dengan faktor B

   H$_0$: $(\alpha\beta)_{11} = (\alpha\beta)_{12} = ... = (\alpha\beta)_{ab} = 0$ (tidak ada pengaruh interaksi faktor A dan faktor B terhadap respon yang diamati)

   H$_1$: paling sedikit ada pasangan (g,e) dengan $(\alpha\beta)_{ge} \neq 0$ (ada pengaruh interaksi faktor A dan faktor terhadap respon yang diamati).

2.1.3 Estimasi Parameter Model Rancangan Faktorial RAL Dua Faktor

Pada persamaan (2.1) terdapat empat parameter model yang perlu diestimasi, yaitu : $\mu, \alpha_g, \beta_e, (\alpha\beta)_{ge}$. Untuk mengestimasi keempat parameter tersebut digunakan metode kudrat terkecil sehingga akan diperoleh nilai penduga masing-masing parameter. Prinsip dari metode kuadrat terkecil ini adalah untuk mencari estimator-estimator bagi parameter dengan meminimumkan jumlah kuadrat galatnya (*Widiharih, T 2007).* Penduga-penduga dari persamaan (2.1) dengan menggunakan metode kuadrat terkecil diperoleh sebagai berikut :

$$e_{ger} = Y_{ger} - \mu - \alpha_g - \beta_e - (\alpha\beta)_{ge}$$

Misalkan

$$\begin{aligned} L &= \sum_{g,e,r}^{a,b,n} e_{ger}^2 \\ &= \sum_{g,e,r}^{a,b,n} (Y_{ger} - \mu - \alpha_g - \beta_e - (\alpha\beta)_{ge})^2 \end{aligned}$$

Bentuk fungsi L yang merupakan jumlah kuadrat galat, akan ditentukan estimasi dari parameter model yang meminimumkan fungsi L dengan menggunakan metode kuadrat terkecil.

Dengan asumsi yang digunakan :

$$\sum_{g=1}^{a} \alpha_g = 0 \qquad \sum_{g=1}^{a} (\alpha\beta)_{ge} = \sum_{e=1}^{b} (\alpha\beta)_{ge} = 0$$

$$\sum_{e=1}^{b} \beta_e = 0 \qquad \varepsilon_{ger} \sim NID(0, \sigma^2)$$

- Estimasi parameter untuk μ yang meminimalkan L

$$\frac{\partial L}{\partial \mu} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \mu} = -2 \sum_{g}^{a} \sum_{e}^{b} \sum_{r}^{n} (Y_{ger} - \mu - \alpha_g - \beta_e - (\alpha\beta)_{ge})$$

$$-2\sum_{g}^{a}\sum_{e}^{b}\sum_{r}^{n}(\hat{Y}_{ger}-\hat{\mu}-\hat{\alpha}_g-\hat{\beta}_e-\left(\alpha\hat{\beta}\right)_{ge})$$

$$\sum_{g}^{a}\sum_{e}^{b}\sum_{r}^{n}\hat{Y}_{ger}-\sum_{g}^{a}\sum_{e}^{b}\sum_{r}^{n}\hat{\mu}-\sum_{g}^{a}\sum_{e}^{b}\sum_{r}^{n}\hat{\alpha}_g-\sum_{g}^{a}\sum_{e}^{b}\sum_{r}^{n}\hat{\beta}_e-\sum_{g}^{a}\sum_{e}^{b}\sum_{r}^{n}\left(\alpha\hat{\beta}\right)_{ge}=0$$
$$Y...-abn\hat{\mu}-0-0-0=0$$
$$Y...-abn\hat{\mu}=0$$
$$\hat{\mu}=\overline{Y}...$$

Syarat harga ekstrim untuk meminimumkan L adalah $\frac{\partial^2 L}{\partial\hat{\mu}^2}>0$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial\hat{\mu}^2}=2abn>0$$

Jadi estimasi untuk $\hat{\mu}$ adalah $\overline{Y}...$

- Estimasi Parameter Untuk α_g yang meminimalkan L

$$\frac{\partial L}{\partial\alpha_g}=0$$
$$\frac{\partial L}{\partial\alpha_g}=-2\sum_{e}^{b}\sum_{r}^{n}(Y_{ger}-\mu-\alpha_g-\beta_e-\left(\alpha\beta\right)_{ge})$$
$$-2\sum_{e}^{b}\sum_{r}^{n}(\hat{Y}_{ger}-\hat{\mu}-\hat{\alpha}_g-\hat{\beta}_e-\left(\alpha\hat{\beta}\right)_{ge})=0$$

$$\sum_{e}^{b}\sum_{r}^{n}\hat{Y}_{ger}-\sum_{e}^{b}\sum_{r}^{n}\hat{\mu}-\sum_{e}^{b}\sum_{r}^{n}\hat{\alpha}_g-\sum_{e}^{b}\sum_{r}^{n}\hat{\beta}_e-\sum_{e}^{b}\sum_{r}^{n}\left(\alpha\hat{\beta}\right)_{ge}=0$$
$$Y_{g..}-bn\hat{\mu}-bn\hat{\alpha}_g-0-0=0$$
$$Y...-bn\hat{\mu}-bn\hat{\alpha}_g=0$$
$$bn\hat{\alpha}_g=Y_{g..}-bn\hat{\mu}$$
$$\hat{\alpha}_g=\overline{Y}_{g..}-\overline{Y}...$$

Sehingga syarat ekstrim untuk meminimumkan L adalah $\frac{\partial^2 L}{\partial\hat{\alpha}_g^2}>0$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \hat{\alpha}_g{}^2} = 2bn > 0$$

Jadi estimasi untuk $\hat{\alpha}_g$ adalah $\overline{Y}_{g..} - \overline{Y}...$

- Estimasi Parameter Untuk β_e yang meminimalkan L

$$\frac{\partial L}{\partial \beta_e} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \beta_e} = -2\sum_g^a \sum_r^n (Y_{ger} - \mu - \alpha_g - \beta_e - (\alpha\beta)_{ge})$$

$$-2\sum_g^a \sum_r^n (\hat{Y}_{ger} - \hat{\mu} - \hat{\alpha}_g - \hat{\beta}_e - (\alpha\hat{\beta})_{ge}) = 0$$

$$\sum_g^a \sum_r^n \hat{Y}_{ger} - \sum_g^a \sum_r^n \hat{\mu} - \sum_g^a \sum_r^n \hat{\alpha}_g - \sum_g^a \sum_r^n \hat{\beta}_e - \sum_g^a \sum_r^n (\alpha\hat{\beta})_{ge} = 0$$

$$Y_{.e.} - an\hat{\mu} - 0 - an\hat{\beta}_e - 0 = 0$$

$$Y_{.e.} - an\hat{\mu} - an\hat{\beta}_e = 0$$

$$an\hat{\beta}_e = Y_{.e.} - an\hat{\mu}$$

$$\hat{\beta}_e = \overline{Y}_{.e.} - \overline{Y}...$$

Sehingga syarat ekstrim untuk meminimumkan L adalah $\frac{\partial^2 L}{\partial \hat{\beta}_e^2} > 0$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \hat{\beta}_e{}^2} = 2an > 0$$

Jadi estimasi untuk $\hat{\beta}_e$ adalah $\overline{Y_{.e.}} - \overline{Y}...$

- Estimasi Parameter Untuk $(\alpha\beta)_{ge}$ yang meminimalkan L

$$\frac{\partial L}{\partial (\alpha\beta)_{ge}} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial (\alpha\beta)_{ge}} = -2\sum_r^n (Y_{ger} - \mu - \alpha_g - \beta_e - (\alpha\beta)_{ge})$$

$$-2\sum_{r}^{n}(\hat{Y}_{ger}-\hat{\mu}-\hat{\alpha}_g-\hat{\beta}_e-\left(\alpha\hat{\beta}\right)_{ge})=0$$

$$\sum_{r}^{n}\hat{Y}_{ger}-\sum_{r}^{n}\hat{\mu}-\sum_{r}^{n}\hat{\alpha}_g-\sum_{r}^{n}\hat{\beta}_e-\sum_{r}^{n}\left(\alpha\beta\right)_{ge}=0$$

$$Y_{ge.}-n\hat{\mu}-n\hat{\alpha}_g-n\hat{\beta}_e-n\left(\alpha\beta\right)_{ge}=0$$

$$n\left(\alpha\hat{\beta}\right)_{ge}=Y_{ge.}-n\hat{\mu}-n\hat{\alpha}_g-n\hat{\beta}_e-n\left(\alpha\beta\right)_{ge}$$

$$\left(\alpha\hat{\beta}\right)_{ge}=\overline{Y}_{ge.}-\overline{Y}\ldots-\left(\overline{Y}_{g..}-\overline{Y}\ldots\right)-\left(\overline{Y}_{.e.}-\overline{Y}\ldots\right)$$

$$\left(\alpha\hat{\beta}\right)_{ge}=\overline{Y}_{ge.}-\overline{Y}_{g..}-\overline{Y}_{.e.}+\overline{Y}\ldots$$

Sehingga syarat ekstrim untuk meminimumkan L adalah $\dfrac{\partial^2 L}{\partial\left(\alpha\hat{\beta}\right)_{ge}^2}>0$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial\left(\alpha\hat{\beta}\right)_{ge}{}^2}=2n>0$$

Jadi estimasi untuk $\left(\alpha\hat{\beta}\right)_{\mathrm{ge}}$ adalah $\overline{Y_{ge.}}-\overline{Y_{g..}}-\overline{Y}_{.e.}+\overline{Y}_{...}$

Sehingga dari perhitungan diatas diperoleh :

$$\begin{aligned}\hat{Y}_{ger}&=\overline{Y}\ldots+(\overline{Y}_{g..}-\overline{Y}\ldots)+(\overline{Y}_{.e.}-\overline{Y}\ldots)+(\overline{Y}_{ge.}+\overline{Y}_{g..}-\overline{Y}_{.e.}+\overline{Y}_{...})\\&=\overline{Y}_{ge.}\end{aligned}$$

Dan residualnya adalah

$$\hat{\varepsilon}_{ger}=Y_{ger}-\hat{Y}_{ger}$$

$$\hat{\varepsilon}_{ger}=Y_{ger}-\overline{Y}_{ge.}$$

2.1.4 Analisis Statistik Rancangan Faktorial RAL Dua Faktor

Penguraian Jumlah Kuadrat

Dari hasil estimasi parameter-parameternya diperoleh :

$$Y_{ger} = \hat{\mu} + \hat{\alpha}_g + \hat{\beta}_e + \left(\alpha\hat{\beta}\right)_{ge} + \hat{\varepsilon}_{ger}$$

$$Y_{ger} = \overline{Y}\ldots + (\overline{Y}_{g..} - \overline{Y}\ldots) + (\overline{Y}_{.e.} - \overline{Y}\ldots) + (\overline{Y}_{ge} - \overline{Y}_{g..} - \overline{Y}_{.e.} + \overline{Y}_{...}) + \left(Y_{ger} - \overline{Y}_{ge}\right)$$

$$Y_{ger} - \overline{Y}_{...} = \left(\left(\overline{Y}_{g..} - \overline{Y}_{...}\right) + (\overline{Y}_{.e.} - \overline{Y}_{...}) + (\overline{Y}_{ge..} - \overline{Y}_{g..} - \overline{Y}_{.e.} + \overline{Y}_{...}) + \left(\overline{Y}_{ger} - \overline{Y}_{ge}\right)\right)$$

Kedua ruas dikuadratkan kemudian dijumlahkan menurut g,e,r untuk mendapatkan jumlah kuadat total (JKT), jumlah kuadrat faktor A (JKA), jumlah kuadrat faktor B (JKB), jumlah kuadrat interaksi faktor A dan faktor B (JK(AB)), jumlah kuadrat galat (JKG). Sehingga diperoleh:

$$\sum_{g,e,r=1}^{a,b,n}\left(Y_{ger} - \overline{Y}_{...}\right)^2$$

$$= \sum_{g,e,r=1}^{a,b,n}\left(\overline{Y}_{g..} - \overline{Y}_{...}\right)^2 + \sum_{g,e,r}^{a,b,n}\left(\overline{Y}_{.e.} - \overline{Y}_{...}\right)^2 + \sum_{g,e,r=1}^{a,b,n}\left(\overline{Y}_{ge.} - \overline{Y}_{g..} - \overline{Y}_{.e.} + \overline{Y}_{...}\right)^2 + \sum_{g,e,r}^{a,b,n}\left(\overline{Y}_{ger} - \overline{Y}_{ge.}\right)^2$$

$$+ \underbrace{2\sum_{g,e,r=1}^{a,b,n}\left(\overline{Y}_{g..} - \overline{Y}_{...}\right)\left(\overline{Y}_{.e.} - \overline{Y}_{...}\right)}_{A} + \underbrace{2\sum_{g,e,r}^{a,b,n}\left(\overline{Y}_{g..} - \overline{Y}_{...}\right)\left(\overline{Y}_{ge.} - \overline{Y}_{g..} - \overline{Y}_{.e.} + \overline{Y}_{...}\right)}_{B}$$

$$+ \underbrace{2\sum_{g,e,r}^{a,b,n}\left(\overline{Y}_{g..} - \overline{Y}_{...}\right)\left(\overline{Y}_{ger} - \overline{Y}_{ge.}\right)}_{C} + \underbrace{2\sum_{g,e,r}^{a,b,n}\left(\overline{Y}_{.e.} - \overline{Y}_{...}\right)\left(\overline{Y}_{ge.} - \overline{Y}_{g..} - \overline{Y}_{.e.} + \overline{Y}_{...}\right)}_{D}$$

$$+ \underbrace{2\sum_{g,e,r=1}^{a,b,m}\left(\overline{Y}_{.e.} - \overline{Y}_{...}\right)\left(\overline{Y}_{ger} - \overline{Y}_{ge.}\right)}_{E} + \underbrace{2\sum_{g,e,r}^{a,b,n}\left(\overline{Y}_{ge.} - \overline{Y}_{g..} - \overline{Y}_{.e.} + \overline{Y}_{...}\right)\left(\overline{Y}_{ger} - \overline{Y}_{ge.}\right)}_{F}$$

$$A = 2\sum_{g,e,r=1}^{a,b,n}\left(\overline{Y}_{g..} - \overline{Y}_{...}\right)\left(\overline{Y}_{.e.} - \overline{Y}_{...}\right)$$

$$= 2\sum_{g,e,r}^{a,b,n}\left(\overline{Y_{g..}}\,\overline{Y_{.e.}} - \overline{Y_{g..}}\,\overline{Y_{...}} - \overline{Y_{...}}\,\overline{Y_{.e.}} + \overline{Y_{...}}^{2}\right)$$

$$= 2\left(\sum_{g,e,r}^{a,b,n}\overline{Y_{g..}}\,\overline{Y_{.e.}} - \sum_{g,e,r}^{a,b,n}\overline{Y_{g..}}\,\overline{Y_{...}} - \sum_{g,e,r}^{a,b,n}\overline{Y_{...}}\,\overline{Y_{.e.}} + \sum_{g,e,r}^{a,b,n}\overline{Y_{...}}^{2}\right)$$

$$= 2\left(b\frac{\sum_{g=1}^{a}Y_{g..}}{ab}\frac{\sum_{e=1}^{b}Y_{.e.}}{bn} - ab\frac{\sum_{g=1}^{a}Y_{g..}}{ab}\frac{Y_{...}}{abn} - bn\frac{Y_{...}}{abn}\frac{\sum_{e=1}^{b}Y_{.e.}}{bn} + abn\frac{Y_{...}^{2}}{(abn)^{2}}\right)$$

$$= 2\left(\frac{Y_{...}^{2}}{abn} - \frac{Y_{...}^{2}}{abn} - \frac{Y_{...}^{2}}{abn} + \frac{Y_{...}^{2}}{abn}\right) \quad karena\ Y_{....} = \sum_{g=1}^{a}Y_{g..} = \sum_{e=1}^{b}Y_{.e.} = \sum_{r=1}^{n}Y_{..r}$$

$$= 0$$

$$B = 2\sum_{g,e,r}^{a,b,n}\left(\overline{Y_{g..}} - \overline{Y_{...}}\right)\left(\overline{Y_{ge.}} - \overline{Y}_{g..} - \overline{Y_{.e.}} + \overline{Y_{...}}\right)$$

$$= 2\sum_{g,e,r}^{a,b,n}\left(\overline{Y_{g..}}\,\overline{Y_{ge.}} - \overline{Y_{g..}}^{2} - \overline{Y_{g..}}\,\overline{Y_{.e.}} + \overline{Y_{g..}}\,\overline{Y_{...}} - \overline{Y_{...}}\,\overline{Y_{ge.}} + \overline{Y_{...}}\,\overline{Y_{g..}} + \overline{Y_{...}}\,\overline{Y_{.e.}} - \overline{Y_{...}}^{2}\right)$$

$$= 2\left(\begin{array}{l} n\frac{\sum_{g=1}^{a}Y_{g..}}{bn}\frac{\sum_{g,e=1}^{a,b}Y_{ge.}}{n} - bn\frac{\sum_{g=1}^{a}Y_{g..}^{2}}{(bn)^{2}} - n\frac{\sum_{g=1}^{a}Y_{g..}}{bn}\frac{\sum_{e=1}^{b}Y_{.e.}}{an} + bn\frac{\sum_{g=1}^{a}Y_{g..}}{bn}\frac{Y_{...}}{abn} \\ - n\frac{Y_{...}}{abn}\frac{\sum_{g,e=1}^{a,b}Y_{ge.}}{n} + bn\frac{Y_{...}}{abn}\frac{\sum_{g=1}^{a}Y_{g..}}{bn} + an\frac{Y_{...}}{abn}\frac{\sum_{e=1}^{b}Y_{.e.}}{an} - abn\frac{Y_{...}^{2}}{(abn)^{2}} \end{array}\right)$$

$$= 2\left(\frac{Y_{...}^{2}}{bn} - \frac{Y_{...}^{2}}{bn} - \frac{Y_{...}^{2}}{abn} + \frac{Y_{...}^{2}}{abn} - \frac{Y_{...}^{2}}{abn} + \frac{Y_{...}^{2}}{abn} + \frac{Y_{...}^{2}}{abn} - \frac{Y_{...}^{2}}{abn}\right)$$

$$= 0$$

$$C = 2\sum_{g,e,r}^{a,b,n}\left(\overline{Y_{g..}} - \overline{Y_{...}}\right)\left(\overline{Y_{ger}} - \overline{Y_{ge.}}\right)$$

$$= 2\sum_{g,e,r}^{a,b,n}\left(\overline{Y_{g..}}Y_{ger} - \overline{Y_{g..}}\,\overline{Y_{ge.}} - \overline{Y_{...}}\,\overline{Y_{ger}} + \overline{Y_{...}}\,\overline{Y_{ge.}}\right)$$

$$= 2\left(\frac{\sum_{g=1}^{a} Y_{g..}}{bn} \sum_{g,e,r}^{a,b,n} Y_{ger} - n \frac{\sum_{g=1}^{a} Y_{g..}}{bn} \frac{\sum_{g,e=1}^{a,b} Y_{ge.}}{n} - \frac{Y_{...}}{abn} \sum_{g,e,r}^{a,b,n} Y_{ger} + n \frac{Y_{...}}{abn} \frac{\sum_{g,e}^{a,b} Y_{ge.}}{n} \right)$$

$$= 2\left(\frac{Y_{...}^{\ 2}}{bn} - \frac{Y_{...}^{\ 2}}{bn} + \frac{Y_{...}^{\ 2}}{abn} - \frac{Y_{...}^{\ 2}}{abn} \right)$$

$$= 0$$

$$D = 2\sum_{g,e,r}^{a,b,n} \left(\overline{Y_{.e.}} - \overline{Y_{...}} \right)\left(\overline{Y_{ge.}} - \overline{Y_{g..}} - \overline{Y_{.e.}} + \overline{Y_{...}} \right)$$

$$= 2\sum_{g,e,r}^{a,b,n} \left(\overline{Y_{.e.}}\,\overline{Y_{ge.}} - \overline{Y_{.e.}}\,\overline{Y_{g..}} - \overline{Y_{.e.}}^{\,2} + \overline{Y_{.e.}}\,\overline{Y_{...}} - \overline{Y_{...}}\,\overline{Y_{ge.}} + \overline{Y_{...}}\,\overline{Y_{g..}} + \overline{Y_{...}}\,\overline{Y_{.e.}} - \overline{Y_{...}}^{\,2} \right)$$

$$= 2\left(\begin{array}{l} n \frac{\sum_{e=1}^{b} Y_{.e.}}{an} \frac{\sum_{g,e=1}^{a,b} Y_{ge.}}{n} - n \frac{\sum_{e=1}^{b} Y_{.e.}}{an} \frac{\sum_{g=1}^{a} Y_{g..}}{bn} an \frac{\sum_{e=1}^{b} Y_{.e.}^{\ 2}}{(an)^2} + an \frac{\sum_{e=1}^{b} Y_{.e.}}{an} \frac{Y_{...}}{abn} \\ - n \frac{Y_{...}}{abn} \frac{\sum_{g,e=1}^{a,b} Y_{ge.}}{n} + bn \frac{Y_{...}}{abn} \frac{\sum_{g=1}^{a} Y_{g..}}{bn} + an \frac{Y_{...}}{abn} \frac{\sum_{e=1}^{b} Y_{.e.}}{an} - abn \frac{Y_{...}^{\ 2}}{(abn)^2} \end{array} \right)$$

$$= 2\left(\frac{Y_{...}^{\ 2}}{an} - \frac{Y_{...}^{\ 2}}{abn} - \frac{Y_{...}^{\ 2}}{abn} + \frac{Y_{...}^{\ 2}}{an} - \frac{Y_{...}^{\ 2}}{abn} + \frac{Y_{...}^{\ 2}}{abn} + \frac{Y_{...}^{\ 2}}{abn} - \frac{Y_{...}^{\ 2}}{abn} \right)$$

$$= 0$$

$$E = 2\sum_{g,e,r}^{a,b,n} \left(\overline{Y_{.e.}} - \overline{Y_{...}} \right)\left(\overline{Y_{ger}} - \overline{Y_{ge.}} \right)$$

$$= 2\sum_{g,e,r}^{a,b,n} \left(\overline{Y_{.e.}}\,Y_{ger} - \overline{Y_{.e.}}\,\overline{Y_{ge.}} - \overline{Y_{...}}\,\overline{Y_{ger}} + \overline{Y_{...}}\,\overline{Y_{ge.}} \right)$$

$$= 2\left(\frac{\sum_{e=1}^{b} Y_{.e.}}{an} \sum_{g,e,r}^{a,b,n} Y_{ger} - n \frac{\sum_{e=1}^{b} Y_{.e.}}{an} \frac{\sum_{g,e=1}^{a,b} Y_{ge.}}{n} - \frac{Y_{...}}{abn} \sum_{g,e,r}^{a,b,n} Y_{ger} + n \frac{Y_{...}}{abn} \frac{\sum_{g,e}^{a,b} Y_{ge.}}{n} \right)$$

$$= 2\left(\frac{Y_{...}{}^{2}}{an} - \frac{Y_{...}{}^{2}}{an} + \frac{Y_{...}{}^{2}}{abn} - \frac{Y_{...}{}^{2}}{abn}\right)$$

$$= 0$$

$$F = 2\sum_{g,e,r}^{a,b,n}\left(\overline{Y_{ge.}} - Y_{g..} - Y_{.e.} + \overline{Y_{...}}\right)\left(\overline{Y_{ger}} - \overline{Y_{ge.}}\right)$$

$$= 2\sum_{g,e,r}^{a,b,n}\left(\overline{Y_{ge.}}Y_{ger} + \overline{Y_{ge.}}^{\,2} - \overline{Y_{g..}}Y_{ger} + \overline{Y_{g..}}\,\overline{Y_{ge.}} - \overline{Y_{.e.}}Y_{ger} + \overline{Y_{.e.}}\,\overline{Y_{ge.}} - \overline{Y_{...}}Y_{ger} - \overline{Y_{...}}\,\overline{Y_{ge.}}\right)$$

$$= 2\left(\begin{array}{l} \dfrac{\sum_{g,e=1}^{a,b} Y_{ge.}}{n}\sum_{g,e,r}^{a,b,n} Y_{ger} - n\dfrac{\sum_{g,e=1}^{a,b} Y_{ge.}{}^{2}}{(n)^{2}}\, n\dfrac{\sum_{g=1}^{a} Y_{g..}}{bn}\sum_{g,e,r}^{a,b,n} Y_{ger} + \dfrac{\sum_{g=1}^{a} Y_{g..}}{bn}\dfrac{\sum_{g,e=1}^{a,b} Y_{ge.}}{n} - n\dfrac{\sum_{e=1}^{b} Y_{.e.}}{an}\sum_{g,e,r}^{a,b,n} Y_{ger} \\ + n\dfrac{\sum_{e=1}^{b} Y_{.e.}}{an}\dfrac{\sum_{g,e=1}^{a,b} Y_{ge..}}{n}\dfrac{Y_{...}}{abn}\sum_{g,e,r}^{a,b,n} Y_{ger} + n\dfrac{Y_{...}}{abn}\dfrac{\sum_{g,e}^{a,b} Y_{ge.}}{n} \end{array}\right)$$

$$= 2\left(\frac{Y_{...}{}^{2}}{n} - \frac{Y_{...}{}^{2}}{n} + \frac{Y_{...}{}^{2}}{bn} - \frac{Y_{...}{}^{2}}{bn} + \frac{Y_{...}{}^{2}}{an} - \frac{Y_{...}{}^{2}}{an} + \frac{Y_{...}{}^{2}}{abn} - \frac{Y_{...}{}^{2}}{abn}\right)$$

$$= 0$$

Sehingga dari penjabaran rumus diperoleh hasil sebagai berikut

$$\underbrace{\sum_{g,e,r=1}^{a,b,n}\left(Y_{ger} - \overline{Y_{...}}\right)^{2}}_{JKT} = \underbrace{\sum_{g,e,r=1}^{a,b,n}\left(\overline{Y_{g..}} - \overline{Y_{...}}\right)^{2}}_{JKA} + \underbrace{\sum_{g,e,r}^{a,b,n}\left(\overline{Y_{.e.}} - \overline{Y_{...}}\right)^{2}}_{JKB} + \underbrace{\sum_{g,e,r=1}^{a,b,n}\left(\overline{Y_{ge.}} - \overline{Y_{g..}} - \overline{Y_{.e.}} + \overline{Y_{...}}\right)^{2}}_{JKAB}$$

$$+ \underbrace{\sum_{g,e,r}^{a,b,n}\left(\overline{Y_{ger}} - \overline{Y_{ge.}}\right)^{2}}_{JKG}$$

Rumus tersebut dalam penghitungan praktiknya akan mengalami sedikit kesulitan, sehingga perlu disederhanakan sebagai berikut :

$$JKT = \sum_{g,e,r,=1}^{a,b,n}\left(Y_{ger} - \overline{Y_{...}}\right)^{2}$$

$$= \sum_{g,e,r=1}^{a,b,n}\left(Y_{ger}{}^{2} - 2Y_{ger}\overline{Y_{...}} + \overline{Y_{...}}^{\,2}\right)$$

$$= \sum_{g,e,r}^{a,b,n} Y_{ger}{}^{2} - 2\frac{Y_{...}}{abn}\sum_{g,e,r}^{a,b,n} Y_{ger} + abn\frac{Y_{...}{}^{2}}{(abn)^{2}}$$

$$= \sum_{g,e,r}^{a,b,n} Y_{ger}{}^{2} - 2\frac{Y_{...}{}^{2}}{abn} + \frac{Y_{...}{}^{2}}{abn}$$

$$= \sum_{g,e,r}^{a,b,n} Y_{ger}{}^{2} - \frac{Y_{...}{}^{2}}{abn}$$

$$JKA = \sum_{g,e,r}^{a,b,n}\left(\overline{Y_{g..}} - \overline{Y_{...}}\right)^{2}$$

$$= \sum_{g,e,r=1}^{a,b,n}\left(\overline{Y_{g..}}^{2} - 2\overline{Y_{g..}}\,\overline{Y_{...}} + \overline{Y_{...}}^{2}\right)$$

$$= bn\frac{\sum_{g=1}^{a} Y_{g..}{}^{2}}{(bn)^{2}} - 2bn\frac{\sum_{g=1}^{a} Y_{g..}}{bn}\frac{Y_{...}}{abn} + abn\frac{Y_{...}{}^{2}}{(abn)^{2}}$$

$$= \frac{\sum_{g=1}^{a} Y_{g..}{}^{2}}{bn} - 2\frac{Y_{...}{}^{2}}{abn} + \frac{Y_{...}{}^{2}}{abn}$$

$$= \frac{\sum_{g=1}^{a} Y_{g..}{}^{2}}{bn} - \frac{Y_{...}{}^{2}}{abn}$$

$$JKB = \sum_{g,e,r}^{a,b,n}(\overline{Y_{.e.}} - \overline{Y_{...}})^{2}$$

$$= \sum_{g,e,r=1}^{a,b,n}\left(\overline{Y_{.e.}}^{2} - 2\overline{Y_{.e.}}\,\overline{Y_{...}} + \overline{Y_{...}}^{2}\right)$$

$$= an\frac{\sum_{e=1}^{b} Y_{.e.}{}^{2}}{(an)^{2}} - 2an\frac{\sum_{e=1}^{b} Y_{.e.}}{an}\frac{Y_{...}}{abn} + abn\frac{Y_{...}{}^{2}}{(abn)^{2}}$$

$$= \frac{\sum_{e=1}^{b} Y_{.e.}}{an} - 2\frac{Y_{...}{}^{2}}{abn} + \frac{Y_{...}{}^{2}}{abn}$$

$$= \frac{\sum_{e=1}^{b} Y_{.e..}{}^{2}}{an} - \frac{Y_{...}{}^{2}}{abn}$$

$$JK(AB) = \sum_{g,e,r}^{a,b,n} (\overline{Y_{ge.}} - \overline{Y_{g..}} - \overline{Y_{.e.}} + \overline{Y_{...}})^2$$

$$= \sum_{g,e,r=1}^{a,b,n} \begin{pmatrix} \overline{Y_{ge.}}^{2} - 2\overline{Y_{g..}}\,\overline{Y_{ge.}} - 2\overline{Y_{ge.}}\,\overline{Y_{.e.}} + 2\overline{Y_{ge.}}\,\overline{Y_{...}} + \overline{Y_{g..}}^{2} \\ + 2\overline{Y_{g..}}\,\overline{Y_{.e.}} - 2\overline{Y_{g..}}\,\overline{Y_{...}} + \overline{Y_{.e.}}^{2} - 2\overline{Y_{.e.}}\,\overline{Y_{...}} + \overline{Y_{...}}^{2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} n\frac{\sum_{g,e=1}^{a,b} Y_{ge.}{}^{2}}{n^2} - 2n\frac{\sum_{g,e=1}^{a,b} Y_{ge.}}{n}\frac{\sum_{g=1}^{a} Y_{g..}}{bn} - 2n\frac{\sum_{g,e=1}^{a,b} Y_{ge.}}{n}\frac{\sum_{e=1}^{b} Y_{.e.}}{an} + 2n\frac{\sum_{g,e=1}^{a,b} Y_{ge.}}{n}\frac{Y_{...}}{abn} \\ + bn\frac{\sum_{g=1}^{a} Y_{g..}{}^{2}}{(bn)^2} + 2n\frac{\sum_{g=1}^{a} Y_{g..}}{bn}\frac{\sum_{e=1}^{b} Y_{.e.}}{an} - 2bn\frac{\sum_{g=1}^{a} Y_{g..}}{bn}\frac{Y_{...}}{abn} + an\frac{\sum_{e=1}^{b} Y_{.e.}{}^{2}}{(an)^2} \\ - 2an\frac{\sum_{e=1}^{b} Y_{.e.}}{an}\frac{Y_{...}}{abn} + abn\frac{Y_{...}{}^{2}}{(abn)^2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\sum_{g,e=1}^{a,b} Y_{ge.}{}^{2}}{n} + \frac{\sum_{g=1}^{a} Y_{g..}{}^{2}}{bn} + \frac{\sum_{e=1}^{b} Y_{.e.}{}^{2}}{an} - 2\frac{\sum_{g=1}^{a} Y_{g..}{}^{2}}{bn} - 2\frac{\sum_{e=1}^{b} Y_{.e.}{}^{2}}{an} \\ + 2\frac{Y_{...}{}^{2}}{abn} + 2\frac{Y_{...}{}^{2}}{abn} - 2\frac{Y_{...}{}^{2}}{abn} - 2\frac{Y_{...}{}^{2}}{abn} + \frac{Y_{...}{}^{2}}{abn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\sum_{g,e=1}^{a,b} Y_{ge.}{}^{2}}{n} - \frac{\sum_{g=1}^{a} Y_{g..}{}^{2}}{bn} + \frac{Y_{...}{}^{2}}{abn} - \frac{\sum_{e=1}^{b} Y_{.e.}{}^{2}}{an} + \frac{Y_{...}{}^{2}}{abn} - \frac{Y_{...}{}^{2}}{abn} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{\sum_{g,e=1}^{a,b} Y_{ge.}{}^{2}}{n} - \left(\frac{\sum_{g=1}^{a} Y_{g..}{}^{2}}{bn} - \frac{Y_{...}{}^{2}}{abn} \right) - \left(\frac{\sum_{e=1}^{b} Y_{.e.}{}^{2}}{an} - \frac{Y_{...}{}^{2}}{abn} \right) - \frac{Y_{...}{}^{2}}{abn}$$

$$= \frac{\sum_{g,e=1}^{a,b} Y_{ge.}{}^2}{n} - \frac{Y_{...}{}^2}{abn} - JKA - JKB$$

$$JKG = \sum_{g,e,r}^{a,b,n} \left(Y_{ger} - \overline{Y_{ge.}}\right)^2$$

$$= \sum_{g,e,r}^{a,b,n} \left(Y_{ger}{}^2 - 2Y_{ger}\overline{Y_{ge.}} - \overline{Y_{ge.}{}^2}\right)$$

$$= \sum_{g,e,r}^{a,b,n} Y_{ger}{}^2 - 2\sum_{g,e,r}^{a,b,n} Y_{ger} \frac{\sum_{g,e=1}^{a,b} Y_{ge.}}{n} + n\frac{\sum_{g,e=1}^{a,b} Y_{ge}{}^2}{n^2}$$

$$= \sum_{g,e,r}^{a,b,n} Y_{ger}{}^2 - 2\frac{Y_{...}{}^2}{n} + \frac{Y_{...}{}^2}{n}$$

$$= \sum_{g,e,r}^{a,b,n} Y_{ger}{}^2 - \frac{Y_{....}{}^2}{n}$$

$$= JKT - JKA - JKB - JK(AB)$$

Derajat bebas dari JKT, JKA, JKB, dan JK(AB)masing – masing adalah ($abn-1$), $(a-1),(b-1)$, $(a-1)(b-1)$. Sedangkan derajat bebas dari JKG merupakan pengurangan dari derajat bebas JKT terhadap JKA, JKB, dan JK(AB) yaitu $(ab-1)(n-1)$.

Hasil bagi antara jumlah kuadrat dengan derajat bebasnya dinamakan kuadrat tengah, sehingga :

$$KTA = \frac{JKA}{a-1}; \qquad KTB = \frac{JKB}{b-1};$$

$$KT(AB) = \frac{JK(AB)}{(a-1)(b-1)}; \qquad KTG = \frac{JKG}{ab(n-1)}$$

dengan : KTA adalah kuadrat tengah untuk faktor A

KTB adalah kuadrat tengah untuk faktor B

KT (AB) adalah kuadrat tengah untuk interaksi faktor A dan faktor B

KTG adalah kuadrat tengah untuk galat

Nilai harapan kuadrat tengah (E(KT)) masing –masing faktor ditentukan sebagai berikut :

$$Y_{g..} = \sum_{e,r=1}^{b,n} Y_{ger}$$

$$= \sum_{e,r=1}^{b,n} \left(\mu + \alpha_g + \beta_e + (\alpha\beta)_{ge} + \varepsilon_{ger} \right)$$

$$= bn\mu + \sum_{e,r}^{b,n} \alpha_g + bn\beta_e + \sum_{e,r}^{b,n} (\alpha\beta)_{ge} + \sum_{e,r}^{b,n} \varepsilon_{ger}$$

Karena $\sum_e^b \beta_e = \sum_{e,r}^{b,n} (\alpha\beta)_{ge} = 0$ maka

$$Y_{g..} = bn\mu + bn\alpha_g + \sum_{e,r}^{b,n} \varepsilon_{ger}$$

$$Y_{g..}^2 = \left(bn\mu + bn\alpha_g + \sum_{e,r}^{b,n} \varepsilon_{ger} \right)^2$$

$$= b^2 n^2 \mu^2 + b^2 n^2 \alpha_g^2 + \sum_{e,r}^{b,n} \varepsilon_{ger}^2 + 2b^2 n^2 \mu\alpha_g + 2bn\mu \sum_{e,r}^{b,n} \varepsilon_{ger} + 2bn\alpha_g \sum_{e,r}^{b,n} \varepsilon_{ger}$$

$$E(Y_{g..}^2) = b^2 n^2 \mu^2 + b^2 n^2 \alpha_g^2 + \sum_{e,r}^{b,n} E(\varepsilon_{ger}^2) + 2b^2 n^2 \mu\alpha_g + 2bn\mu \sum_{e,r}^{b,n} E(\varepsilon_{ger})$$
$$+ 2bn\alpha_g \sum_{e,r}^{b,n} E(\varepsilon_{ger})$$

Karena $\varepsilon_{ger} \sim NID(0, \sigma^2)$

$$E(\varepsilon_{ger}) = 0$$

$$Var(\varepsilon_{\mathrm{ger}}) = E(\varepsilon_{ger}^2) - E(\varepsilon_{ger})^2$$

$$\sigma^2 = E(\varepsilon_{ger}^2) = 0$$

$$E(\varepsilon_{ger}^2) = \sigma^2$$

Sehingga diperoleh hasil sebagai berikut :

$$E(Y_{g..}^2) = b^2n^2\mu^2 + b^2n^2\alpha_g^2 + bn\sigma^2 + 2b^2n^2\mu\alpha_g + 2bn\mu.0 + 2bn\alpha_g.0$$

$$= b^2n^2\mu^2 + b^2n^2\alpha_g^2 + bn\sigma^2 + 2b^2n^2\mu\alpha_g$$

$$\sum_g^a \frac{E(Y_{g..}^2)}{bn} = \sum_g^a \left(\frac{b^2n^2\mu^2 + b^2n^2\alpha_g^2 + bn\sigma^2 + 2b^2n^2\mu\alpha_g}{bn} \right)$$

$$= \sum_g^a \left(bn\mu^2 + bn\alpha_g^2 + \sigma^2 + 2bn\mu\alpha_g \right)$$

$$= abn\mu^2 + bn\sum_g^a \alpha_g^2 + a\sigma^2 + 2bn\mu\sum_g^a \alpha_g$$

$$= abn\mu^2 + bn\sum_g^a \alpha_g^2 + a\sigma^2 + 2bn\mu.0$$

$$= abn\mu^2 + bn\sum_g^a \alpha_g^2 + a\sigma^2$$

$$Y... = \sum_{g,e,r}^{a,b,n} Y_{ger}$$

$$= \sum_{g,e,r}^{a,b,n} (\mu + \alpha_g + \beta_e + (\alpha\beta)_{ge} + \varepsilon_{ger})$$

$$= abn\mu + bn\sum_g^a \alpha_g + an\sum_e^b \beta_e + n\sum_{g,e}^{a,b} (\alpha\beta)_{ge} + \sum_{g,e,r}^{a,b,n} \varepsilon_{ger}$$

Karena $\sum_g^a \alpha_g = \sum_e^b \beta_e = \sum_{e,r}^{b,n} (\alpha\beta)_{ge} = 0$ maka

$$Y... = abn + \sum_{g,e,r}^{a,b,n} \varepsilon_{ger}$$

$$Y_{...}^2 = \left(abn\mu + \sum_{g,e,r}^{a,b,n} \varepsilon_{ger} \right)^2$$

$$= a^2 b^2 n^2 \mu^2 + \sum_{g,e,r}^{a,b,n} \varepsilon_{ger}^2 + 2abn\mu \sum_{g,e,r}^{a,b,n} \varepsilon_{ger}$$

$$E(Y_{...}^2) = a^2 b^2 n^2 \mu^2 + \sum_{g,e,r}^{a,b,n} E(\varepsilon_{ger}^2) + 2abn\mu \sum_{g,e,r}^{a,b,n} E(\varepsilon_{ger})$$

$$= a^2 b^2 n^2 \mu^2 + abn\sigma^2 + 2abn\mu.0$$

$$= a^2 b^2 n^2 \mu^2 + abn\sigma^2$$

$$\frac{E(Y_{...}^2)}{abn} = \frac{a^2 b^2 n^2 \mu^2 + abn\sigma^2}{abn}$$

$$= abn\mu^2 + \sigma^2$$

$$E(KTA) = E\left(\frac{JKA}{a-1}\right) = \frac{1}{a-1} E(JKA) = \frac{1}{a-1} E\left(\frac{\sum_g^a Y_{...}^2}{bn} - \frac{Y_{...}^2}{abn} \right)$$

$$= \frac{1}{a-1} \left(\sum_g^a \frac{E(Y_{...}^2)}{bn} - \frac{E(Y_{...}^2)}{abn} \right)$$

$$= \frac{1}{a-1} \left\{ \left(abn\mu^2 + bn\sum_g^a \alpha_g + a\sigma^2 \right) - (abn\mu^2 + \sigma^2) \right\}$$

$$= \frac{1}{a-1} \left(bn\sum_g^a \alpha_g^2 + (a-1)\sigma^2 \right)$$

$$= \sigma^2 + bn \frac{\sum_g^a \alpha_g^2}{a-1}$$

$$Y_{.e.} = \sum_{g,r}^{a,n} Y_{ger}$$

$$= \sum_{g,r}^{a,n} (\mu + \alpha_g + \beta_e + (\alpha\beta)_{ge} + \varepsilon_{ger})$$

$$= an\mu + n\sum_{g}^{a} \alpha_g + an\beta_e + n\left(\sum_{g}^{a} \alpha\beta_{ge}\right) + \sum_{g,r}^{a,n} \varepsilon_{ger}$$

$$= an\mu + an\beta_e + \sum_{g,r}^{a,n} \varepsilon_{ger}$$

$$Y_{.e.}^2 = (an\mu + an\beta_e + \sum_{g,r}^{a,n} \varepsilon_{ger})$$

$$= a^2n^2\mu^2 + a^2n^2\beta_e{}^2 + \sum_{g,r}^{a,n} \varepsilon_{ger}^2 + 2a^2n^2\mu\beta_e + 2an\mu\sum_{g,r}^{a,n} \varepsilon_{ger} + 2an\beta_e\sum_{g,r}^{a,n} \varepsilon_{ger}$$

$$E(Y_{.e.}^2) = a^2n^2\mu^2 + a^2n^2\beta_e{}^2 + \sum_{g,r}^{a,n} E(\varepsilon_{ger}^2) + 2a^2n^2\mu\beta_e + 2an\mu\sum_{g,r}^{a,n} E(\varepsilon_{ger})$$

$$+ 2an\beta_e\sum_{g,r}^{a,n} E(\varepsilon_{ger})$$

$$= a^2n^2\mu^2 + a^2n^2\beta_e{}^2 + an\sigma^2 + 2a^2n^2\mu\beta_e + 2an\mu.0 + 2an\beta_e.0$$

$$= a^2n^2\mu^2 + a^2n^2\beta_e{}^2 + an\sigma^2 + 2a^2n^2\mu\beta_e$$

$$\sum_{e}^{b} \frac{E(Y_{.e.}^2)}{an} = \sum_{e}^{b}\left(\frac{a^2n^2\mu^2 + a^2n^2\beta_e{}^2 + an\sigma^2 + 2a^2n^2\mu\beta_e}{an}\right)$$

$$= \sum_{e}^{b} (an\mu^2 + an\beta_e{}^2 + \sigma^2 + 2an^2\mu\beta_e)$$

$$= abn\mu^2 + an\sum_{e}^{b} \beta_e{}^2 + b\sigma^2 + 2an\mu\sum_{e}^{b} \mu\beta_e$$

$$= abn\mu^2 + an\sum_{e}^{b} \beta_e{}^2 + b\sigma^2 + 2an\mu.0$$

$$= abn\mu^2 + an\sum_{e}^{b} \beta_e{}^2 + b\sigma^2$$

$$E(KTB) = E\left(\frac{JKB}{b-1}\right) = \frac{1}{b-1}E(JKB)$$

$$= \frac{1}{b-1}E\left(\frac{\sum_e^b Y_{.e.}^2}{an} - \frac{Y_{...}^2}{abn}\right)$$

$$= \frac{1}{b-1}\left(\sum_e^b \quad \frac{E(Y_{.e.}^2)}{an} - \frac{E(Y_{...}^2)}{abn}\right)$$

$$= \frac{1}{b-1}\left(\left(abn\mu^2 + an\sum_e^b \beta_e{}^2 + b\sigma^2\right) - (abn\mu^2 + \sigma^2)\right)$$

$$= \frac{1}{b-1}\left(an\sum_e^b \beta_e{}^2 + (b-1)\sigma^2\right)$$

$$= \sigma^2 + \frac{an\sum_e^b \beta_e}{b-1}$$

$$Y_{ge.} = \sum_r^n Y_{ger}$$

$$= \sum_r^n (\mu + \alpha_g + \beta_e + (\alpha\beta)_{ge} + \varepsilon_{ger})$$

$$= n\mu + \sum_r^n \alpha_g + n\beta_e + n(\alpha\beta)_{ge} + \sum_r^n \varepsilon_{ger}$$

$$= n\mu + n\alpha_g + n\beta_e + n(\alpha\beta)_{ge} + \sum_r^n \varepsilon_{ger}$$

$$Y_{ge.}^2 = \left(n\mu + n\alpha_g + n\beta_e + n(\alpha\beta)_{ge} + \sum_r^n \varepsilon_{ger}\right)^2$$

$$= n^2\mu^2 + n^2\alpha g^2 + n^2\beta_e{}^2 + n^2(\alpha\beta)_{ge}{}^2 + \sum_r^n \varepsilon_{ger}^2 + 2n^2\mu\alpha_g + 2n^2\mu\beta_e$$

$$+ 2n^2\mu(\alpha\beta)_{ge} + 2n\mu\sum_r^n \varepsilon_{ger} + 2n^2\alpha_g\beta_e + 2n^2\alpha_g(\alpha\beta)_{ge} + 2\alpha_g\sum_r^n \varepsilon_{ger}$$

$$+ 2n^2\beta_e(\alpha\beta)_{ge} + 2n^2\beta_e\sum_r^n \varepsilon_{ger} + 2n(\alpha\beta)_{ge}\sum_r^n \varepsilon_{ger}$$

$$E(Y_{ge.}^2) = n^2\mu^2 + n^2\alpha_g{}^2 + n^2\beta_e{}^2 + n^2(\alpha\beta)_{ge}^2 + \sum_r^n E(\varepsilon_{ger}^2) + 2n^2\mu\alpha_g + 2n^2\mu\beta_e +$$

$$2n^2\mu(\alpha\beta)_{ge} + 2n\mu\sum_r^n E(\varepsilon_{ger}) + 2n^2\alpha_g\beta_e + 2n^2\alpha_g(\alpha\beta)_{ge} + 2n\alpha_g\sum_r^n E(\varepsilon_{ger})$$

$$+ 2n^2\beta_e(\alpha\beta)_{ge} + 2n^2\beta_e\sum_r^n E(\varepsilon_{ger}) + 2n(\alpha\beta)_{ge}\sum_r^n E(\varepsilon_{ger})$$

$$= n^2\mu^2 + n^2\alpha_g{}^2 + n^2\beta_e{}^2 + n^2(\alpha\beta)_{ge}^2 + n\sigma^2 + 2n^2\mu\alpha_g + 2n^2\mu\beta_e$$

$$+ 2n^2\mu(\alpha\beta)_{ge} + 2n\mu.0 + 2n^2\alpha_g\beta_e + 2n^2\alpha_g(\alpha\beta)_{ge} + 2n\alpha_g.0$$

$$+ 2n^2\beta_e(\alpha\beta)_{ge} + \quad 2n^2\beta_e.0 + 2n(\alpha\beta)_{ge}.0$$

$$= n^2\mu^2 + n^2\alpha_g{}^2 + n^2\beta_e{}^2 + n^2(\alpha\beta)_{ge}^2 + n\sigma^2 + 2n^2\mu\alpha_g + 2n^2\mu\beta_e$$

$$+ 2n^2\mu(\alpha\beta)_{ge} + 2n^2\alpha_g\beta_e + 2n^2\alpha_g(\alpha\beta)_{ge} + 2n^2\beta_e(\alpha\beta)_{ge}$$

$$\sum_{g,e}^{a,b}\frac{E(Y_{ge.}^2)}{n}$$

$$= \sum_{g,e}^{a,b}(n^2\mu^2 + n^2\alpha_g{}^2 + n^2\beta_e{}^2 + n^2(\alpha\beta)_{ge}^2 + n\sigma^2 + 2n^2\mu\alpha_g + 2n^2\mu\beta_e$$

$$+ 2n^2\mu(\alpha\beta)_{ge} + 2n^2\alpha_g\beta_e + 2n^2\alpha_g(\alpha\beta)_{ge} + 2n^2\beta_e(\alpha\beta)_{ge})/n$$

$$= \sum_{g,e}^{a,b}(n\mu^2 + n\alpha_g{}^2 + n\beta_e{}^2 + n(\alpha\beta)_{ge}^2 + \sigma^2 + 2n\mu\alpha_g + 2n\mu\beta_e$$

$$+ 2n\mu(\alpha\beta)_{ge} + 2n\alpha_g\beta_e + 2n\alpha_g(\alpha\beta)_{ge} + 2n\beta_e(\alpha\beta)_{ge})$$

$$= abn\mu^2 + bn\sum_g^a \alpha_g^2 + an\sum_e^b \beta_e{}^2 + n\sum_{g,e}^{a,b}(\alpha\beta)_{ge}^2 + ab\sigma^2 + 2bn\mu\sum_g^a \alpha_g$$
$$+ 2an\mu\sum_e^b \beta_e + 2n\mu\sum_{g,e}^{a,b}(\alpha\beta)_{ge} + 2n\sum_g^a \alpha_g \sum_e^b \beta_e + 2n\sum_g^a \alpha_g \sum_{g,e}^{a,b}(\alpha\beta)_{ge}$$
$$+ 2n\sum_e^b \beta_e \sum_{g,e}^{a,b}(\alpha\beta)_{ge}$$

$$= abn\mu^2 + bn\sum_g^a \alpha_g^2 + an\sum_e^b \beta_e{}^2 + n\sum_{g,e}^{a,b}(\alpha\beta)_{ge}^2 + ab\sigma^2 + 2bn\mu.0 + 2an\mu.0$$
$$+ 2n\mu.0 + 2n.0.0 + 2n.0.0 + 2n.0.0$$

$$= abn\mu^2 + bn\sum_g^a \alpha_g + an\sum_e^b \beta_e^2 + n\sum_{g,e}^{a,b}(\alpha\beta)_{ge} + ab\sigma^2$$

$$E(KTAB) = E\left(\frac{JKAB}{(a-1)(b-1)}\right) = \frac{1}{(a-1)(b-1)}E(JKAB)$$

$$= \frac{1}{(a-1)(b-1)}E\left(\frac{\sum_{g,e}^{a,b} Y_{ge.}^2}{n} - \frac{Y_{...}^2}{abn} - JKA - JKB\right)$$

$$= \frac{1}{(a-1)(b-1)}E\left(\frac{\sum_{g,e}^{a,b} Y_{ge.}^2}{n} - \frac{Y_{...}^2}{abn} - E(JKA) - E(JKB)\right)$$

$$= \frac{1}{(a-1)(b-1)}\left(\begin{array}{l}\left(abn\mu^2 + bn\sum_g^a \alpha_g^2 + an\sum_e^b \beta_e{}^2 + n\sum_{g,e}^{a,b}(\alpha\beta)_{ge}^2 + ab\sigma^2\right) \\ -(abn\mu^2 + \sigma^2) - \left(bn\sum_g^a \alpha_g^2 + (a-1)\sigma^2\right) - \left(an\sum_e^b \beta_e^2 + (b-1)\right)\end{array}\right)$$

$$= \frac{1}{(a-1)(b-1)}\left(n\sum_{g,e}^{a,b}(\alpha\beta)_{ge}^2 + (ab-1-a+1-b+1)\sigma^2\right)$$

$$= \frac{1}{(a-1)(b-1)}\left(n\sum_{g,e}^{a,b}(\alpha\beta)_{ge}^2 + (a-1)(b-1)\sigma^2\right)$$

$$= \sigma^2 \frac{n\sum_{g,e}^{a,b}(\alpha\beta)_{ge}^2}{(a-1)(b-1)}$$

$$Y_{ger} = \mu + \alpha_g + \beta_e + (\alpha\beta)_{ge} + \varepsilon_{ger}$$

$$Y_{ger}^2 = \left(\mu + \alpha_g + \beta_e + (\alpha\beta)_{ge} + \varepsilon_{ger}\right)^2$$

$$\begin{aligned} &= \mu^2 + \alpha_g^2 + \beta_e^2 + (\alpha\beta)_{ge}^2 + \varepsilon_{ger}^2 + 2\mu\alpha_g + 2\mu\beta_e + 2\mu(\alpha\beta)_{ge} + 2\mu\varepsilon_{ger} \\ &\quad + 2\alpha_g\beta_e + 2\alpha_g(\alpha\beta)_{ge} + 2\alpha_g\varepsilon_{ger} + 2\beta_e(\alpha\beta)_{ge} + 2\beta_e\varepsilon_{ger} + 2\beta_e(\alpha\beta)_{ge} \\ &\quad + 2\beta_e\varepsilon_{ger} + 2(\alpha\beta)_{ge}\varepsilon_{ger} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E(Y_{ger}^2) &= \mu^2 + \alpha_g^2 + \beta_e^2 + (\alpha\beta)_{ge}^2 + E(\varepsilon_{ger}^2) + 2\mu\alpha_g + 2\mu\beta_e + 2\mu(\alpha\beta)_{ge} \\ &\quad + 2\mu E(\varepsilon_{ger}) + 2\alpha_g\beta_e + 2\alpha_g(\alpha\beta)_{ge} + 2\alpha_g E(\varepsilon_{ger}) + 2\beta_e(\alpha\beta)_{ge} \\ &\quad + 2\beta_e E(\varepsilon_{ger}) + 2(\alpha\beta)_{ge} E(\varepsilon_{ger}) \\ &= \mu^2 + \alpha_g^2 + \beta_e^2 + (\alpha\beta)_{ge}^2 + \sigma^2 + 2\mu\alpha_g + 2\mu\beta_e + 2\mu(\alpha\beta)_{ge} + 2\mu.0 \\ &\quad + 2\alpha_g\beta_e + 2\alpha_g(\alpha\beta)_{ge} + 2\alpha_g.0 + 2\beta_e(\alpha\beta)_{ge} + 2\beta_e.0 + 2(\alpha\beta)_{ge}.0 \\ &= \mu^2 + \alpha_g^2 + \beta_e^2 + (\alpha\beta)_{ge}^2 + \sigma^2 + 2\mu\alpha_g + 2\mu\beta_e + 2\mu(\alpha\beta)_{ge} + 2\alpha_g\beta_e \\ &\quad + 2\alpha(_g\alpha\beta)_{ge} + 2\beta_e(\alpha\beta)_{ge} \end{aligned}$$

$$\sum_{g,e,r}^{a,b,n} E(Y_{ger}^2)$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{\mathrm{g,e,r}}^{\mathrm{a,b,n}} (\mu^2 + \alpha_g^2 + \beta_e^2 + (\alpha\beta)_{ge}^2 + \sigma^2 + 2\mu\alpha_g + 2\mu\beta_e + 2\mu(\alpha\beta)_{ge} + 2\alpha_g\beta_e \\ &\quad + 2\alpha_g(\alpha\beta)_{ge} + 2\beta_e(\alpha\beta)_{ge}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= abn\mu^2 + bn\sum_g^a \alpha_g^2 + nn\sum_e^b \beta_e^2 + n\sum_{g,e}^{a,b}(\alpha\beta)_{ge} + abn\sigma^2 + 2bn\mu\sum_g^a \alpha_g + 2an\mu\sum_e^b \beta_e \\ &\quad + 2n\mu\sum_{g,e}^{a,b}(\alpha\beta)_{ge} + 2n\sum_g^a \alpha_g \sum_e^b \beta_e + 2\sum_g^a \alpha_g \sum_{g,e}^{a,b}(\alpha\beta)_{ge} + 2n\sum_e^b \beta_e \sum_{g,e}^{a,b}(\alpha\beta)_{ge} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= abn\mu^2 + bn\sum_g^a \alpha_g^2 + an\sum_e^b \beta_e^2 + n\sum_{g,e}^{a,b}(\alpha\beta)_{ge} + abn\sigma^2 + 2ab\mu.0 + 2bn\mu.0 \\ &\quad + 2n\mu.0 + 2b.0.0 + 2a.0.0 + 2n.0.0 + 2n.0.0 \end{aligned}$$

$$= abn\mu^2 + bn\sum_{g}^{a}\alpha_g^2 + an\sum_{e}^{b}\beta_e^2 + n\sum_{g,e}^{a,b}(\alpha\beta)_{ge} + abn\sigma^2$$

$$E(JKT) = E\left(\sum_{g,e,r}^{a,b,n} Y_{ger}^2 - \frac{Y_{...}^2}{abn}\right)$$

$$= \left(\sum_{g,e,r}^{a,b,n} E(Y_{ger}^2) - \frac{Y_{...}^2}{abn}\right)$$

$$= \left(\left(abn\mu^2 + bn\sum_{g}^{a}\alpha_g^2 + an\sum_{e}^{b}\beta_e^2 + n\sum_{g,e}^{a,b}(\alpha\beta)_{ge} + abn\sigma^2\right) - (abn\mu^2 + \sigma^2)\right)$$

$$= bn\sum_{g}^{a}\alpha_g^2 + an\sum_{e}^{b}\beta_e^2 + n\sum_{g,e}^{a,b}(\alpha\beta)_{ge} + (abn-1)\sigma^2$$

$$Y_{g.r} = \sum_{e}^{b} Y_{ger}$$

$$= \sum_{e}^{b}(\mu + \alpha_g + \beta_e + (\alpha\beta)_{ge} + \varepsilon_{ger})$$

$$= b\mu + b\alpha_g + b\beta_e + \sum_{e}^{b}(\alpha\beta)_{ge} + \sum_{e}^{b}\varepsilon_{ger}$$

$$= b\mu + b\alpha_g + b\beta_e + \sum_{e}^{b}\varepsilon_{ger}$$

$$Y_{g.r}^2 = \left(b\mu + b\alpha_g + b\beta_e + \sum_{e}^{b}\varepsilon_{ger}\right)^2$$

$$= b^2\mu^2 + b^2\alpha_g{}^2 + b^2\beta_e{}^2 + \sum_{e}^{b}\varepsilon_{ger}^2 + 2b^2\mu\alpha_g + 2b^2\mu\beta_e + 2b\mu\sum_{e}^{b}\varepsilon_{ger}$$

$$+ 2b^2\alpha_g\beta_e + 2b\alpha_g\sum_{e}^{b}\varepsilon_{ger} + 2b\beta_e\sum_{e}^{b}\varepsilon_{ger}$$

$$E(Y_{g.r}^2) = b^2\mu^2 + b^2\alpha_g{}^2 + b^2\beta_e{}^2 + \sum_e^b E(\varepsilon_{ger}^2) + 2b^2\mu\alpha_g + 2b^2\mu\beta_e + 2b\mu\sum_e^b E(\varepsilon_{ger})$$

$$+ 2b^2\alpha_g\beta_e + 2b\alpha_g\sum_e^b E(\varepsilon_{ger}) + 2b\beta_e\sum_e^b E(\varepsilon_{ger})$$

$$= b^2\mu^2 + b^2\alpha_g{}^2 + b^2\beta_e{}^2 + b\sigma^2 + 2b^2\mu\alpha_g + 2b^2\mu\beta_e + 2b\mu.0 + 2b^2\alpha_g\beta_e$$

$$+ 2b\alpha_g.0 + 2b\beta_e.0$$

$$= b^2\mu^2 + b^2\alpha_g{}^2 + b^2\beta_e{}^2 + b\sigma^2 + 2b^2\mu\alpha_g + 2b^2\mu\beta_e + 2b^2\alpha_g\beta_e$$

$$\sum_{g,r}^{a,n}\frac{E(Y_{g.r}^2)}{b} = \sum_{g,r}^{a,n}\left(\frac{b^2\mu^2 + b^2\alpha_g{}^2 + b^2\beta_e{}^2 + b\sigma^2 + 2b^2\mu\alpha_g + 2b^2\mu\beta_e + 2b^2\alpha_g\beta_e}{b}\right)$$

$$= \sum_{g,r}^{a,n}\left(b^2\mu^2 + b^2\alpha_g{}^2 + b^2\beta_e{}^2 + b\sigma^2 + 2b^2\mu\alpha_g + 2b^2\mu\beta_e + 2b^2\alpha_g\beta_e\right)$$

$$= abn\mu^2 + bn\sum_g^a\alpha_g{}^2 + an\sum_e^b\beta_e{}^2 + an\sigma^2 + 2abn\mu\sum_g^a\alpha_g + 2bn\mu\sum_e^b\beta_e$$

$$+ 2b\sum_g^a\alpha_g\sum_e^b\beta_e$$

$$= abn\mu^2 + bn\sum_g^a\alpha_g{}^2 + an\sum_e^b\beta_e{}^2 + an\sigma^2 + 2abn\mu.0 + 2bn\mu.0 + 2b.0.0$$

$$= abn\mu^2 + bn\sum_g^a\alpha_g{}^2 + an\sum_e^b\beta_e{}^2 + an\sigma^2$$

$$E(KTG) = E\left(\frac{JKG}{(a-1)(n-1)}\right) = \frac{1}{(a-1)(n-1)}E(JKG)$$

$$= \frac{1}{(a-1)(n-1)}E\left(\frac{\sum_g^a Y_{g.r}^2}{b} - \frac{Y_{...}^2}{abn} - JKA\right)$$

$$= \frac{1}{(a-1)(n-1)}\left(\sum_g^a\frac{E(Y_{g.r}^2)}{b} - \sum_{g,e,r}^{a,b,n}\frac{E(Y_{...}^2)}{abn} - E(JKA)\right)$$

$$= \frac{1}{(a-1)(n-1)}\left(\begin{array}{l}\left(abn\mu^2 + bn\sum_g^a \alpha_g{}^2 + an\sum_e^b \beta_e{}^2 + an\sigma^2\right) - \\ \left(abn\mu^2 + \sigma^2\right) - \left(bn\sum_g^a \alpha_g^2 + (n-1)\sigma^2\right) - \left(an\sum_e^b \beta_e{}^2 + (a-1)\sigma^2\right)\end{array}\right)$$

$$= \frac{1}{(a-1)(n-1)}\left((an-1-n+1-a+1)\sigma^2\right)$$

$$= \frac{1}{(a-1)(n-1)}\left((an-n-a+1)\sigma^2\right)$$

$$= \frac{1}{(a-1)(n-1)}\left((a-1)(n-1)\sigma^2\right)$$

$$= \sigma^2$$

Nilai harapan dari kuadrat tengah untuk galat ini dapat juga dicari dengan cara sebagai berikut :

JKG = JKT– JKA – JKB – JKAB

E(JKG) = E(JKT)– E(JKA) – E(JKB) – E(JKAB)

$$= \left(bn\sum_g^a \alpha_g^2 + an\sum_e^b \beta_e^2 + n\sum_{g,e}^{a,b} (\alpha\beta)_{ge}^2 + (abn-1)\sigma^2\right) -$$

$$\left(bn\sum_g^a \alpha_g^2 + (a-1)\sigma^2\right) - \left(an\sum_g^a \beta_e^2 + (b-1)\sigma^2\right) -$$

$$- \left(n\sum_{g,e}^{a,b} (\alpha\beta)_{ge}^2 + (ab-1-a+1-b+1)\sigma^2\right)$$

$$= (abn-1)\sigma^2 - (a-1)\sigma^2 - (b-1)\sigma^2 - (a-1)(b-1)\sigma^2$$

$$= abn - \sigma^2 - \sigma^2 - a\sigma^2 + \sigma^2 - b\sigma^2 + \sigma^2 - ab\sigma^2 + a\sigma^2 + b\sigma^2 - \sigma^2$$

$$= abn\sigma^2 + \sigma^2 - ab\sigma^2$$

$$= (ab-1)(n-1)\sigma^2$$

$$E(KTG) = E\left(\frac{JKG}{(a-1)(n-1)}\right)$$

$$= \frac{(ab-1)(n-1)\sigma^2}{(ab-1)(n-1)} = \sigma^2$$

Dari perhitungan jumlah kuadrat dan ekspektasi kuadrat tengah dapat dibentuk tabel analisis varian sebagai berikut :

Tabel 2.3. Analisis Variansi Rancangan Faktorial Dua Faktor dalam RAL

SK	**DB**	**JK**	**KT**	**Nilai Harapan KT**	$\mathbf{F_{hitung}}$	$\mathbf{F_{tabel}}$
A	$(a-1)$	JKA	$\frac{JKA}{(a-1)}$	$\sigma^2 + bn\frac{\sum_g^a \alpha_g^2}{a-1}$	$\frac{KTA}{KTG}$	$F_{(a-1);ab(n-1)}(\alpha)$
B	$(b-1)$	JKB	$\frac{JKB}{(b-1)}$	$\sigma^2 + \frac{an\sum_e^b \beta_e^2}{b-1}$	$\frac{KTB}{KTG}$	$F_{(b-1);ab(n-1)}(\alpha)$
AB	$(a-1)(b-1)$	JKAB	$\frac{JK(AB)}{(a-1)(b-1)}$	$\sigma^2 + \frac{n\sum_{g,e}^{a,b}(\alpha\beta)_{ge}^2}{(a-1)(b-1)}$	$\frac{KTAB}{KTG}$	$F_{(a-1)(b-1);ab(n-1)}(\alpha)$
Galat	$ab(n-1)$	JKG	$\frac{JKG}{ab(n-1)}$	σ^2		
Total	$(abn-1)$	JKT				

2.2 Checking Model

Asumsi-asumsi yang harus dipenuhi untuk rancangan faktorial model tetap adalah galat dalam model tersebut adalah berdistribusi normal dan independen serta galat dalam percobaan mempunyai galat yang homogen.

1. Asumsi Normalitas

   Untuk mengecek asumsi kenormalan dapat dilakukan dengan cara membuat histogram dari nilai-nilai residual. Pengujian kenormalan dapat juga dilakukan dengan menggunakan Q-Q plot. Adapun prosedurnya sebagai berikut:

a. Urutkan nilai residual (e_i) dari yang terkecil sampai terbesar

b. Untuk setiap e_i hitung nilai $p_i = \left(\dfrac{k - 0{,}5}{n} \right)$ dengan k = urutan dari e_i dan n= banyaknya data dari e_i

c. Untuk setiap p_i hitung $F^1(p_i) = Q(p_i)$ dengan bantuan sebaran normal baku. F merupakan fungsi sebaran normal kumulatif sedangkan Q (p_i) adalah kuantil normal baku.

d. Buat plot antara e_i yang telah diurutkan dengan Q (p_i) yang merupakan Q-Q plot

Pola pemencaran titik dalam plot yang membentuk garis lurus menjadi petunjuk bahwa sebaran data dapat didekati oleh pola sebaran normal.

Uji kenormalan dapat juga dilakukan dengan menggunakan uji Kolmogorov-Smirnov.

Hipotesis :

H_0 : Residual berdistribusi normal

H_1 : Residual tidak berdistribusi normal

Dengan langkah-langkah sebagai berikut :

a. Menentukan perbedaan absolut maksimum antara distribusi kumulatif data sampel (observasi) dengan distribusi yang dihipotesakan.

$DN = \sup \left| F_n(X) - F_0(X) \right|$ dengan

$F_n(X)$: distribusi kumulatif data sampel

$F_0(X)$: distribusi kumulatif yang dihipotesakan

$F_n(X)$ diperoleh dengan cara menentukan frekuensi kumulatif residual dari yang terkecil ke yang terbesar kemudian membaginya dengan banyaknya data residual yang ada. Untuk mencari $F_0(X)$ terlebih dahulu mencari nilai Z sebagai berikut : $Z = \frac{X - \overline{X}}{\sigma}$. Kemudian nilai Z ini dibandingkan dengan nilai-nilai yang ada dalam tabel distribusi standard normal kumulatif untuk menghitung $F_0(X) = P(X \le X_i)$

b. Membandingkan nilai absolut maksimum di atas dengan suatu nilai kritis $DN_{(\alpha)}$.

$DN_{(\alpha)}$ merupakan nilai kritis yang diperoleh dari tabel Kolmogorov-Smirnov dengan $DN_{(\alpha)} = \frac{1,36}{\sqrt{N}}$

Keputusan : tolak H_0 jika $DN > DN_{(\alpha)}$ atau p-value < α

(Daniel, W 1989).

2. Homogenitas Varian

Pengujian homegenitas varian dapat dilakukan dengan dua cara, yaitu dengan membuat plot antara residual dengan nilai prediksinya. Bila plot yang terbentuk tidak membentuk suatu pola tertentu maka dikatakan homogenitas varian terpenuhi. Cara lain yaitu dengan uji Barlett. Adapun prosedurnya :

Hipotesis :

$H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma_3^2 = \cdots = \sigma_a^2$ (varian dari semua perlakuan sama)

H_1 : paling sedikit sepasang tidak sama.

Statistik uji :

$$\chi_0^2 = 2{,}3026\frac{q}{c} \qquad q = \left(\sum_{i=1}^{a}(n_i - 1)\right)\log S_p^2 - \sum_{i=1}^{a}(n_i - 1)\log S_i^2$$

$$S_i^2 = \frac{1}{n_i - 1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2 \qquad S_p^2 = \frac{\sum_{i=1}^{a}(n_i - 1)S_i^2}{\sum_{i=1}^{a}(n_i - 1)}$$

$$c = 1 + \frac{1}{3(a-1)}\left[\sum_{i=1}^{a}\frac{1}{(n_i - 1)} - \frac{1}{\sum_{i=1}^{a}(n_i - 1)}\right]$$

Keputusan : tolak H_0 jika $\chi_0^2 > \chi^2_{(a-1);\alpha}$ atau p-value < α

(*Widiharih, T 2007).*

3. Independensi Galat

Pengujian keacakan galat dapat dilakukan dengan dua cara yaitu cara visual (dengan grafik) dan cara formal.

Pengujian secara visual dengan membuat plot antara nilai galat percobaan (ε_{ijk}) dengan urutan datanya. Apabila plot yang dihasilkan tidak membentuk pola tertentu maka dapat dikatakan galat percobaan saling bebas (tidak ada korelasi antar galat).

Pengujian secara formal dapat dilakukan dengan uji Durbin-Watson.

Hipotesis :

H_0 : tidak ada autokorelasi antar galat

H_1 : ada autokorelasi antar galat

Statistik uji :

$$d = \frac{\sum_{i=2}^{n} \left(e_i - e_{i-1}\right)^2}{\sum_{i=1}^{n} e_i^{\ 2}}$$

Keputusan : tolak H_0 jika $d > dL$, dimana dL adalah nilai batas bawah dari tabel Durbin-Watson.

2.3 Uji Perbandingan Berganda Duncan (DMRT = Duncan Multiple Range Test)

Jika ternyata H_0 ditolak atau H_1 diterima, maka langkah selanjutnya dilakukan uji perbandingan ganda (uji lanjut) untuk menentukan perlakuan mana yang menyebabkan H_0 ditolak. Dalam pembahasan ini digunakan salah satu uji yaitu uji Duncan. Dalam uji perbandingan berganda Duncan, menggunakan sekumpulan nilai perbandingan yang nilainya meningkat tergantung dari jarak peringkat dua buah rata-rata perlakuan yang dibandingkan. Langkah-langkah pengujian dengan DMRT sebagai berikut :

1. Urutkan rata-rata perlakuan dari yang terkecil sampai yang terbesar.

   $$\bar{y}_{(a)}, y_{(a-1)}, \ldots, \bar{y}_{(2)}, \bar{y}_{(1)}$$

2. Hitung galat baku : $S_{\bar{y}} = \sqrt{\frac{KTG}{n}}$

3. Nilai kritis Duncan R_p dihitung dengan rumus : $R_p = r_{p;db.g.} S_{\bar{y}}$. Harga $r_{p;db.g.}$ diperoleh dari table untuk perbandingan Duncan , p = 2,3,…,a-1 dengan a : banyaknya perlakuan yang dibandingkan.

4. Dua rata-rata perlakuan dikatakan berbeda jika mutlak dari selisih dua rata-rata tersebut lebih besar dari Rp yang bersesuaian. Secara mudahnya sebagai berikut :

   a. Perbandingan untuk rata-rata perlakuan terbesar $\left(\overline{y}_{(1)}\right)$.

      1. Dicari $A_1 = \overline{y}_{(1)} - \overline{y}_{(2)}$. Jika $A_1 > R_2$, rata-rata perlakuan terbesar dan terbesar kedua berbeda, pembandingan untuk $\overline{y}_{(1)}$ selesai maka dilanjutkan ke langkah (b). Jika $A_1 < R_2$, rata-rata perlakuan terbesar dan terbesar kedua tidak berbeda, diberi garis bawah dari $\overline{y}_{(1)}$ sampai $\overline{y}_{(2)}$.

      2. Dicari $A_2 = \overline{y}_{(1)} - \overline{y}_{(2)}$. Jika $A_2 > R_3$, rata-rata perlakuan yang terbesar berbeda dengan rata-rata perlakuan terbesar ketiga, dengan sendirinya berbeda dengan rata-rata perlakuan yang terbesar keempat, lima dan seterusnya. Jika pembandingan untuk $\overline{y}_{(1)}$ selesai dilanjutkan ke langkah (b). Jika $A_2 < R_3$, rata-rata perlakuan terbesar tidak berbeda dengan rata-rata perlakuan terbesar ketiga, perpanjang garis bawah dari $\overline{y}_{(1)}$ sampai $\overline{y}_{(3)}$..Langkah ini diulang dengan menghitung $A_3 = \overline{y}_{(1)} - \overline{y}_{(4)}$ dengan pembanding R_4, dan seterusnya sampai dengan A_i sehingga $A_i > R_p$ yang bersesuaian (sampai menemukan rata-rata perlakuan ke i yang berbeda dengan rata-rata perlakuan yang terbesar).

   b. Pembandingan untuk $\overline{y}_{(2)}$ (rata-rata perlakuan terbesar ke dua).

      1. Dicari $B_1 = \overline{y}_{(2)} - \overline{y}_{(3)}$. Jika $B_1 > R_2$, rata-rata perlakuan terbesar kedua dan ketiga berbeda, pembandingan untuk $\overline{y}_{(2)}$ selesai. Kemudian dilakukan

pembandingan untuk $\overline{y}_{(3)}$ dengan cara analog. Jika $B_1 < R_2$, rata-rata perlakuan terbesar kedua dan ketiga tidak berbeda, diberi garis bawah dari $\overline{y}_{(2)}$ sampai $\overline{y}_{(3)}$. Dilanjutkan dengan langkah (b2).

2. Dicari $B_2 = \overline{y}_{(2)} - \overline{y}_{(3)}$. Jika $B_2 > R_3$, rata-rata perlakuan terbesar kedua dan keempat berbeda, jika pembandingan untuk $\overline{y}_{(2)}$ selesai dilakukan pembandingan untuk $\overline{y}_{(3)}$, $\overline{y}_{(4)}$ dan seterusnya dengan cara analog. Jika $B_2 < R_3$, rata-rata perlakuan kedua dan keempat tidak berbeda, perpanjang garis bawah dari $\overline{y}_{(2)}$ sampai $\overline{y}_{(4)}$. Langkah ini diulang dengan menghitung $B_3 = \overline{y}_{(2)} - \overline{y}_{(5)}$ dengan pembanding R_4, dan seterusnya sehingga menemukan $B_i > R_p$ yang bersesuaian (sampai menemukan rata-rata perlakuan yang berbeda dengan rata-rata perlakuan terbesar kedua).

2.4 Matriks

Definisi 2.4.1 *(Haryatmi, S 1998)*

Matriks $m \text{ x } k$ adalah susunan elemen-elemen yang mempunyai baris dan kolom.

$$\underset{(m\text{ x }k)}{\mathrm{A}} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mk} \end{bmatrix} \text{ atau } \underset{(m\text{ x }k)}{\mathrm{A}} = \{a_{ij}\}$$

Definisi 2.4.2

Matriks $\underset{(m\text{ x }k)}{\mathrm{A}} = \{a_{ij}\}$ dan $\underset{(m\text{ x }k)}{\mathrm{B}} = \{b_{ij}\}$ dikatakan sama, ditulis A = B jika $a_{ij} = b_{ij}$, dimana $i = 1, 2, ..., m$ dan $j = 1, 2, ..., k$

Definisi 2.4.3

Matriks $\underset{(m\text{ x }k)}{\mathrm{A}} = \{a_{ij}\}$ dan $\underset{(m\text{ x }k)}{\mathrm{B}} = \{b_{ij}\}$, penjumlahan matriks A dan B adalah matriks C, dengan kata lain C = A+B dimana $\underset{(m\text{ x }k)}{\mathrm{C}} = \{c_{ij}\}$.

$$\underset{(m\text{ x }k)}{\mathrm{A}} + \underset{(m\text{ x }k)}{\mathrm{B}} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mk} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1k} \\ b_{12} & b_{22} & \cdots & b_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mk} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1k} \\ c_{12} & c_{22} & \cdots & c_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mk} \end{bmatrix}$$

$$= \underset{(m\text{ x }k)}{\mathrm{C}}$$

Definisi 2.4.4

Matriks $\underset{(m\,\mathrm{x}\,k)}{\mathrm{A}} = \{a_{ij}\}$ dimana $i = 1, 2, ..., m$ dan $j = 1, 2, ..., k$. Transpose dari matriks A, dinotasikan A^{T}. Adalah pertukaran baris dan kolom dengan $\underset{(m\,\mathrm{x}\,k)}{\mathrm{A}^{\mathrm{T}}} = \{a_{ij}\}$, dimana $i = 1, 2, ..., k$ dan $j = 1, 2, ..., m$.

Sifat 1

Jika A, B dan C matriks dengan ukuran $m\,\mathrm{x}\,k$ kemudian c dan d suatu skalar, maka

1. (A + B) + C = A + (B+C)
2. A + B = B + A
3. c (A+B) = cA + cB
4. (c + d) A = cA + dA
5. $(\mathrm{A} + \mathrm{B})^{\mathrm{T}} = \mathrm{A}^{\mathrm{T}} + \mathrm{B}^{\mathrm{T}}$
6. (cd)A = c(dA)
7. $(c\mathrm{A})^{\mathrm{T}} = c\mathrm{A}^{\mathrm{T}}$

Definisi 2.4.5

Matriks A disebut matriks bujur sangkar jika memiliki banyaknya baris dan kolom yang sama $\underset{(m\,\mathrm{x}\,k)}{\mathrm{A}} = \{a_{ij}\}$ dimana $i = 1, 2, ..., m$.

$$\underset{(m\,\mathrm{x}\,k)}{\mathrm{A}} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mm} \end{bmatrix}$$

Definisi 2.4.6

Matriks bujur sangkar A disebut matriks simetris jika $\mathrm{A} = \mathrm{A}^{\mathrm{T}}$

Definisi 2.4.7

Matriks bujur sangkar I disebut matriks identitas jika elemen diagonal utamanya adalah satu dan nol untuk yang lain.

$$\mathrm{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

Definisi 2.4.8

Jika matriks $\underset{(m \times m)}{\mathrm{A}} = \{a_{ij}\}$ dan $\underset{(m \times k)}{\mathrm{B}} = \{b_{ij}\}$, maka perkalian matriks A dan B adalah matriks $\underset{(m \times k)}{\mathrm{C}} = \{c_{ij}\}$, maka $c_{ij} = \sum_{p=1}^{n} a_{ip} b_{pj}$, dimana $i = 1, 2, \ldots, m$ dan $j = 1, 2, \ldots, k$

Sifat 2

Jika A, B dan C adalah matriks dan c adalah skalar, maka:

1. c(AB) = (cA) B
2. A(BC) = (AB) C
3. A(B+C) = AB + AC
4. (B+C)A = BA + CA
5. $(AB)^T = (BA)^T$

Definisi 2.4.9

Rank dari matriks A yang dinotasikan dengan r(A) didefinisikan sebagai jumlah maksimum baris atau kolom yang bebas linier.

Definisi 2.4.10

Matriks bujur sangkar A dikatakan non singular jika rank matriks sama dengan banyaknya baris atau kolom.

Definisi 2.4.11

Matriks bujur sangkar B dikatakan invers dari matriks A dinotasikan A^{-1}, jika AB=BA=I dengan I adalah matriks identitas.

Sifat 3

Jika A dan B adalah matriks bujur sangkar, maka:

1. $(A^{-1})^{1}=(A^{1})^{-1}$
2. $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$

Definisi 2.4.12

Determinan matriks bujur sangkar $\underset{(m \times m)}{A} = \{a_{ij}\}$, dinotasikan $|A|$ adalah skalar yang didefinisikan sebagai:

a. $|A| = a_{11}$, dimana m = 1

b. $|A| = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}|A_{ij}|(-1)^{1+j}$, untuk m>1

Sifat 4

Jika A dan B matriks bujur sangkar berukuran $m \times m$ dan c suatu skalar, maka:

1. $|A| = |A^T|$

2. $|AB| = |A||B|$

3. Untuk matriks non singular A, $|A^{-1}| = \dfrac{1}{|A|}$

4. $|cA| = c^m |A|$

Definisi 2.4.13

A disebut matriks diagonal, dinotasikan dengan A jika elemen-elemen selain elemen diagonal utamanya adalah nol.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & a_{mm} \end{bmatrix}$$

Definisi 2.4.14 Teras Matriks *(Sartono, dkk 2003)*

Teras dari matriks A berukuran n x n didefinisikan sebagai penjumlahan semua akar cirinya dan dinotasikan $tr(\mathrm{A})$, sehingga $tr(\mathrm{A}) = \lambda_1 + \dots + \lambda_n$

Bisa ditunjukkan bahwa $tr(\mathrm{A}) = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}$, jumlah dari unsur-unsur diagonalnya. Padanan ini merupakan konsep yang sangat berguna pada pengembangan teori komponen utama.

Sebagai contoh, jika A = $\begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ dan B = $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

Maka $tr(\mathrm{A})$ = 3+3+1 = 7 dan $tr(\mathrm{B})$ = 2+1+2 = 5

Jika A dan B adalah dua matriks yang berturut-turut berukuran mxn dan nxm maka $tr(\mathrm{A}) = tr(\mathrm{B})$. Pada ilustrasinya sebelumnya,

AB = $\begin{bmatrix} 7 & 7 & 13 \\ 4 & 5 & 8 \\ 3 & 3 & 7 \end{bmatrix}$ dan BA = $\begin{bmatrix} 9 & 13 & 3 \\ 4 & 7 & 2 \\ 5 & 3 & 3 \end{bmatrix}$

Dan $tr(\mathrm{AB})$ = 7+5+7=19=9+7+3 = $tr(\mathrm{BA})$

Definisi 2.4.15

Suatu matriks A dikatakan orthogonal jika memiliki sifat $A^T A = I = AA$

2.5 Analisis Komponen Utama (Prinsip)

Di dalam statistika terdapat usaha-usaha untuk menyederhanakan struktur data atau mereduksi dimensi data tanpa mengabaikan variabel-variabel yang telah diukur tersebut. Salah satu metode statistika tersebut adalah analisis komponen utama (*principal component analysis*).

Analisis komponen utama (prinsip) adalah salah satu teknik eksplorasi data yang digunakan sangat luas ketika menghadapi data multivariat. Analisis komponen utama merupakan teknik statistik yang dapat digunakan untuk menjelaskan struktur variansi-kovariansi dari sekumpulan variabel melalui beberapa variabel baru dimana variabel baru ini saling bebas dan merupakan kombinasi linier dari variabel asal. Selanjutnya variabel baru ini dinamakan komponen utama (*principal component*).

2.5.1 Akar Ciri dan Vektor Ciri

Definisi :

Jika A adalah matriks berukuran n x n, maka vektor tak nol x di dalam R^n dinamakan vektor ciri dari A jika Ax adalah kelipatan skalar dari x, yaitu:

$$\mathrm{A}x = \lambda x$$

Untuk suatu skalar λ. Skalar λ disebut akar ciri dari A dan x dikatakan vektor ciri yang bersesuaian dengan λ.

Untuk mencari akar ciri matrik A yang berukuran n x n maka ditulis $\mathrm{A}x = \lambda \mathrm{x}$ sebagai

$$\mathrm{A}x = \lambda \mathrm{I}x \;\Leftrightarrow\; (\lambda \mathrm{I} - \mathrm{A})x = 0$$

Dan persamaan di atas akan mempunyai penyelesaian jika $\det(\lambda \mathrm{I} - \mathrm{A}) = 0$ (2.5)

Persamaan (2.5) disebut persamaan karakteristik A.

Contoh

Carilah nilai-nilai akar ciri dan vektor ciri dari $\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

Jawab

Persamaan karakteristik

$$\lambda \mathrm{I} - \mathrm{A} = \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda - 3 & -2 \\ 1 & \lambda \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \det(\lambda \mathrm{I} - \mathrm{A}) &= (\lambda - 3)\lambda - (-2) = 0 \\ &= \lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \\ &\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 1 \end{aligned}$$

Jadi nilai-nilai akar ciri dari A adalah $\lambda_1 = 2$ dan $\lambda_2 = 1$

Ruang vektor: $\begin{bmatrix} \lambda - 3 & -2 \\ 1 & \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Jika $\lambda = 2$ diperoleh: $\begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$\begin{aligned} -x_1 - 2x_2 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 &= 0 \end{aligned}$$

dengan eliminasi diperoleh $x_1 = -2s, x_2 = -s$

Jadi vektor-vektor ciri dari A yang bersesuaian dengan λ adalah vektor-vektor tak nol

yang berbentuk $x = \begin{bmatrix} -2s \\ -s \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix}$

Jadi basisnya adalah $\begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix}$ untuk $\lambda = 2$

2.5.2 Menentukan Komponen Utama

Dipunyai matriks kovarian Σ dari p buah variabel $x_1, x_2, ..., x_p$. Total varian dari variabel-variabel tersebut didefinisikan sebagai $tr(\Sigma)$ = $trace(\Sigma)$ yaitu penjumlahan dari unsur diagonal matriks Σ. Komponen utama pertama dari vektor berukuran p x 1, $x = (x_1, x_2, ..., x_p)^T$ adalah kombinasi linear :

$$y_1 = a_1 x = a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + ... + a_{1p} x_p$$

dimana :

$a_1 = (a_{11}, a_{12}, ..., x_{1p})^T$ dan $a_1^T a = 1$

Varian dari komponen pertama adalah :

$$\sigma_{y1}^2 = a_1^T \sum a_1 = \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{p} a_{1i} a_{1j} a_{ij} \qquad (2.6)$$

vektor a_1 dipilih sedemikian sehingga σ_{y1}^2 mencapai maksimum dengan kendala $a_1^T a = 1$. Menggunakan teknik pemaksimuman berkendala lagrange diperoleh persamaan :

$$f(a_1, \lambda) = \sigma_{y1}^2 - \lambda(a_1^T a_1 - 1) = a_1^T \sum a_1 - \lambda(a_1^T a_1 - 1) \qquad (2.7)$$

Jika persamaan (2.7) diturunkan terhadap vektor a_1 dan disamadengankan nol diperoleh :

$$\frac{df(a_1, \lambda)}{da_1} = 2\sum a_1 - 2\lambda a_1 = 0 \text{ atau } \sum a_1 = \lambda a_1 \qquad (2.8)$$

Persamaan (2.8) dipenuhi oleh λ dan a_1 yang merupakan pasangan akar ciri dan vektor ciri matriks Σ. Akibatnya $a_1^T \sum a_1 = a_1^T \lambda\, a_1 = \lambda\, a_1^T a_1 = \lambda$. Oleh karena itu varian

$y_1 = \sigma_{y1}^2 = a_1^T \sum a_1 = \lambda$ harus maksimum, maka λ adalah akar ciri yang terbesar dari matriks Σ dan a_1 adalah vektor ciri yang bersesuaian dengannya.

Komponen utama kedua adalah kombinasi linear dari $a_2 x$ adalah $y_2 = a_2 x = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2p}x_p$, dimana $a_2 = (a_{21}, a_{22}, ..., x_{2p})^T$ dan $a_2^T a_2 = 1$ dipilih sedemikian sehingga $y_2 = a_2 x$ tidak berkorelasi dengan $y_1 = a_1 x$. Varian y_2 adalah

$$\sigma_{y2}^2 = a_2^T \sum a_2 \qquad (2.9)$$

Varian tersebut akan dimaksimumkan dengan kendala $a_2^T a_2 = 1$ dan cov (y_1, y_2) = cov $(a_1 x, a_{2x}) = a_1^T \sum a_2 = 0$. Karena a_1 adalah vektor ciri dari Σ dan Σ adalah matriks simetrik, maka

$$a_1^T \sum = a_1^T \sum{}^T = \left(\sum a_1\right)^T = (\lambda a_1)^T = \lambda a_1^T .$$

Kendala $a_1^T \sum a_2 = \lambda a_1^T a_2 = 0$ dapat dituliskan sebagai $a_1^T a_2 = 0$. Jadi fungsi Lagrange yang dimaksimumkan adalah

$$f(a_2, \lambda_1, \lambda_2) = a_2^T \sum a_2 - \lambda_1 (a_2^T a_2 - 1) - \lambda_2 (a_1^T a_2 - 0) \qquad (2.10)$$

fungsi Lagrange yang dimaksimumkan diturunkan terhadap vektor a_2 diperoleh

$$\frac{df(a_2, \lambda_1, \lambda_2)}{da_2} = 2\sum a_2 - 2\lambda_1 a_1 - \lambda_2 \sum a_1 = 0 \qquad (2.11)$$

Jika persamaan (2.11) dikalikan dengan a_1^T maka diperoleh

$$2\, a_1^T \sum a_2 - 2\lambda_1\, a_1^T a_2 - \lambda_2\, a_1^T \sum a_1 = 0$$
$$2\, a_1^T \sum a_2 - 2\lambda_1\, a_1^T a_2 - \lambda_2\, a_1^T \sum a_1 = 0 \quad \left(karena \sum a_1 = \lambda a_1\right)$$
$$2\, a_1^T \sum a_2 - 2\lambda_1\, a_1^T a_2 - \lambda_2 \lambda\, a_1^T a_1 = 0$$
$$2\, a_1^T \sum a_2 - 0 - \lambda_2 \lambda = 0$$

Oleh karena $2\, a_1^T \sum a_2 = 0$ maka $\lambda_2 = 0$. Dengan demikian persamaan (2.11) setelah diturunkan terhadap a_2 menjadi

$$\frac{df(a_2, \lambda_1, \lambda_2)}{da_2} = 2\sum a_2 - 2\lambda_1 a_1 = 0 \qquad (2.12)$$
$$\sum a_2 - \lambda_1 a_2 = 0$$

Jadi λ_1 dan a_2 merupakan pasangan akar ciri dan vektor ciri dari matriks varian-kovarian Σ. Seperti halnya penurunan pada pencarian a_1, akan diperoleh bahwa a_2 adalah vektor ciri yang bersesuaian dengan akar ciri terbesar kedua dari matriks Σ. Logika yang sama digunakan untuk mendapatkan komponen utama yang lain.

2.5.3 Kriteria Pemilihan Komponen Utama

Salah satu tujuan dari analisis komponen utama adalah mereduksi dimensi data asal yang semula, terdapat *p* variabel bebas menjadi *k* komponen utama (dimana $k<p$). Kriteria pemilihan *k* adalah proporsi kumulatif keragaman data asal yang dijelaskan oleh *k* komponen utama minimal 80% dan proporsi total variansi populasi bernilai cukup besar .

2.5.4 Kontribusi Komponen Utama

Dipunyai $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq ...\lambda_p \geq 0$ adalah akar ciri yang bersesuaian dengan vektor ciri $a_1, a_2, ..., a_p$ dari matrik Σ dan panjang dari setiap vektor tersebut masing-masing adalah 1 atau $a_i^T a_i = 1$ untuk $i = 1,2,\ldots p$.

Persamaan komponen utama pertama, kedua, …, ke - p dari x berturut-turut adalah :

$$y_1 = a_1^T x;\ y_2 = a_2^T x; ..., y_p = a_p^T x \tag{2.13}$$

Akar ciri dari matriks varian-kovarian Σ adalah varian dari komponen-komponen utama atau dapat juga dinyatakan dengan persamaan :

$$\mathrm{var}(\mathrm{y}_1) = \lambda_1; \mathrm{var}(\mathrm{y}_2) = \lambda_2; ...; \mathrm{var}(\mathrm{y}_\mathrm{p}) = \lambda_p$$

Total varian ditunjukkan oleh $tr\,(\Sigma)$, sehingga total varian sama dengan jumlah dari seluruh akar ciri yaitu

$$\lambda_1 + \lambda_2 + ... + \lambda_p = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \tag{2.14}$$

Jadi kontribusi (dalam persentase) masing-masing komponen utama ke-j terhadap total varian x adalah :

$$\frac{\lambda_i}{\sum_{i=1}^{p} \lambda_i} x100\% \tag{2.15}$$

Tidak terdapat patokan baku untuk menentukan batas minimum banyaknya komponen utama, salah satunya adalah menggunakan kumulatif persentase varian total yang mampu dijelaskan.

2.5.5 Penguraian Nilai Singular / Singular Value Decomposition (SVD)

Singular Value Decomposition (SVD) bertujuan menguraikan suatu matriks X berukuran mxn yang merupakan matriks data peubah ganda yang terkoreksi terhadap rataannya dimana m adalah banyaknya objek pengamatan dan n adalah banyaknya peubah bebasnya, menjadi 3 buah matriks yang salah satunya merupakan matriks nilai singular matrik Z.

SVD merupakan proses penguraian suatu matriks menjadi 3 buah matriks yang salah satunya adalah matriks nilai singular matriks asal.

Misalkan ada suatu matriks asal Z berukuran nxp yang sudah terkoreksi terhadap rataannya dimana m adalah banyaknya objek pengamatan dan n adalah banyaknya peubah bebasnya, maka penerapan konsep SVD terhadap matriks Z adalah:

$$ {}_{n}\mathrm{Z}_{p} = {}_{n}\mathrm{U}_{r}\, {}_{r}\mathrm{L}_{r}\, {}_{r}\mathrm{A}_{p} \tag{2.16}$$

dengan: $U^TU – A^TA = I_r$, I_r adalah matriks identitas berdimensi r.

L adalah matriks diagonal berukuran r x r dengan unsur-unsur diagonalnya adalah akar kuadrat dari akar ciri Z^TZ atau ZZ^T dimana, $\sqrt{\lambda_1} \geq \sqrt{\lambda_2} \geq \ldots \geq \sqrt{\lambda_r}$.

Unsur-unsur diagonal matriks L ini disebut nilai singular dari matriks Z.

Kolom matriks A adalah vektor ciri dari matriks Z^TZ atau ZZ^T yang berpadanan dengan λ .

r adalah rank dari Z.

Sedangkan lajur-lajur matriks U dapat dihitung melalui persamaan : $U = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} x a_i$

λ_i adalah akar ciri ke-I dari matriks Z^TZ dan a_i adalah lajur ke-I matriks A

2.6 Analisis Biplot

Analisis biplot merupakan teknik statistik deskriptif dimensi ganda yang dapat disajikan secara visual dengan menyajikannya secara simultan segugus objek pengamatan dan peubah dalam suatu grafik pada suatu bidang datar sehingga ciri-ciri peubah dan objek pengamatan serta posisi relatif antara objek dan pengamatan dengan peubah dapat dianalisis. Jadi dengan biplot dapat ditunjukkan hubungan antar peubah, kemiripan relatif antar objek pengamatan, serta posisi relatif antara objek pengamatan dengan peubah (Jollife, 1986 & Rawlings, 1988).

Dari tampilan biplot ada beberapa informasi yang dapat diperoleh yaitu:

1. Kedekatan antar objek, informasi ini bisa dijadikan panduan objek mana yang memiliki kemiripan karakteristik dengan objek tertentu. Dua objek dengan karakteristik sama akan digambarkan sebagai dua titik yang posisinya berdekatan.
2. Keragaman peubah, informasi ini digunakan untuk melihat apakah ada peubah tertentu yang nilainya hampir sama semuanya untuk setiap objek, atau sebaliknya bahwa nilai dari setiap objek ada yang sangat besar dan ada juga yang sangat kecil. Dengan adanya informasi ini, bisa diperkirakan pada peubah mana strategi tertentu harus ditingkatkan, serta sebaliknya. Dalam Biplot, peubah dengan keragaman kecil digambarkan sebagai vektor yang pendek sedangkan peubah yang ragamnya besar digambarkan sebagai vektor yang panjang.
3. Hubungan (korelasi antar peubah), informasi ini bisa digunakan untuk menilai bagaimana peubah yang satu mem(di)pengaruhi peubah yang lain. Dengan

menggunakan biplot, peubah akan digambarkan sebagai garis berarah. Dua peubah yang memiliki korelasi positif tinggi akan digambarkan sebagai dua buah garis dengan arah yang sama, atau membentuk sudut sempit. Sementara itu, dua peubah yang memiliki korelasi negatif tinggi akan digambarkan dalam bentuk dua garis dengan arah yang berlawanan, atau membentuk sudut lebar (tumpul). Sedangkan dua peubah yang tidak berkorelasi akan digambarkan dalam bentuk dua garis dengan sudut mendekati 90^0 (siku-siku).

4. Nilai peubah pada suatu objek, informasi ini digunakan untuk melihat keunggulan dari setiap objek. Objek yang terletak searah dengan arah dari suatu peubah, dikatakan bahwa pada objek tersebut nilainya di atas rata-rata. Sebaliknya, jika objek lain terletak berlawanan dengan arah dari peubah tersebut, maka objek tersebut memiliki nilai di bawah rata-rata. Sedangkan objek yang hampir ada tengah-tengah, memiliki nilai dekat dengan rata-rata.

Perlu dipahami sebelumnya bahwa biplot adalah upaya membuat gambar di ruang berdimensi banyak menjadi gambar di ruang dimensi dua. Pereduksian dimensi ini harus dibayar dengan menurunnya besarnya informasi yang terkandung dalam biplot. Biplot yang mampu memberikan informasi sebesar 70% dari seluruh informasi dianggap cukup.

BAB III

ANALISIS FAKTORIAL DUA FAKTOR DENGAN METODE ADDITIVE MAIN EFFECT MULTIPLICATIVE INTERACTION (AMMI)

3.1 Metode AMMI (Additive Main Effect Multiplicative Interaction)

Analisis AMMI adalah suatu teknik analisis data percobaan dua faktor perlakuan dengan pengaruh utama perlakuan bersifat aditif sedangkan pengaruh interaksi dimodelkan dengan model bilinier. Model AMMI merepresentasikan observasi ke dalam komponen sistematik yang terdiri dari pengaruh utama (*main effect*) dan pengaruh interaksi melalui suku-suku multiplikatif (*multiplicative interactions*), disamping komponen acak sisaan atau galat.

Pada dasarnya analisis AMMI menggabungkan analisis ragam aditif bagi pengaruh utama perlakuan dengan analisis komponen utama ganda dengan pemodelan bilinier bagi pengaruh interaksi yang memanfaatkan penguraian nilai singular (SVD) pada matriks interaksi.

3.1.1 Penguraian Bilinier Pengaruh Interaksi

Langkah-langkah pemodelan bilinier bagi pengaruh interaksi faktor A dengan faktor B (γ_{ge}) pada analisis ini adalah sebagai berikut:

- Langkah pertama menyusun pengaruh interaksi dalam bentuk matriks dimana faktor A (baris) x faktor B (kolom), sehingga matriks ini berorde a x b.

$$\gamma = \begin{bmatrix} \gamma_{11} & \cdots & \gamma_{1b} \\ \cdots & \cdots & \cdots\cdot \\ \gamma_{a1} & \cdots & \gamma_{\mathrm{ab}} \end{bmatrix}$$

- Langkah selanjutnya dilakukan penguraian bilinier terhadap matriks pengaruh interaksi faktor A dengan faktor B.

$$\begin{aligned}\gamma_{ge} &= \sum_{r=1}^{n} \sqrt{\lambda_r}\phi_{gr}\rho_{er} + (\alpha\beta)_{ge} \\ &= \sqrt{\lambda_1}\phi_{g1}\rho_{e1} + \sqrt{\lambda_2}\phi_2\rho_{e2} + ... + \sqrt{\lambda_n}\phi_{gn}\rho_{en} + (\alpha\beta)_{ge}\end{aligned}$$

3.1.2 Model Linier Metode AMMI

Model linier untuk rancangan faktorial dua faktor dengan dasar metode AMMI adalah sebagai berikut :

$$\begin{aligned}Y_{ger} &= \mu + \alpha_g + \beta_e + \sum_{r=1}^{n} \sqrt{\lambda_r}\varphi_{gr}\rho_{er} + (\alpha\beta)_{ge} + \varepsilon_{ger} \\ &= \mu + \alpha_g + \beta_e + \sqrt{\lambda_1}\varphi_{g1}\rho_{e1} + \sqrt{\lambda_2}\varphi_{g2}\rho_{e2} + ...\sqrt{\lambda_n}\varphi_{gn}\rho_{en} + (\alpha\beta)_{ge} + \varepsilon_{ger}\end{aligned}$$

keterangan: g = 1, 2, ..., a; e = 1, 2, ..., b; r = 1, 2, ..., n

Y_{ger}	=	nilai pengamatan dari ulangan ke-r, taraf ke-g dari faktor A, dan taraf ke-e dari faktor B
(μ, α_g, β_e)	=	komponen aditif dari pengaruh utama faktor A dan faktor B parameter
$\sqrt{\lambda_n}$	=	nilai singular untuk komponen bilinier ke-n
φ_{gn}	=	pengaruh ganda faktor A ke-g melalui komponen bilinier ke-n
ρ_{en}	=	pengaruh ganda faktor B ke-e melalui komponen bilinier ke-n, dengan kendala:

(1). $\sum_{g=1}^{a} \varphi_{gn}^2 = \sum_{e=1}^{b} \rho_{en}^2 = 1$, untuk n=1, 2, ..., m; dan

(2). $\sum_{g=1}^{a} \varphi_{gn} \varphi'_{gn} = \sum_{e=1}^{b} \rho_{en} \rho'_{en} = 0$, untuk $n \neq n'$; $(\alpha\beta)_{ge}$; simpangan dari pemodelan bilinier (Crossa 1990 diacu dalam Mattjik, A dan Sumertajaya, I 2000).

3.1.3 Perhitungan Jumlah Kuadrat

Pada pemodelan AMMI, pengaruh aditif faktor A dan faktor B serta jumlah kuadrat dan kuadrat tengahnya dihitung sebagaimana umumnya pada analisis ragam, tetapi berdasarkan rata-rata per faktor A x faktor B.

Pengaruh ganda faktor A dan faktor B pada interaksi diduga dengan $z_{ge} = \bar{y}_{ge} - \bar{y}_{g..} - \bar{y}_{.e.} + \bar{y}...$

Sehingga jumlah kuadrat interaksi dapat diturunkan sebagai berikut :

$$JK(AB) = r\sum_{g,e} z_{ge}^2 = r\sum\left(\bar{y}_{ge} - \bar{y}_{g..} - \bar{y}_{.e.} + \bar{y}...\right)^2 = r \; teras \; (zz^T)$$

Berdasarkan teorema aljabar matriks bahwa teras dari suatu matriks sama dengan jumlah seluruh akar ciri matriks tersebut $\mathrm{tr}\left({}_n A_n\right) = \sum_i \lambda_i$, maka jumlah kuadrat untuk pengaruh interaksi komponen ke-n adalah akar ciri ke-n pada pemodelan bilinier tersebut (λ_n).

Jika analisis ragam dilakukan terhadap data rataan per faktor A x faktor B, maka jumlah kuadrat komponen utama interaksi ke-n adalah akar ciri ke-n pada pemodelan bilinier tersebut (λ_n). Jika analisis ragam dilakukan terhadap data sebenarnya maka jumlah kuadrat komponen utama interaksi ke-n adalah banyaknya ulangan r kali akar ciri ke-n, dirumuskan :

JK KU_{-n} = $(r\lambda_n)$

Tabel 3.1. Struktur Analisis Ragam Untuk Model AMMI

Sumber Keragaman	Derajat Bebas	Jumlah Kuadrat	Kuadrat Tengah
Faktor A	a-1	JKA	KTA
Faktor B	b-1	JKB	KTB
Faktor A * B	(a-1)(b-1)	JK(A*B)	KT(A*B)
IKU1	a+b -1 - 2(1)	JKKU1-1	KTKU1
IKU2	a+b -1 - 2(2)	JKKU1-2	KTKU2
…	…	…	…
IKU-n	a+b -1 - 2(n)	JKKU1-n	KTKUn
Simpangan	(a-2)(b-2)	JKS	KTS
Galat	b(a-1)(n-1)	JKG	KTG
Total	abn-1	JKT	

3.1.4 Penguraian Derajat Kebebasan

Derajat bebas untuk setiap komponen tersebut adalah a+b-1-2n. Besaran derajat bebas ini diturunkan berdasarkan jumlah parameter yang diduga dikurangi dengan jumlah kendala. Banyaknya parameter yang diduga adalah a+b-1 sedangkan banyak kendala untuk komponen ke-n adalah 2n.

3.1.5 Penguraian Nilai Singular *(SVD = Singular Value Decomposition)*

Penguraian nilai singular untuk matriks pengaruh interaksi Z sebagaimana dikemukakan oleh Greenacre (1984) adalah memodelkan matriks tersebut sebagai berikut:

$$Z = U\,L\,A^T$$

dengan:

Z : matriks data terpusat berukuran n x p

L : matriks diagonal akar dari akar positif $(D(\sqrt{\lambda_n}))$ bukan nol dari $Z^T Z$ berukuran mxm, selanjutnya disebut nilai singular

A : matriks ortonormal dengan kolom-kolom matriks $A=\{a_1,a_2,\ldots,a_n\}$ adalah vektor-vektor ciri $Z^T Z$

U : matriks ortonormal yang diperoleh dari perkalian matriks-matriks

$$U = ZAL^{-1} = \{Za_1/\sqrt{\lambda_1}, Za_2/\sqrt{\lambda_2}, \ldots, Za_n\sqrt{\lambda_n}$$

3.1.6 Nilai Komponen AMMI

Secara umum nilai komponen ke-n untuk faktor A ke-g adalah $\ln^k \varphi_{gn}$ sedangkan nilai komponen untuk faktor B ke-e adalah $\ln^{1-k} \rho_{en}$. Dengan mendefinisikan $L^k (0 \le k \le 1)$ sebagai matriks diagonal yang elemen-elemen diagonalnya adalah elemen-elemen matriks L dipangkatkan k demikian juga dengan matriks L^{1-k}, dan $G=UL^k$ serta $H=AL^{1-k}$ maka penguraian nilai singular tersebut dapat ditulis:

$$Z = GH^T$$

dengan demikian skor komponen untuk faktor A adalah kolom-kolom matriks G sedangkan skor komponen untuk faktor B adalah kolom-kolom matriks H. Nilai k yang digunakan pada analisis AMMI adalah ½.

3.1.7 Penentuan Banyaknya Komponen AMMI

Jika beberapa kolom pertama matriks G dan H telah dapat menghasilkan penduga **Z** dengan baik maka banyak kolom matriks G dan H dapat dikurangi.

Gauch (1988) dan Crossa (1990) mengemukakan dua metode penentuan banyaknya sumbu komponen utama yang sudah cukup untuk penduga, yaitu *Postdictive Success* dan *Predictive Success*.

- *Postdictive success* berhubungan dengan kemampuan suatu model yang tereduksi untuk menduga data yang digunakan dalam membangun model tersebut. Salah satu penentuan banyaknya komponen berdasarkan *Postdictive success* adalah berdasarkan banyaknya sumbu tersebut yang nyata pada uji F analisis ragam. Metode ini diusulkan oleh Gollob (1968) dan pada masa berikutnya direkomendasikan oleh Gauch (1988) diacu dalam Mattjik, A dan Sumertajaya, I (2000).
- *Predictive success* berhubungan dengan kemampuan suatu model dugaan untuk memprediksi data lain yang sejenis tetapi tidak digunakan dalam membangun model tersebut (data validasi). Penentuan banyak sumbu komponen utama berdasarkan *predictive success* ini dilakukan dengan validasi silang, yaitu membagi data menjadi dua kelompok, satu kelompok untuk membangun model dan kelompok lain digunakan untuk validasi (menentukan jumlah kuadrat sisaan). Hal ini dilakukan berulang-ulang, pada setiap ulangan dibangun model dengan berbagai sumbu komponen utama.

  Banyaknya komponen utama yang terbaik adalah yang rataan akar kuadrat tengah sisa (RMSPD=*Root Mean Square Predictive Different*) dari data validasi paling kecil.

$$\text{RMSPD} = \sqrt{\frac{\sum_{g=1}^{a}\sum_{e=1}^{b}\left(\hat{y}_{ge.} - y_{ge.}\right)^2}{a.b}}, \quad \hat{y}_{ge} = \hat{\mu} + \hat{\alpha}_g + \hat{\beta}_e + \sqrt{\lambda_n}\,\phi_{gn}\rho_{en}$$

dengan:

$\hat{y}_{ge.}$: nilai dugaan dari model

$y_{ge.}$: nilai pengamatan untuk validasi model

g : banyaknya taraf faktor A

e : banyaknya taraf faktor B

3.1.8 Manfaat Analisis AMMI

Ada tiga manfaat utama penggunaan analisis AMMI yaitu

1. Analisis AMMI dapat digunakan sebagai analisis pendahuluan untuk mencari model yang lebih tepat. Jika tidak ada satupun komponen yang nyata maka pemodelan cukup dengan pengaruh aditif saja. Sebaliknya jika hanya pengaruh ganda saja yang nyata maka pemodelan sepenuhnya ganda, berarti analisis yang tepat adalah analisis komponen utama saja. Sedangkan jika semua komponen interaksi nyata berarti pengaruh interaksi benar-benar sangat kompleks, tidak memungkinkan dilakukannya pereduksian tanpa kehilangan informasi penting (Gauch, 1985).
2. Untuk menjelaskan interaksi faktor A dan faktor B AMMI dengan biplotnya meringkas pola hubungan antar faktor A, antar faktor B dan antara faktor A dan faktor B (Crossa, 1990).
3. Meningkatkan keakuratan dugaan respon interaksi faktor A x faktor B. Hal ini terlaksana jika hanya sedikit komponen AMMI saja yang nyata dan tidak mencakup seluruh jumlah kuadrat interaksi. Dengan sedikitnya

komponen yang nyata sama artinya dengan menyatakan bahwa jumlah kuadrat sisanya hanya galat (*noise*) saja. Dengan menghilangkan galat ini berarti lebih memperakurat dugaan respon dari interaksi faktor A x faktor B (Crossa, 1990).

3.1.9 Aplikasi Rancangan Faktorial 2 Faktor RAL Model AMMI

Hasil gabah dari pengujian tanam langsung padi dengan rancangan acak lengkap, empat metode perlakuan pengendalian gulma, empat lahan dan tiga ulangan perlahan.

Tabel 3.2. Data

Perlakuan	Lahan	Ulangan 1	Ulangan 2	Ulangan 3
T1		5.5	4.8	5.3
T2		1.6	2.5	1.2
T3		2.2	2.1	2.4
T4	1	5.7	5.2	4.9
T1		5.6	5.8	6
T2		6.8	3.1	4.4
T3		5.7	5.7	5.1
T4	2	5.4	4.8	4
T1		1.8	2.4	3.1
T2		3.3	3.7	2.9
T3		2.1	3	2.4
T4	3	2.9	1.1	4
T1		5.1	5.4	5.6
T2		3.7	4.6	5
T3		3.6	4.2	4.5
T4	4	5.1	4.7	5.2

Tabel 3.3. Total Interaksi Lahan dan Perlakuan

Lahan	Perlakuan				
	T1	**T2**	**T3**	**T4**	**Total**
1	15.6	5.3	6.7	15.8	43.4
2	17.4	14.3	16.5	14.2	62.4
3	7.3	9.9	7.5	8	32.7
4	16.1	13.3	12.3	15	56.7
Total	56.4	42.8	43	53	188.2

3.1.9.1 Uji Normalitas, Homogenitas dan Independensi Varian

Sebelum dianalisis akan diuji terlebih dahulu kenormalan, homogenitas dan independensi varian galat dengan menggunakan software Minitab 13.

- Uji Normalitas Galat Percobaan

  Hipotesa :

  H_0 : Residual berdistribusi normal

  H_1 : Residual tidak berdistribusi normal

  Statistik uji :

  Dari output diperoleh DN = 0.111 dengan p-value > 0.144

  Keputusan :

  Diambil $\alpha = 0.05$, tolak H_0 jika p-value < α. Dari hasil Minitab 13 diperoleh p-value > α, maka H_0 diterima sehingga residual berdistribusi normal

- Uji Homogenitas Varian dari Galat

  Hipotesa :

  H_0 : Varian dari galat homogen

  H_1 : Varian dari galat tidak homogen

  Statistik uji :

  Dari output diperoleh nilai Barlet's : 24.928 dengan p-value : 0.051.

  Keputusan :

  Diambil $\alpha = 0.05$, tolak H_0 jika p-value < α. Dari hasil Minitab 13 diperoleh p-value > α, maka H_0 diterima sehingga varian dari galat homogen.

- Independensi

Berdasarkan plot pada lampiran 1, dapat diketahui bahwa asumsi independensi residual telah dipenuhi karena pencaran titik-titik dalam plot tidak membentuk suatu pola tertentu atau acak.

Karena semua asumsi dipenuhi maka tidak terdapat ketidakcocokan model atau model sesuai dengan data. Selanjutnya dapat dilakukan analisis terhadap data.

3.1.9.2 Pembentukan Tabel ANOVA

$$FK = \frac{Y_{...}^2}{abn} = \frac{195.2^2}{4.4.3} = 793.8133$$

$$JKT = \sum_{g,e,r}^{a,b,n} Y_{ger}^2 - \frac{Y_{...}^2}{abn} = (5.5^2 + 4.8^2 + 5.3^2 + ... + 5.2^2) - 793.8133$$
$$= 894.34 - 793.8133 = 100.567$$

$$JK(Perlakuan) = \sum_{g=1}^{a} \frac{Y_{g..}^2}{b.n} - \frac{Y_{...}^2}{abn} = \frac{1}{4.3}\left(43.4^2 + 62.4^2 + 32.7^2 + 56.7\right) - 793.8133$$
$$= 838.458 - 793.8133 = 44.6450$$

$$KT(Perlakuan) = \frac{JK(Perlakuan)}{(a-1)} = \frac{44.6450}{3} = 14.8817$$

$$JK(Lahan) = \sum_{g=1}^{b} \frac{Y_{.e.}^2}{a.n} - \frac{Y_{...}^2}{abn} = \frac{1}{4.3}\left(56.4^2 + 42.8^2 + 43^2 + 53^2\right)$$
$$= \frac{9670.8}{12} - 793.8133 = 12.0867$$

$$KT(Lahan) = \frac{JK(Lahan)}{(b-1)} = \frac{12.0867}{3} = 4.0289$$

$$JK(Perlakuan * Lahan) = \sum_{g,e} \frac{Y_{ge.}^2}{n} - \frac{Y_{...}^2}{abn} - JK(Perlakuan) - JK(Lahan)$$
$$= \frac{1}{3}\left(15.6^2 + 5.3^2 + 6.7^2 + ... + 15^2\right) - 793.8133 - 14.8817 - 12.0867$$
$$= 877.02 - 793.8133 - 44.6450 - 12.0867 = 26.4750$$

$$KT(Perlakuan * Lahan) = \frac{JK(Perlakuan * lahan)}{(a-1)(b-1)} = \frac{26.4750}{9} = 2.9417$$

$$\begin{aligned} JKG &= JKT - JK(Perlakuan) - JK(Lahan) - JK(Perlakuan * Lahan) \\ &= 100.567 - 44.6450 - 12.0867 - 26.4750 \\ &= 17.32 \end{aligned}$$

$$KTG = \frac{JKG}{(ab(n-1))} = \frac{17.32}{32} = 0.5413$$

Dari hasil penghitungan jumlah kuadrat diatas dapat dibentuk tabel ANOVA sebagai berikut :

Tabel 3.4. Analisis Ragam RAL

Sumber Keragaman	DB	JK	KT	Fhit	Ftabel
Perlakuan	3	44.6450	14.8817	27.49	2.84
Lahan	3	12.0867	4.0289	7.44	2.84
Perlakuan*Lahan	9	26.4750	2.9417	5.43	2.12
Galat	32	17.32	0.5413		
Total	47	100.567			

3.1.9.3 Hipotesis

Dari tabel analisis varian dapat digunakan untuk menguji variabilitas pada galat dengan hipotesa :

1. Uji faktor perlakuan

   $H_0 : \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$

   H_1 : Paling sedikit ada satu g sehingga $\alpha_g \neq 0$

Statistik Uji :

$$F_0 = \frac{KT(Perlakuan)}{KTG} = \frac{14.8817}{0.5413} = 27.49$$

$$F_{3;32(0.05)} = 2.84$$

Keputusan :

Diambil $\alpha = 0.05$, tolak H_0 jika $F_0 > F_{3;32(0.05)}$ atau p-value < α. Dari lampiran diperoleh F_0 = 27.49 apabila dibandingkan dengan $F_{3;32(0.05)}$ maka $F_0 > F_{3;32(0.05)}$ sedangkan pada output diperoleh p value 0.00 < α maka H_0 ditolak sehingga ada pengaruh perlakuan terhadap respon.

2. Uji faktor lahan

$$H_0 : \beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \beta_4 = 0$$

H_1 : Paling sedikit ada satu e sehingga $\beta_e \neq 0$

Statistik uji :

$$F_0 = \frac{KT(Lahan)}{KTG} = \frac{4.0289}{0.5413} = 7.44$$

$$F_{3;32(0.05)} = 2.84$$

Keputusan :

Diambil $\alpha = 0.05$, tolak H_0 jika $F_0 > F_{3;32(0.05)}$ atau p-value < α. Dari lampiran diperoleh F_0 = 7.44 apabila dibandingkan dengan $F_{3;32(0.05)}$ maka $F_0 > F_{3;32(0.05)}$ sedangkan pada output diperoleh p value 0.00 < α maka H_0 ditolak sehingga ada pengaruh lahan terhadap respon.

3. Uji interaksi faktor perlakuan dan lahan

$$H_0 : (\alpha\beta)_{11} = (\alpha\beta)_{22} = (\alpha\beta)_{33} = (\alpha\beta)_{44} = 0$$

H_1 : Paling sedikit ada satu ge sehingga $(\alpha\beta)_{ge} \neq 0$

Statistik uji :

$$F_0 = \frac{KT(Perlakuan * Lahan)}{KTG} = \frac{2.9417}{0.5413} = 5.43$$

$$F_{9;32(0.05)} = 2.12$$

Keputusan :

Diambil $\alpha = 0.05$, tolak H_0 jika $F_0 > F_{9;32(0.05)}$ atau p-value < α. F_0 = 5.43 apabila dibandingkan dengan $F_{9,32(0.05)} = 2.12$ maka $F_0 > F_{9;32(0.05)}$ dan p-value < 0.05 sehingga H_0 ditolak artinya ada pengaruh interaksi faktor perlakuan dan jenis terhadap respon.

3.2 Analisis AMMI

Dari tabel analisis ragam RAL dapat dilihat pada table 3.4 terlihat bahwa semua pengaruh utama (perlakuan dan lahan) dan pengaruh interaksi berpengaruh nyata 5%. Hal ini menunjukkan bahwa hasil gabah dari pengujian tanam langsung padi dipengaruhi oleh faktor perlakuan dan lahan.

Selain itu, perlakuan tertentu akan membedakan respon yang positif pada lahan tertentu, tetapi tidak demikian halnya jika digunakan pada lahan yang lain. Karena itulah perlu dilakukan analisis AMMI untuk mengidentifikasi lahan yang berinteraksi positif pada perlakuan tertentu. Penguraian nilai singular terhadap matrik dengan pengaruh interaksi menghasilkan empat nilai singular tidak nol, yaitu 2.7862804, 1.0047791, 0.2281678 dan $6.303 \text{X} 10^{-17}$. Dari nilai singular tersebut terlihat bahwa banyaknya komponen utama (KU) yang dapat dipertimbangkan untuk model AMMI adalah komponen ke-1 sampai komponen ke-4. Kontribusi keragaman pengaruh interaksi yang mampu diterangkan oleh masing-masing komponen adalah 87.97%, 11.44%, 0.58% dan $4.50x10^{-32}$%. Berdasarkan nilai kontribusi keragaman tersebut terlihat bahwa komponen pertama memiliki peranan yang dominan dalam menerangkan keragaman pengaruh interaksi.

Kontribusi tiap komponen utama dihitung dengan rumus :

$$\frac{\lambda_i}{\sum_{i=1}^{p}\lambda_i} x100\% .$$

$$\sum_{i=1}^{4}\lambda_i = 7.763358467 + 1.00958104 + 0.052060544 + 3.9727809^{-33} = 8.825000051.$$

Kontribusi tiap komponen utama (KU) adalah :

$$\text{KU}_1 = \frac{\lambda_i}{\sum_{i=1}^{p}\lambda_i} x100\% = \frac{7.763358467}{8.825000051} \text{x}100\% = 87.9700671$$

$$\text{KU}_2 = \frac{\lambda_i}{\sum_{i=1}^{p}\lambda_i} x100\% = \frac{1.00958104}{8.825000051} \text{x}100\% = 11.4400117$$

$$\text{KU}_3 = \frac{\lambda_i}{\sum_{i=1}^{p}\lambda_i} x100\% = \frac{0.052060544}{8.825000051} \text{x}100\% = 0.5899212$$

$$\text{KU}_4 = \frac{\lambda_i}{\sum_{i=1}^{p}\lambda_i} x100\% = \frac{3.9727809^{-33}}{8.825000051} \text{x}\,100\% = 0.0450173$$

Tabel 3.5. Kontribusi Keragaman Komponen Utama

KU	Nilai Singular	Akar Ciri	Proporsi	Kumulatif
1	2.7862804	7.763358467	0.879700671	0.879700671
2	1.0047791	1.009581040	0.114400117	0.994100788
3	0.2281678	0.052060544	0.005899212	1.000000000
4	$6.303X10^{-17}$	$3.9727809X10^{-33}$	$4.50173X10^{-34}$	1.000000000

Tabel 3.6. Tabel Analisis Ragam untuk Model AMMI

Sumber Keragaman	DB	JK	KT	Fhit	Ftabel
Perlakuan	3	44.6450	14.8817	27.49	2.84
Lahan	3	12.0867	4.0289	7.44	2.84
Perlakuan*Lahan	9	26.4750	2.9417	5.43	2.12
IKU1	5	7.76336	1.5527	2.87	2.45
IKU2	3	1.00958	0.3365	0.62	2.84
Galat	32	17.32	0.5413		
Total	47	100.567			

Melalui uji signifikansi diperoleh bahwa interaksi komponen utama pertama pada taraf 0.05, yaitu dengan nilai F sebesar 2.87 dibandingkan dengan F tabel diperoleh hasilnya signifikan. Sedangkan interaksi komponen utama kedua pada taraf 0.05, yaitu dengan nilai F sebesar 0.62 dibandingkan dengan F tabel diperoleh hasilnya tidak signifikan maka diperoleh AMMI 1.

Tabel 3.7. Tabel Analisis Ragam untuk Model AMMI 1

Sumber Keragaman	Derajat Bebas	JK	KT	Fhit	Ftabel
Perlakuan	3	44.6450	14.8817	27.49	2.84
Lahan	3	12.0867	4.0289	7.44	2.84
Perlakuan*Lahan	9	26.4750	2.9417	5.43	2.12
IKU1	5	7.76336	1.5527	2.87	2.45
Simpangan	4	18.7116	4.6779	8.64	
Galat	32	17.32	0.5413		
Total	47	100.567			

3.2.1 Penguraian Nilai Singular

Penguraian nilai singular untuk matriks pengaruh interaksi Z adalah dengan memodelkan matriks tersebut sebagai berikut :

Z = U L A^{T}

dengan:

Z adalah matriks interaksi n x p.

$$Z = \begin{bmatrix} 0.8042 & -0.1792 & -1.0708 & -0.1375 \\ -1.4958 & -0.0792 & 0.9292 & 0.0625 \\ -1.0458 & 0.6375 & 0.1125 & -0.2875 \\ 1.1542 & -0.9625 & -0.5542 & -0.2208 \end{bmatrix}$$

L adalah matriks diagonal akar dari akar ciri positif $\mathbf{D}(\sqrt{\lambda_n})$ atau nilai singular berukuran mxm, seperti pada tabel 3.5.

$$L = \begin{bmatrix} 2.7862804 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.0047791 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2281678 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6.303E-17 \end{bmatrix}$$

L^{-1} adalah invers matriks L

$$L^{-1} = \begin{bmatrix} 0.0000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.5865 \end{bmatrix} \text{x } 1.0\text{e} + 016$$

A adalah matriks ortonormal dengan kolom-kolom matriks **A={$\mathbf{a_1}$,$\mathbf{a_2}$,…,$\mathbf{a_n}$}** adalah vektor-vektor ciri **Z^{T}Z**

$$A = \begin{bmatrix} 0.8196 & -0.0767 & -0.2689 & -0.5000 \\ -0.2874 & 0.7982 & -0.1742 & -0.5000 \\ -0.4941 & -0.5808 & -0.4106 & -0.5000 \\ -0.0381 & -0.1406 & 0.8537 & -0.5000 \end{bmatrix}$$

$$A^T = \begin{bmatrix} 0.8196 & -0.2874 & -0.4941 & -0.0381 \\ -0.0767 & 0.7982 & -0.5808 & -0.1406 \\ -0.2689 & -0.1742 & -0.4106 & 0.8537 \\ -0.5000 & -0.5000 & -0.5000 & -0.5000 \end{bmatrix}$$

U adalah matriks ortonormal yang diperoleh dari perkalian matriks-matriks

$$U = ZAL^{-1} = \{Za_1 / \sqrt{\lambda_1}, Za_2 / \sqrt{\lambda_2}, ..., Za_n \sqrt{\lambda_n}$$

$$U = \begin{bmatrix} 0.8042 & -0.1792 & -1.0708 & -0.1375 \\ -1.4958 & -0.0792 & 0.9292 & 0.0625 \\ -1.0458 & 0.6375 & 0.1125 & -0.2875 \\ 1.1542 & -0.9625 & -0.5542 & -0.2208 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.8196 & -0.0767 & -0.2689 & -0.5000 \\ -0.2874 & 0.7982 & -0.1742 & -0.5000 \\ -0.4941 & -0.5808 & -0.4106 & -0.5000 \\ -0.0381 & -0.1406 & 0.8537 & -0.5000 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0.0000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.5865 \end{bmatrix} \text{x } 1.0e+016$$

$$= \begin{bmatrix} 0.4468 & 0.4344 & 0.6013 & 0.5000 \\ -0.5975 & -0.4944 & 0.3854 & 0.5000 \\ -0.3894 & 0.5615 & -0.5320 & 0.5000 \\ 0.5401 & -0.5015 & -0.4547 & 0.5000 \end{bmatrix}$$

Maka model matriks **Z** diperoleh :

$$\begin{bmatrix} 0.8042 & -0.1792 & -1.0708 & -0.1375 \\ -1.4958 & -0.0792 & 0.9292 & 0.0625 \\ -1.0458 & 0.6375 & 0.1125 & -0.2875 \\ 1.1542 & -0.9625 & -0.5542 & -0.2208 \end{bmatrix}$$

3.2.2 Nilai Komponen AMMI

$$\mathbf{Z = GH^T}$$

Dimana matriks $\mathbf{G=UL^k}$ dengan nilai k = 0.5

$$G = \begin{bmatrix} 0.4468 & 0.4344 & 0.6013 & 0.5000 \\ -0.5975 & -0.4944 & 0.3854 & 0.5000 \\ -0.3894 & 0.5615 & -0.5320 & 0.5000 \\ 0.5401 & -0.5015 & -0.4547 & 0.5000 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.6692155 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.0023867 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.4776691 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.0000000 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.7458 & 0.4355 & 0.2872 & 0.0000 \\ -0.9973 & -0.4956 & 0.1841 & 0.0000 \\ -0.6500 & 0.5628 & -0.2541 & 0.0000 \\ 0.9015 & -0.5027 & -0.2172 & 0.0000 \end{bmatrix}$$

sedangkan matriks $\mathbf{H=AL^{1-k}}$

$$H = \begin{bmatrix} 0.8196 & -0.0767 & -0.2689 & -0.5000 \\ -0.2874 & 0.7982 & -0.1742 & -0.5000 \\ -0.4941 & -0.5808 & -0.4106 & -0.5000 \\ -0.0381 & -0.1406 & 0.8537 & -0.5000 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.6692155 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.0023867 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.4776691 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.0000000 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1.3681 & -0.0769 & -0.1285 & -0.0000 \\ -0.4798 & 0.8001 & -0.0832 & -0.0000 \\ -0.8248 & -0.5821 & -0.1961 & -0.0000 \\ -0.0636 & -0.1410 & 0.4078 & -0.0000 \end{bmatrix}$$

$$H^T = \begin{bmatrix} 1.3681 & -0.4798 & -0.8248 & -0.0636 \\ -0.0769 & 0.8001 & -0.5821 & -0.1410 \\ -0.1285 & -0.0832 & -0.1961 & 0.4078 \\ -0.0000 & -0.0000 & -0.0000 & -0.0000 \end{bmatrix}$$

$$Z = \begin{bmatrix} 0.7458 & 0.4355 & 0.2872 & 0.0000 \\ -0.9973 & -0.4956 & 0.1841 & 0.0000 \\ -0.6500 & 0.5628 & -0.2541 & 0.0000 \\ 0.9015 & -0.5027 & -0.2172 & 0.0000 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.3681 & -0.4798 & -0.8248 & -0.0636 \\ -0.0769 & 0.8001 & -0.5821 & -0.1410 \\ -0.1285 & -0.0832 & -0.1961 & 0.4078 \\ -0.0000 & -0.0000 & -0.0000 & -0.0000 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.8041 & -0.1792 & -1.0709 & -0.1375 \\ -1.4959 & -0.0792 & 0.9291 & 0.0625 \\ -1.0459 & 0.6375 & 0.1125 & -0.2875 \\ 1.1541 & -0.9625 & -0.5542 & -0.2209 \end{bmatrix}$$

Berdasarkan metode postdictive success, nilai Fhitung sebesar 2.87 dibandingkan dengan jumlah kuadrat sisaan diperoleh satu komponen utama nyata. Sedangkan komponen lainnya tidak nyata. Hal ini berarti data hasil gabah dapat diterangkan dengan menggunakan model AMMI1, dimana pengaruh interaksi direduksi dengan menggunakan satu komponen. Dengan demikian model AMMI1 mampu menerangkan keragaman pengaruh interaksi sebesar 87.97%, berarti keragaman tidak diterangkan oleh model sebesar 12.03%

Sedangkan metode predictive success juga memperkuat hasil postdictive success, dimana model AMMI1 memiliki RMSPD terkecil yaitu sebesar 19.46765030. Dari kedua metode penentuan banyaknya komponen yang digunakan untuk model AMMI diperoleh AMMI 1 sebagai model terbaik.

Nilai RMS PD dihitung dengan rumus : RMSPD = $\sqrt{\dfrac{\sum_{g=1}^{a}\sum_{e=1}^{b}\left(\hat{y}_{ge} - y_{ge}\right)^2}{a.b}}$,

$$\hat{y}_{ge} = \hat{\mu} + \hat{\alpha}_g + \hat{\beta}_e + \sqrt{\lambda_n}\phi_{gn}\rho_{en}$$

- RMSPD1= $\sqrt{\dfrac{\sum_{e=1}^{b}\left(\hat{y}_{11.} - y_{1..}\right)^2 + \left(\hat{y}_{12.} - y_{1..}\right)^2 + \left(\hat{y}_{13.} - y_{1..}\right)^2 + \left(\hat{y}_{14.} - y_{1..}\right)^2}{a.b}}$

$$= \sqrt{\frac{\left(\left(\bar{y}_{11.} + \bar{y}_{.1.} - \bar{y}_{...} + \sqrt{\lambda_1}\phi_1\rho_1\right) - y_{1..}\right)^2 + \left(\left(\bar{y}_{12.} + \bar{y}_{.2.} - \bar{y}_{...} + \sqrt{\lambda_1}\phi_2\rho_2\right) - y_{1..}\right)^2 + \left(\left(\bar{y}_{13.} + \bar{y}_{.3.} - \bar{y}_{...} + \sqrt{\lambda_1}\phi_3\rho_3\right) - y_{1..}\right)^2 + \left(\left(\bar{y}_{14.} + \bar{y}_{.4.} - \bar{y}_{...} + \sqrt{\lambda_1}\phi_4\rho_4\right) - y_{1..}\right)^2}{a.b}}$$

$$= \sqrt{\frac{\left(\left(\frac{15.6}{3}+\frac{43.4}{12}-\frac{188.2}{48}+\sqrt{7,763358467}.0,7458378.1,368128\right)-56.4\right)^2 + \left(\left(\frac{17.4}{3}+\frac{62.4}{12}-\frac{188.2}{48}+\sqrt{7,763358467}.0,997332.0,479783\right)-56.4\right)^2 + \left(\left(\frac{7.3}{3}+\frac{32.7}{12}-\frac{188.2}{48}+\sqrt{7,763358467}.0,650046.0,824788\right)-56.4\right)^2 + \left(\left(\frac{16.1}{3}+\frac{56.7}{12}-\frac{188.2}{48}+\sqrt{7,763358467}.0,9015405.0,063557\right)-56.4\right)^2}{4.4}}$$

$$= 25.0723759$$

- RMSPD2= $\sqrt{\frac{\sum_{e=1}^{b}\left(\hat{y}_{21.}-y_{2..}\right)^2+\left(\hat{y}_{22.}-y_{2..}\right)^2+\left(\hat{y}_{23.}-y_{2..}\right)^2+\left(\hat{y}_{24.}-y_{2..}\right)^2}{a.b}}$

$$= \sqrt{\frac{\left(\left(\overline{y}_{21.}+\overline{y}_{.1.}-\overline{y}_{...}+\sqrt{\lambda_2}\phi_1\rho_1\right)-y_{2..}\right)^2+\left(\left(\overline{y}_{22.}+\overline{y}_{.2.}-\overline{y}_{...}+\sqrt{\lambda_2}\phi_2\rho_2\right)-y_{2..}\right)^2+\left(\left(\overline{y}_{23.}+\overline{y}_{.3.}-\overline{y}_{...}+\sqrt{\lambda_2}\phi_3\rho_3\right)-y_{2..}\right)^2+\left(\left(\overline{y}_{24.}+\overline{y}_{.4.}-\overline{y}_{...}+\sqrt{\lambda_{24}}\phi_4\rho_4\right)-y_{2..}\right)^2}{a.b}}$$

$$= \sqrt{\frac{\left(\left(\frac{5.3}{3}+\frac{43.4}{12}-\frac{188.2}{48}+\sqrt{1,009581040}.0,4354744.0,076931\right)-42.8\right)^2 + \left(\left(\frac{14.3}{3}+\frac{62.4}{12}-\frac{188.2}{48}+\sqrt{1,009581040}.0,495614.0,8000581\right)-42.8\right)^2 + \left(\left(\frac{9.9}{3}+\frac{32.7}{12}-\frac{188.2}{48}+\sqrt{1,009581040}.0,5628453.0,582144\right)-42.8\right)^2 + \left(\left(\frac{13.3}{3}+\frac{56.7}{12}-\frac{188.2}{48}+\sqrt{1,009581040}.0,9015405.0,063557\right)-42.8\right)^2}{4.4}}$$

$$= 19.4676503$$

- RMSPD3= $\sqrt{\frac{\sum_{e=1}^{b}\left(\hat{y}_{31.}-y_{3..}\right)^2+\left(\hat{y}_{32.}-y_{3..}\right)^2+\left(\hat{y}_{33.}-y_{3..}\right)^2+\left(\hat{y}_{34.}-y_{3..}\right)^2}{a.b}}$

$$= \sqrt{\frac{\left(\left(\bar{y}_{31.} + \bar{y}_{.1.} - \bar{y}_{...} + \sqrt{\lambda_3}\phi_1\rho_1\right) - y_{3..}\right)^2 + \left(\left(\bar{y}_{32.} + \bar{y}_{.2.} - \bar{y}_{...} + \sqrt{\lambda_3}\phi_2\rho_2\right) - y_{3..}\right)^2 + \left(\left(\bar{y}_{33.} + \bar{y}_{.3.} - \bar{y}_{...} + \sqrt{\lambda_3}\phi_3\rho_3\right) - y_{3..}\right)^2 + \left(\left(\bar{y}_{34.} + \bar{y}_{.4.} - \bar{y}_{...} + \sqrt{\lambda_3}\phi_4\rho_4\right) - y_{3..}\right)^2}{a.b}}$$

$$= \sqrt{\frac{\left(\left(\frac{6.7}{3} + \frac{43.4}{12} - \frac{188.2}{48} + \sqrt{0{,}052060544}.0{,}2872442.0{,}128463\right) - 43\right)^2 + \left(\left(\frac{16.5}{3} + \frac{62.4}{12} - \frac{188.2}{48} + \sqrt{0{,}052060544}.0{,}1841018.0{,}083196\right) - 43\right)^2 + \left(\left(\frac{7.5}{3} + \frac{32.7}{12} - \frac{188.2}{48} + \sqrt{0{,}052060544}.0{,}254134.0{,}196117\right) - 43\right)^2 + \left(\left(\frac{12.3}{3} + \frac{56.7}{12} - \frac{188.2}{48} + \sqrt{0{,}052060544}.0{,}217212.0{,}4077763\right) - 43\right)^2}{4.4}}$$

$= 19.66145482$

- RMSPD4= $\sqrt{\frac{\sum_{e=1}^{b} \left(\hat{y}_{41.} - y_{4..}\right)^2 + \left(\hat{y}_{42.} - y_{4..}\right)^2 + \left(\hat{y}_{43.} - y_{4..}\right)^2 + \left(\hat{y}_{44.} - y_{4..}\right)^2}{a.b}}$

$$= \sqrt{\frac{\left(\left(\bar{y}_{41.} + \bar{y}_{.1.} - \bar{y}_{...} + \sqrt{\lambda_4}\phi_1\rho_1\right) - y_{4..}\right)^2 + \left(\left(\bar{y}_{42.} + \bar{y}_{.2.} - \bar{y}_{...} + \sqrt{\lambda_4}\phi_2\rho_2\right) - y_{4..}\right)^2 + \left(\left(\bar{y}_{43.} + \bar{y}_{.3.} - \bar{y}_{...} + \sqrt{\lambda_4}\phi_3\rho_3\right) - y_{4..}\right)^2 + \left(\left(\bar{y}_{44.} + \bar{y}_{.4.} - \bar{y}_{...} + \sqrt{\lambda_4}\phi_4\rho_4\right) - y_{4..}\right)^2}{a.b}}$$

$$= \sqrt{\frac{\left(\left(\frac{15.8}{3} + \frac{43.4}{12} - \frac{188.2}{48} + \sqrt{3.9727809\text{x}10^{-33}}.3{,}9695x10^{-9}.3{,}97x10^{-9}\right) - 53\right)^2 + \left(\left(\frac{14.2}{3} + \frac{62.4}{12} - \frac{188.2}{48} + \sqrt{3.9727809\text{x}10^{-33}}.3{,}9695x10^{-9}.3{,}97x10^{-9}\right) - 53\right)^2 + \left(\left(\frac{8}{3} + \frac{32.7}{12} - \frac{188.2}{48} + \sqrt{3.9727809\text{x}10^{-33}}.3{,}9695x10^{-9}.3{,}97x10^{-9}\right) - 53\right)^2 + \left(\left(\frac{15}{3} + \frac{56.7}{12} - \frac{188.2}{48} + \sqrt{3.9727809\text{x}10^{-33}}.3{,}9695x10^{-9}.3{,}97x10^{-9}\right) - 53\right)^2}{4.4}}$$

$= 24.23598598$

Tabel 3.8. Tabel Rata-rata Nilai RMS PD

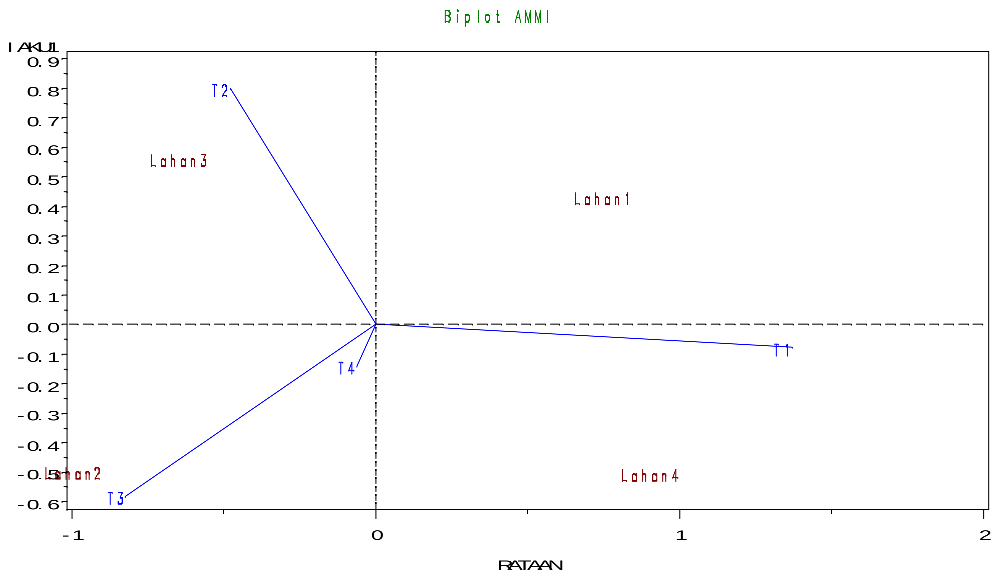
Model	RMSPD
AMMI 0	25.07237590
AMMI 1	19.46765030
AMMI 2	19.66145482
AMMI 3	24.23598598

3.2.3 Interpretasi AMMI

Alat yang digunakan untuk menginterpretasikan hasil dari metode AMMI adalah biplot. Biplot adalah plot antara satu kolom G dengan kolom G yang lain yang ditampilkan bersama-sama dengan plot kolom H dengan kolom H yang lain yang bersesuaian dengan kolom G yang di plot (Joliffe, 1986). Biplot pada analisis AMMI biasanya berupa biplot antara nilai komponen utama pertama dan rataan respon. Biplot antara nilai komponen utama kedua dan nilai komponen pertama bisa ditambahkan jika komponen utama kedua ini nyata.

Interpretasi biplot AMMI 1 dan rataan respon terutama adalah bagi titik-titik yang sejenis. Jarak titik-titik amatan berdasarkan sumbu datar menunjukkan perbedaan pengaruh utama amatan-amatan tersebut. Sedangkan jarak titik-titik amatan berdasarkan sumbu tegak menunjukkan perbedaan pengaruh interaksinya atau perbedaan kesensitifannya terhadap lokasi. Titik-titik amatan yang mempunyai arah yang sama berarti titik-titik tersebut berinteraksi positif (saling menunjang), sedangkan titik-titik yang berbeda arah menunjukkan bahwa titik-titik tersebut berinteraksi negatif.

Biplot AMMI 1 juga menunjukkan bahwa genotif dikatakan mempunyai daya adaptasi baik pada suatu lingkungan jika genotip tersebut memiliki rataan hasil yang tinggi dan skor interaksi genotif dan lingkungan bertanda sama (berinteraksi positif).



Gambar 3.1. Biplot AMMI

Dari gambar 1 menunjukkan biplot antara komponen 1 dengan rataan. Biplot antara rataan produksi padi dengan interaksi analisis komponen utama satu (IAKU1) pada gambar 1, menjelaskan bahwa genotip T2, T3 dan T4 memiliki pengaruh utama yang relatif sama karena genotip-genotip tersebut masing-masing terletak dalam satu garis vertikal dan dapat dikatakan bahwa genotip-genotip di atas memiliki pengaruh interaksi yang berbeda. Sedangkan genotip T1 ada kecendrungan memiliki pengaruh utama yang berbeda karena genotip tersebut terletak dalam garis horizontal.

Pada lahan 1 dan lahan 4 mempunyai pengaruh utama yang relatif sama namun pengaruh interaksinya berbeda. Hal yang sama berlaku juga untuk lahan 3 dan lahan 2. Sebaliknya lahan 2 dan lahan 4 mempunyai pengaruh interaksi yang relatif sama namun pengaruh utama berbeda. Hal yang sama berlaku juga untuk lahan 3 dan lahan 1.

BAB IV

KESIMPULAN

Berdasarkan pembahasan dari bab-bab sebelumnya dapat disimpulkan sebagai berikut :

1. Percobaan faktorial adalah suatu percobaan dimana dalam satu keadaan (unit percobaan) dicobakan secara bersamaan dari beberapa (2 atau lebih) percobaan-percobaan tunggal. Dari percobaan faktorial, selain dapat diketahui pengaruh-pengaruh tunggal faktor yang diujikan, dapat diketahui pula pengaruh gabungan (interaksi) dari masing-masing faktor yang diujikan. Percobaan faktorial dicirikan dengan perlakuan yang merupakan kombinasi dari semua kemungkinan kombinasi dari taraf-taraf faktor yang dicobakan.
2. Akar ciri dan vektor ciri setiap faktor pada sebuah rancangan percobaan dapat diketahui bila matriks data adalah matriks orthogonal, hal ini dapat digunakan untuk menentukan nilai komponen utama dari faktor yang berpengaruh terhadap respon yang diamati.
3. Analisis AMMI merupakan gabungan dari analisis ragam pada pengaruh aditif dengan analisis komponen utama pada pengaruh multiplikatif.

DAFTAR PUSTAKA

Anton, H 1988. *Aljabar Linier Elementer*. Edisi Ketiga. Erlangga. Jakarta.

Crossa, J 1990. *Statistical Analysis of Multilocation Trials.* Adv. In Agron.

Daniel, W 1989. *Statistika Non Parametrik Terapan*. Alih Bahasa : Alex Tri Kantjono. PT Gramedia. Jakarta.

Futuhul, A 2006. *Model AMMI Terampat Untuk Data Berdistribusi Bukan Normal*. Tesis, Institut Pertanian Bogor.

Futuhul, A dan Sa'diyah, H 2004. *Model AMMI Untuk Analisis Interaksi Genotipe × Lokasi.* Jurnal Ilmu Dasar Vol. 5 No. 1: 33-41

Gomez, Kwanchai. A dan Gomez, Arturo. A 1995. *Prosedur Statistik untuk Penelitian Edisi Kedua*. UI Press. Jakarta

Haryatmi, S 1998. *Metode Statistika Multivariat.*Karunia. Jakarta

Johnson, R. and Wichern, D 2007. *Applied Multivariate Statistical Analysis.* Sixth Edition.Pearson Education

Jolliffe and Rowlings 1986. *Principal Component Analysis*. New York: Spinger Verlag.

Mattjik, A dan Sumertajaya, I 2000. *Perancangan Percobaan Dengan Aplikasi SAS dan Minitab*, Jilid 1. IPB Press. Bogor

Montgomery, D 2005. *Design And Analysis Of Experiment* 6^{th} *edition*. John Willey and Sons. New York.

Sartono, dkk 2003. *Analisis Peubah Ganda*. Jurusan Statistika FMIPA IPB, Bogor.

Sichah, I dan Safitri, D 2005. *Buku Ajar Statistika Multivariat.* Jurusan Matematika FMIPA UNDIP. Semarang.

Steel, R and Torrie, J 1991. *Prinsip Dan Prosedur Statistika Suatu Pendekatan Biometrik*. PT. Gramedia Pustaka Utama. Jakarta.

Sumertajaya, I 1998. *Perbandingan Model AMMI dan Regresi Linier Untuk Menerangkan Pengaruh Interaksi Percobaan Lokasi Ganda*. Tesis, Institut Pertanian Bogor.

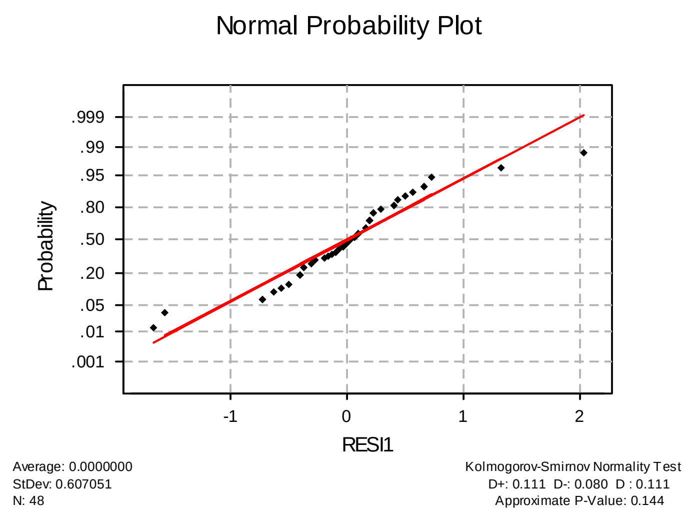
Widiharih, T 2007. *Buku Ajar Perancangan Percobaan.* Program Studi Statistika Jurusan Matematika FMIPA UNDIP. Semarang.

LAMPIRAN

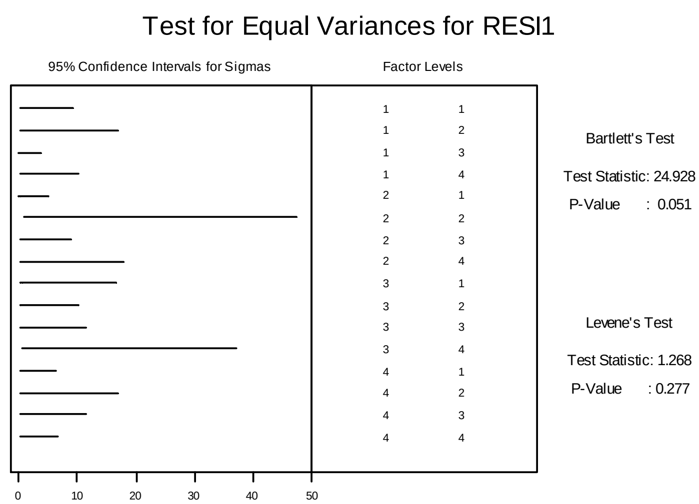
LAMPIRAN 1

UJI NORMALITAS, HOMOGENITAS DAN INDEPENDENSI VARIAN

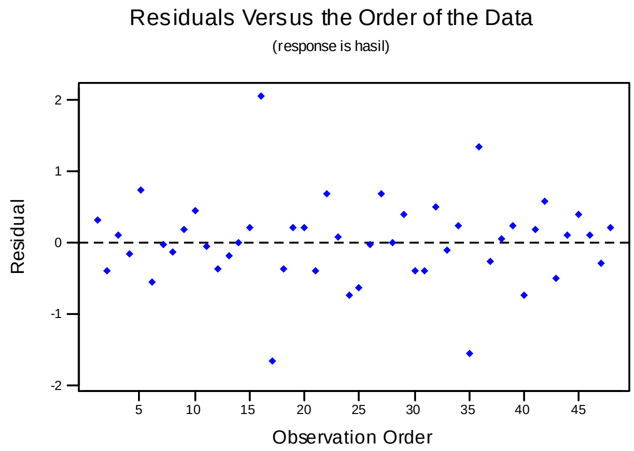
a. Asumsi Normalitas



b.Asumsi Homogenitas Varian



c. Asumsi Independensi



LAMPIRAN 2

LISTING PROGRAM ANALISIS VARIANSI UNTUK RANCANGAN FAKTORIAL DALAM RAL

```
nodate nonumber;
data padi;
input prlakuan      lahan      ulangan $ hasil @@;
cards;
        1            1           1        5.5
        1            1           2        4.8
        1            1           3        5.3
        1            2           1        1.6
        1            2           2        2.5
        1            2           3        1.2
        1            3           1        2.2
        1            3           2        2.1
        1            3           3        2.4
        1            4           1        5.7
        1            4           2        5.2
        1            4           3        4.9
        2            1           1        5.6
        2            1           2        5.8
        2            1           3        6.0
        2            2           1        6.8
        2            2           2        3.1
        2            2           3        4.4
        2            3           1        5.7
        2            3           2        5.7
        2            3           3        5.1
        2            4           1        5.4
        2            4           2        4.8
        2            4           3        4.0
        3            1           1        1.8
        3            1           2        2.4
        3            1           3        3.1
        3            2           1        3.3
        3            2           2        3.7
        3            2           3        2.9
        3            3           1        2.1
        3            3           2        3.0
        3            3           3        2.4
        3            4           1        2.9
        3            4           2        1.1
```

```
        3           4           3        4.0
        4           1           1        5.1
        4           1           2        5.4
        4           1           3        5.6
        4           2           1        3.7
        4           2           2        4.6
        4           2           3        5.0
        4           3           1        3.6
        4           3           2        4.2
        4           3           3        4.5
        4           4           1        5.1
        4           4           2        4.7
        4           4           3        5.2
;
proc glm data=padi;
class prlakuan lahan ulangan;
model hasil=prlakuan lahan prlakuan*lahan/ss3;
means prlakuan lahan/duncan;
lsmeans prlakuan*lahan/pdiff stderr;
output out=ab r=reswak p=fitwak;
run;
proc univariate data=ab plot normal;
var reswak;
run;
```

LAMPIRAN 3

OUTPUT PROGRAM ANALISIS VARIANSI UNTUK RANCANGAN FAKTORIAL DALAM RAL

```
                    The SAS System          1

           General Linear Models Procedure
               Class Level Information

                 Class    Levels    Values

                 PRLAKUAN      4    1 2 3 4

                 LAHAN         4    1 2 3 4

                 ULANGAN       3    1 2 3

          Number of observations in data set = 48


                    The SAS System          2

           General Linear Models Procedure

Dependent Variable: HASIL

Source              DF       Sum of Squares       Mean Square   F Value     Pr > F

Model               15        83.20666667          5.54711111     10.25     0.0001

Error               32        17.32000000          0.54125000

Corrected Total     47       100.52666667

          R-Square              C.V.               Root MSE           HASIL Mean

          0.827707            18.09091             0.73569695           4.06666667

Source              DF        Type III SS         Mean Square   F Value     Pr > F

PRLAKUAN            3         44.64500000          14.88166667   27.49      0.0001
LAHAN               3         12.08666667           4.02888889    7.44      0.0006
PRLAKUAN*LAHAN      9         26.47500000           2.94166667    5.43      0.0002
```

General Linear Models Procedure

Duncan's Multiple Range Test for variable: HASIL

NOTE: This test controls the type I comparisonwise error rate, not the experimentwise error rate

Alpha= 0.05 df= 32 MSE= 0.54125

Number of Means	2	3	4
Critical Range	.6118	.6430	.6633

Means with the same letter are not significantly different.

Duncan Grouping	Mean	N	PRLAKUAN
A	5.2000	12	2
A			
A	4.7250	12	4
B	3.6167	12	1
C	2.7250	12	3

General Linear Models Procedure

Duncan's Multiple Range Test for variable: HASIL

NOTE: This test controls the type I comparisonwise error rate, not the experimentwise error rate

Alpha= 0.05 df= 32 MSE= 0.54125

Number of Means	2	3	4
Critical Range	.6118	.6430	.6633

Means with the same letter are not significantly different.

Duncan Grouping	Mean	N	LAHAN
A	4.7000	12	1
A			
A	4.4167	12	4
B	3.5833	12	3
B			
B	3.5667	12	2

General Linear Models Procedure
Least Squares Means

PRLAKUAN	LAHAN	HASIL LSMEAN	Std Err LSMEAN	Pr > |T| H0:LSMEAN=0	LSMEAN Number
1	1	5.20000000	0.42475483	0.0001	1
1	2	1.76666667	0.42475483	0.0002	2
1	3	2.23333333	0.42475483	0.0001	3
1	4	5.26666667	0.42475483	0.0001	4
2	1	5.80000000	0.42475483	0.0001	5
2	2	4.76666667	0.42475483	0.0001	6
2	3	5.50000000	0.42475483	0.0001	7
2	4	4.73333333	0.42475483	0.0001	8
3	1	2.43333333	0.42475483	0.0001	9
3	2	3.30000000	0.42475483	0.0001	10
3	3	2.50000000	0.42475483	0.0001	11
3	4	2.66666667	0.42475483	0.0001	12
4	1	5.36666667	0.42475483	0.0001	13
4	2	4.43333333	0.42475483	0.0001	14
4	3	4.10000000	0.42475483	0.0001	15
4	4	5.00000000	0.42475483	0.0001	16

Pr > |T| H0: LSMEAN(i)=LSMEAN(j)

i/j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	.	0.0001	0.0001	0.9123	0.3254	0.4759	0.6209	0.4429	0.0001	0.0034	0.0001
2	0.0001	.	0.4429	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.2753	0.0157	0.2311
3	0.0001	0.4429	.	0.0001	0.0001	0.0002	0.0001	0.0002	0.7413	0.0853	0.6601
4	0.9123	0.0001	0.0001	.	0.3812	0.4114	0.7003	0.3812	0.0001	0.0025	0.0001
5	0.3254	0.0001	0.0001	0.3812	.	0.0950	0.6209	0.0853	0.0001	0.0002	0.0001
6	0.4759	0.0001	0.0002	0.4114	0.0950	.	0.2311	0.9561	0.0005	0.0203	0.0007
7	0.6209	0.0001	0.0001	0.7003	0.6209	0.2311	.	0.2110	0.0001	0.0009	0.0001
8	0.4429	0.0001	0.0002	0.3812	0.0853	0.9561	0.2110	.	0.0006	0.0231	0.0008
9	0.0001	0.2753	0.7413	0.0001	0.0001	0.0005	0.0001	0.0006	.	0.1588	0.9123
10	0.0034	0.0157	0.0853	0.0025	0.0002	0.0203	0.0009	0.0231	0.1588	.	0.1923
11	0.0001	0.2311	0.6601	0.0001	0.0001	0.0007	0.0001	0.0008	0.9123	0.1923	.
12	0.0002	0.1439	0.4759	0.0001	0.0001	0.0014	0.0001	0.0016	0.7003	0.2996	0.7832
13	0.7832	0.0001	0.0001	0.8688	0.4759	0.3254	0.8258	0.2996	0.0001	0.0016	0.0001
14	0.2110	0.0001	0.0009	0.1749	0.0297	0.5828	0.0853	0.6209	0.0022	0.0683	0.0029
15	0.0764	0.0005	0.0039	0.0610	0.0080	0.2753	0.0262	0.2996	0.0092	0.1923	0.0120
16	0.7413	0.0001	0.0001	0.6601	0.1923	0.7003	0.4114	0.6601	0.0002	0.0080	0.0002

Pr > |T| H0: LSMEAN(i)=LSMEAN(j)

i/j	12	13	14	15	16
1	0.0002	0.7832	0.2110	0.0764	0.7413
2	0.1439	0.0001	0.0001	0.0005	0.0001
3	0.4759	0.0001	0.0009	0.0039	0.0001
4	0.0001	0.8688	0.1749	0.0610	0.6601
5	0.0001	0.4759	0.0297	0.0080	0.1923
6	0.0014	0.3254	0.5828	0.2753	0.7003
7	0.0001	0.8258	0.0853	0.0262	0.4114

General Linear Models Procedure
Least Squares Means

Least Squares Means for effect PRLAKUAN*LAHAN
Pr > |T| H0: LSMEAN(i)=LSMEAN(j)

Dependent Variable: HASIL

i/j	12	13	14	15	16
8	0.0016	0.2996	0.6209	0.2996	0.6601
9	0.7003	0.0001	0.0022	0.0092	0.0002
10	0.2996	0.0016	0.0683	0.1923	0.0080
11	0.7832	0.0001	0.0029	0.0120	0.0002
12	.	0.0001	0.0060	0.0231	0.0005
13	0.0001	.	0.1301	0.0429	0.5459
14	0.0060	0.1301	.	0.5828	0.3526
15	0.0231	0.0429	0.5828	.	0.1439
16	0.0005	0.5459	0.3526	0.1439	.

Univariate Procedure

Variable=RESWAK

Moments

N	48	Sum Wgts	48
Mean	0	Sum	0
Std Dev	0.607051	Variance	0.368511
Skewness	0.211966	Kurtosis	3.209506
USS	17.32	CSS	17.32
CV	.	Std Mean	0.08762
T:Mean=0	0	Pr>|T|	1.0000
Num ^= 0	48	Num > 0	26
M(Sign)	2	Pr>=|M|	0.6655
Sgn Rank	6	Pr>=|S|	0.9517
W:Normal	0.940347	Pr<W	0.0249

Quantiles(Def=5)

100% Max	2.033333	99%	2.033333
75% Q3	0.233333	95%	0.733333
50% Med	0.016667	90%	0.666667
25% Q1	-0.36667	10%	-0.63333
0% Min	-1.66667	5%	-0.73333
		1%	-1.66667
		Range	3.7
		Q3-Q1	0.6
		Mode	0.2

Extremes

Lowest	Obs	Highest	Obs
-1.66667(	17)	0.666667(	22)
-1.56667(	35)	0.666667(	27)
-0.73333(	24)	0.733333(	5)
-0.73333(	40)	1.333333(	36)
-0.63333(	25)	2.033333(	16)

```
 Stem Leaf                     #             Boxplot
   20 3                        1                0
   18
   16
   14
   12 3                        1                0
   10
    8
    6 773                      3                |
    4 00307                    5                |
    2 0000330                  7             +-----+
    0 003700077                9             *--+--*
   -0 730733                   6             |     |
   -2 77070                    5             +-----+
   -4 700000                   6                |
   -6 333                      3                |
   -8
  -10
  -12
  -14 7                        1                0
  -16 7                        1                0
      ----+----+----+----+
  Multiply Stem.Leaf by 10**-1
```


Univariate Procedure

Variable=RESWAK

```
                  Normal Probability Plot
  2.1+                                              *
     |
     |
     |                                                ++
     |                                          * ++++
     |                                         +++
     |                                      +++
     |                                  +++** *
     |                               +*****
     |                            *****
     |                       *****
     |                   *****
     |              ******+
     |            ** +++
     |        * **+++
     |        +++
     |     +++
     |  ++++
     |++      *
 -1.7+    *
      +----+----+----+----+----+----+----+----+----+----+
          -2        -1         0        +1        +2
```

LAMPIRAN 4

INPUT PROGRAM UNTUK PENGURAIAN PENGARUH INTERAKSI DENGAN ANALISIS AMMI

```
data dt1;;
input prlakuan      lahan      ulangan $ hasil @@;
cards;
        1            1           1        5.5
        1            1           2        4.8
        1            1           3        5.3
        1            2           1        1.6
        1            2           2        2.5
        1            2           3        1.2
        1            3           1        2.2
        1            3           2        2.1
        1            3           3        2.4
        1            4           1        5.7
        1            4           2        5.2
        1            4           3        4.9
        2            1           1        5.6
        2            1           2        5.8
        2            1           3        6.0
        2            2           1        6.8
        2            2           2        3.1
        2            2           3        4.4
        2            3           1        5.7
        2            3           2        5.7
        2            3           3        5.1
        2            4           1        5.4
        2            4           2        4.8
        2            4           3        4.0
        3            1           1        1.8
        3            1           2        2.4
        3            1           3        3.1
        3            2           1        3.3
        3            2           2        3.7
        3            2           3        2.9
        3            3           1        2.1
        3            3           2        3.0
        3            3           3        2.4
        3            4           1        2.9
        3            4           2        1.1
        3            4           3        4.0
```

```
        4            1           1        5.1
        4            1           2        5.4
        4            1           3        5.6
        4            2           1        3.7
        4            2           2        4.6
        4            2           3        5.0
        4            3           1        3.6
        4            3           2        4.2
        4            3           3        4.5
        4            4           1        5.1
        4            4           2        4.7
        4            4           3        5.2
;
PROC IML;
CREATE COBA VAR {K1 K2 K3 K4};
INFILE 'D:TA.txt';
DO DATA;
INPUT K1 K2 K3 K4;
APPEND;
END;
READ ALL INTO ZEG;
CLOSE COBA;
PRINT ZEG;
/*PENYUSUNAN MATRIK GEI*/
RG=ZEG[+,]/4;
RE=ZEG[,+]/4;
R=ZEG[+,+]/16;
ZRG=REPEAT (RG,4,1);
ZRE=REPEAT (RE,1,4);
ZR=REPEAT (R,4,4);
ZPEG=ZEG-ZRE-ZRG+ZR;
/****SVD****/
CALL SVD (U, SINGULAR,VEKTOR,ZPEG);
PRINT U;
PRINT SINGULAR;
PRINT VEKTOR;
/***PENDUGAAN SKOR KOMPONEN***/
AKAR =SQRT(DIAG(SINGULAR));
SKUE=U*SINGULAR;
SKUG=VEKTOR*SINGULAR;
PRINT SKUE;
PRINT SKUG;
```

LAMPIRAN 5

OUTPUT PROGRAM UNTUK PENGURAIAN PENGARUH INTERAKSI DENGAN ANALISIS AMMI

```
                    The SAS System


           ZEG
0.8041667 -0.179167 -1.070833   -0.1375
-1.495833 -0.079167 0.9291667    0.0625
-1.045833    0.6375    0.1125   -0.2875
1.1541667   -0.9625 -0.554167 -0.220833


             U
0.4468194 0.4344375 0.6013456       0.5
-0.597485 -0.494434 0.3854169       0.5
-0.389432 0.5615052 -0.532029       0.5
0.5400983 -0.501509 -0.454734       0.5


                     SINGULAR
                   2.7862804
                   1.0047791
                   0.2281678
                   6.303E-17


         VEKTOR
0.8196234 -0.076747 -0.268938      -0.5
 -0.28743 0.7981531  -0.17417      -0.5
-0.494117 -0.580758 -0.410572      -0.5
-0.038076 -0.140648 0.8536793      -0.5


           SKUE
0.7458378 0.4354744 0.2872442 3.9695E-9
-0.997332 -0.495614 0.1841018 3.9695E-9
-0.650046 0.5628453 -0.254134 3.9695E-9
0.9015405 -0.502706 -0.217212 3.9695E-9


           SKUG
 1.368128 -0.076931 -0.128463  -3.97E-9
-0.479783 0.8000581 -0.083196  -3.97E-9
-0.824788 -0.582144 -0.196117  -3.97E-9
-0.063557 -0.140984 0.4077763  -3.97E-9
```

LAMPIRAN 6

INPUT PROGRAM MAKRO SAS-BIPLOT

```
/*--------------------------------------------------------------*
  *    Name: BIPLOT.SAS                                           *
  *   Title: Construct a biplot of observations and variables     *

  *--------------------------------------------------------------*
  *  Author  :  DWI RETNO SULISTYANINGSIH                          *
  *  NIM     :  J2A605037                                          *
  * Jurusan  :  Matematika Ekstensi                                *
  *--------------------------------------------------------------*/

%macro BIPLOT(
        data=_LAST_,       /* Data set for biplot                      */
        var =_NUM_,        /* Variables for biplot                     */
        id  =ID,           /* Observation ID variable                  */
        dim =2,            /* Number of biplot dimensions              */
        factype=SYM,        /* Biplot factor type: GH, SYM, or JK      */
        scale=1,           /* Scale factor for variable vectors        */
        power=1,           /* Power transform of response              */
        out =BIPLOT,       /* Output dataset: biplot coordinates       */
        anno=BIANNO,       /* Output dataset: annotate labels          */
        xanno=dim1,
        yanno=dim2,
        zanno=dim3,
        std=MEAN,          /* How to standardize columns: NONE|MEAN|STD*/
        colors=BLUE RED,   /* Colors for OBS and VARS                  */
        symbols=none none, /* Symbols for OBS and VARS                 */
        interp=none vec,   /* Markers/interpolation for OBS and VARS   */
        pplot=NO,          /* Produce printer plot?                    */
        gplot=YES,
        haxis=,            /* AXIS statement for horizontal axis       */
        vaxis=,            /* and for vertical axis- use to equate axes */
        name=biplot);

%let std=%upcase(&std);
%let factype=%upcase(&factype);
      %if &factype=GH  %then %let p=0;
%else %if &factype=SYM %then %let p=.5;
%else %if &factype=JK  %then %let p=1;
%else %do;
   %put BIPLOT: FACTYPE must be GH, SYM, or JK. "&factype" is not valid.;
   %goto done;
   %end;
%if %upcase("&var") ^= "_NUM_" %then %let var={&var};
%if &data=_LAST_ %then %let data=&syslast;

proc iml;
start biplot(y,id,vars,out, g, scale);
   N = nrow(Y);
   P = ncol(Y);
   %if &std = NONE
```

```
    %then Y = Y - Y[:] %str(;);             /* remove grand mean */
    %else Y = Y - J(N,1,1)*Y[:,] %str(;);   /* remove column means */
%if &std = STD %then %do;
   S = sqrt(Y[##,] / (N-1));
   Y = Y * diag (1 / S );
%end;

*-- Singular value decomposition:
     Y is expressed as U diag(Q) V prime
     Q contains singular values, in descending order;
call svd(u,q,v,y);
reset fw=8 noname;
percent = 100*q##2 / q[##];
cum = cusum(percent);
c1={'Singular Values'};
c2={'Percent'};
c3={'Cum % '};
Print "Singular values and variance accounted for",,
      q       [colname=c1 format=9.4 ]
      percent [colname=c2 format=8.2 ]
      cum     [colname=c3 format=8.2 ];

d = &dim ;
     *-- Assign macro variables for dimension labels;
     lab = '%let p' + char(t(1:d),1) + '=' + left(char(percent[t(1:d)],8,1)) + ';';
     call execute(lab);
     /*
     call execute('%let p1=', char(percent[1],8,1), ';');
     call execute('%let p2=', char(percent[2],8,1), ';');
     if d > 2 then
     call execute('%let p3=', char(percent[3],8,1), ';');
     */
*-- Extract first  d  columns of U & V, and first  d  elements of Q;
U = U[,1:d];
V = V[,1:d];
Q = Q[1:d];
*-- Scale the vectors by QL, QR;
* Scale factor 'scale' allows expanding or contracting the variable
  vectors to plot in the same space as the observations;
QL= diag(Q ## g );
QR= diag(Q ## (1-g));
A = U * QL;
B = V * QR;
     ratio = max(sqrt(A[,##])) /  max(sqrt(B[,##]));
     print 'OBS / VARS ratio:' ratio 'Scale:' scale;
     if scale=0 then scale=ratio;
B = B # scale;
OUT=A // B;
*-- Create observation labels;
id = id // vars`;
type = repeat({"OBS "},n,1) // repeat({"VAR "},p,1);
id  = concat(type, id);
factype = {"GH" "Symmetric" "JK"}[1 + 2#g];
print "Biplot Factor Type", factype;
cvar = concat(shape({"DIM"},1,d), char(1:d,1.));
print "Biplot coordinates",
      out[rowname=id colname=cvar f=9.4];
```

```
   %if &pplot = YES %then %do;
   call pgraf(out[,{1 2}],substr(id,5),'Dimension 1', 'Dimension 2', 'Biplot');
      %end;
   create &out  from out[rowname=id colname=cvar];
   append from out[rowname=id];
finish;
start power(x, pow);
                if pow=1 then return(x);
                if any(x <= 0) then x = x + ceil(min(x)+.5);
                if abs(pow)<.001 then xt =  log(x);
                        else xt = ((x##pow)-1) / pow;
        return (xt);
        finish;
        /*--- Main routine */
   use &data;
   read all var &var into y[ c=vars ];
   %if &id = %str() %then %do;
      id=compress(char(1:nrow(xy),4))`;
   %end;
   %else %do;
      read all var{&id} into id;
   %end;
*   read all var &var into y[colname=vars rowname=&id];

        %if &power ^= 1 %then %do;
                y = power(y, &power);
                %end;

   scale = &scale;
   run biplot(y, id,vars,out, &p, scale );
   quit;
 /*---------------------------------*
  |  Split ID into _TYPE_ and _NAME_ |
  *---------------------------------*/
data &out;
   set &out;
   drop id;
   length _type_ $3 _name_ $16;
   _type_ = substr(id,1,3);
   _name_ = substr(id,5);
   label
   %do i=1 %to &dim;
       dim&i = "Dimension &i (&&p&i%str(%%))"
       %end;
   ;
 /*-------------------------------------------------*
  | Annotate observation labels and variable vectors |
  *-------------------------------------------------*/
        %*-- Assign colors and symbols;
        %let c1= %scan(&colors,1);
        %let c2= %scan(&colors,2);
        %if &c2=%str() %then %let c2=&c1;

        %let v1= %upcase(%scan(&symbols,1));
        %let v2= %upcase(%scan(&symbols,2));
        %if &v2=%str() %then %let v2=&v1;
        %let i1= %upcase(%scan(&interp,1));
```

```
        %let i2= %upcase(%scan(&interp,2));
        %if &i2=%str() %then %let i2=&i1;

data &anno;
   set &out;
   length function color $8 text $16;
   xsys='2'; ysys='2'; %if &dim > 2 %then %str(zsys='2';);
   text = _name_;
   if _type_ = 'OBS' then do;         /* Label observations (row points) */
      color="&c1";
                if "&i1" = 'VEC' then link vec;
      x = &xanno; y = &yanno;
      %if &dim > 2 %then %str(z = &zanno;);
                %if &v1=NONE %then
        %str(position='5';);
                %else %do;
      if dim1 >=0
         then position='>';             /* rt justify         */
         else position='<';             /* lt justify         */
                        %end;
      function='LABEL   '; output;
      end;
   if _type_ = 'VAR' then do;           /* Label variables (col points) */
      color="&c2";
                if "&i2" = 'VEC' then link vec;
      x = &xanno; y = &yanno;
      if dim1 >=0
         then position='6';             /* down justify       */
         else position='2';             /* up justify         */
      function='LABEL   '; output;      /* variable name      */
      end;
                return;

vec:                    /* Draw line from the origin to point */
      x = 0; y = 0;
      %if &dim > 2 %then %str(z = 0;);
      function='MOVE'    ; output;
      x = &xanno; y = &yanno;
      %if &dim > 2 %then %str(z = &zanno;);
      function='DRAW'    ; output;
                return;

%if &gplot = YES %then %do;
        %if &i1=VEC %then %let i1=NONE;
        %if &i2=VEC %then %let i2=NONE;
        %let legend=nolegend;

        %let warn=0;
   %if %length(&haxis)=0 %then %do;
                %let warn=1;
                axis2 offset=(1,5) ;
      %let haxis=axis2;
      %end;
   %if %length(&vaxis)=0 %then %do;
                %let warn=1;
                axis1 offset=(1,5) label=(a=90 r=0);
      %let vaxis=axis1;
```

```
      %end;
        proc gplot data=&out &GOUT;
                plot dim2 * dim1 = _type_/
                        anno=&anno frame &legend
                        href=0 vref=0 lvref=3 lhref=3
                        vaxis=&vaxis haxis=&haxis
                        vminor=1 hminor=1
                        name="&name" des="Biplot of &data";
                symbol1 v=&v1 c=&c1 i=&i1;
                symbol2 v=&v2 c=&c2 i=&i2;
        run; quit;
        %if &warn %then %do;
                %put WARNING:  No VAXIS= or HAXIS= parameter was specified, so the
biplot axes have not;
                %put WARNING:  been equated.  This may lead to incorrect interpretation
of distance and;
                %put WARNING:  angles.  See the documentation.;
                %end;
        goptions reset=symbol;
        %end;  /* %if &gplot=YES */
%done:
%mend BIPLOT;
data biplot;
INPUT id$ T1 T2 T3 T4;
CARDS;
Lahan1  0.804166666 -0.179166666 -1.070833333 -0.1375
Lahan2 -1.495833333 -0.079166666  0.929166666  0.062499999
Lahan3 -1.045833333  0.6375       0.1125      -0.2875
Lahan4  1.154166667 -0.9625      -0.554166666 -0.220833333
;
%biplot;
run;
```

LAMPIRAN 7

OUTPUT NILAI SINGULAR BIPLOT AMMI

The SAS System

Singular values and variance accounted for

Singular Values	Percent	Cum %
2.7863	87.97	87.97
1.0048	11.44	99.41
0.2282	0.59	100.00
0.0000	0.00	100.00

OBS / VARS ratio: 0.81274 Scale:

Biplot Factor Type
Symmetric

Biplot coordinates

	DIM1	DIM2
OBS Lahan1	0.7458	0.4355
OBS Lahan2	-0.9973	-0.4956
OBS Lahan3	-0.6500	0.5628
OBS Lahan4	0.9015	-0.5027
VAR T1	1.3681	-0.0769
VAR T2	-0.4798	0.8001
VAR T3	-0.8248	-0.5821
VAR T4	-0.0636	-0.1410

LAMPIRAN 8

INPUT PROGRAM SAS UNTUK GRAFIK BIPLOT

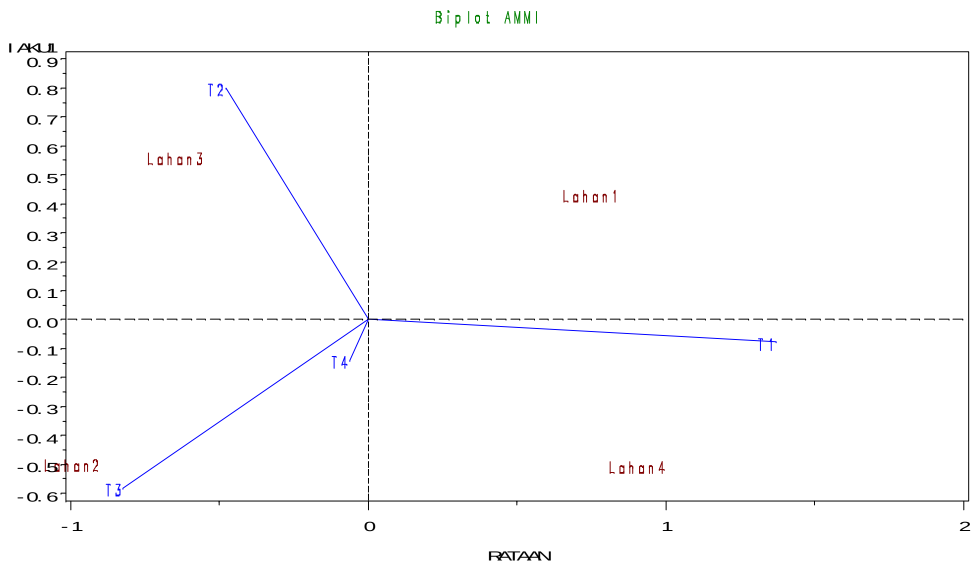
```
data biplot;
input  type $ name $  Rataan IAKU1 ;
cards;
                                 gen Lahan1      0.7458    0.4355
                                 gen Lahan2     -0.9973   -0.4956
                                 gen Lahan3     -0.6500    0.5628
                                 gen Lahan4      0.9015   -0.5027
                                 env T1          1.3681   -0.0769
                                 env T2         -0.4798    0.8001
                                 env T3         -0.8248   -0.5821
                                 env T4         -0.0636   -0.1410

data labels;
set biplot;
retain xsys '2' ysys '2';
length function text $8 ;
text = name ;
  if type = 'gen' then do ;
    color = 'red' ;
    size = 1.0 ;
    style = 'hwcgm001' ;
    x = Rataan ;
    y = IAKU1 ;
    if dim1 >=0
      then position = '5' ;
      else position = '5' ;
    function = 'LABEL' ;
    output ;
  end ;
  if type = 'env' then DO ;
     color = 'black' ;
     size  = 1.0 ;
     style = 'hwcgm001' ;
     x = 0.0 ;
     y = 0.0 ;
     function = 'MOVE' ;
     output ;
     x = Rataan;
     y = IAKU1;
     function = 'DRAW' ;
     output ;
    if dim1 >=0
      then position = '6' ;
      else position = '4' ;
    function = 'LABEL' ;
    output ;
   end ;
proc gplot data = biplot ;
plot IAKU1*Rataan / Annotate=labels frame
        vref=0.0 Href = 0.0
        cvref=black chref=black
        lvref=3 lhref=3
```

```
        vaxis=axis2 haxis=axis1
        vminor=1 hminor=1 nolegend;
symbol1 v=none c=black h=0.7 ;
symbol2 v=none c=black h=0.7 ;
axis2
        length = 4.8 in
        order = (-1.0 to 1.0 by 0.2)
        label=(f=hwcgm001 c=green h=1.2 a=90 r=0 'Rataan')
        offest = (3)
        value=(h=1.0)
        offset = (2)
        minor=none;
axis1
        length = 7.0 in
        order = (-1.0 to 1.4 by 0.2)
        label=(f=hwcgm001 c=green h=1.2  'IAKU 1')
        offest = (3)
        value=(h=1.0)
        offset = (2)
        minor=none;
Title f=hwcgm001 c=green h=1.0 'Biplot AMMI';
run;
```

LAMPIRAN 9

BIPLOT



LAMPIRAN 10

Tabel Distribusi F (α = 0.05)

v1	v1								
v2	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	161.4	199.5	215.7	224.6	230.2	234	236.8	238.9	240.5
2	18.51	19	19.16	19.25	19.3	19.33	19.35	19.37	19.38
3	10.13	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.89	8.85	8.81
4	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	6
5	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.77
6	5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.1
7	5.59	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.68
8	5.32	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.5	3.44	3.39
9	2.12	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23	3.18
10	4.96	4.1	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07	3.02
11	4.84	3.98	3.59	3.36	3.2	3.09	3.01	2.95	2.9
12	4.75	3.89	3.49	3.26	3.11	3	2.91	2.85	2.8
13	4.67	3.81	3.41	3.18	3.03	2.92	2.93	2.77	2.71
14	4.6	3.74	3.34	3.11	2.96	2.85	2.76	2.7	2.65
15	4.54	3.68	3.29	3.06	2.9	2.79	2.71	2.64	2.59
16	4.49	3.63	3.24	3.01	2.85	2.74	2.66	259	2.54
17	4.45	3.59	3.2	2.96	2.81	2.7	2.61	2.55	2.49
18	4.41	3.55	3.16	2.93	2.77	2.66	2.58	2.51	2.46
19	4.38	3.52	3.13	2.9	2.74	2.63	2.54	2.48	2.42
20	4.35	3.49	3.1	2.87	2.71	2.6	2.51	2.45	2.39
21	4.32	3.47	3.07	2.84	2.68	2.57	2.49	2.42	2.37
22	4.3	3.44	3.05	2.82	2.66	2.55	2.46	2.4	2.34
23	4.28	3.42	3.03	2.8	2.64	2.53	2.44	2.37	2.32
24	4.26	3.4	3.01	2.78	2.62	2.51	2.42	2.36	2.3
25	4.24	3.39	2.99	2.76	2.6	2.49	2.4	2.34	2.28
26	4.23	3.37	2.98	2.74	2.59	2.47	2.39	2.32	2.27
27	4.21	3.35	2.96	2.73	2.57	2.46	2.37	2.31	2.25
28	4.2	3.34	2.95	2.71	2.56	2.45	2.36	2.29	2.24
29	4.18	3.33	2.93	2.7	2.55	2.43	2.35	2.28	2.22
30	4.17	3.32	2.92	2.69	2.53	2.42	2.33	2.27	2.21
40	4.08	3.23	2.84	2.61	2.45	2.34	2.25	2.18	2.12
60	4	3.15	2.76	2.53	2.37	2.25	2.17	2.1	2.04
120	3.92	3.07	2.68	2.45	2.29	2.17	2.09	2.02	1.96
∞	3.84	3	2.6	2.37	2.21	2.1	2.01	1.94	1.88