MATRIKS INVERS MOORE PENROSE ATAS DAERAH INTEGRAL

Titi Udjiani SRRM
Jurusan Matematika FMIPA UNDIP
Jl. Prof. H. Soedarto, S.H, Semarang 50275

Abstract. The Inverse Moore Penrose matrix has been applied in various areas, for example in statistic and optimization. In this paper we study Inverse Moore Penrose matrix which is applied to Integral Domain. We will first discuss the characterization of all matrices over Integral Domain which admits Moore Penrose Inverse. With this characterization we will derive necessary and sufficient conditions for a matrix to have a Moore Penrose Inverse. We also show the relations between Moore Penrose Inverse matrix and Compound matrix. The aim of this paper is to obtain an explicit formula for the Moore Penrose Inverse when it exist and gives a necessary and sufficient condition for a matrix to have a Moore Penrose Inverse under the assumption that a matrix has a rank factorization.

Key words: Integral Domain, rank, minor.

1. PENDAHULUAN

Jika *A* adalah suatu matriks dengan rank *r* dan elemen elemennya merupakan ring komutatif, maka syarat perlu dan cukup agar *A* mempunyai invers Moore Penrose adalah jika jumlahan dari semua minor berukuran *rxr* dari *A* mempunyai invers Moore Penrose.

Saat ini matriks invers Moore Penrose semakin banyak penggunaannya dalam berbagai cabang ilmu matematika, misalnya dalam statistik dan operasi riset. Oleh karenanya tulisan ini akan membahas mengenai matriks Invers Moore Penrose pada Daerah Integral.

Seperti telah diketahui bahwa Daerah Integral adalah Ring komutatif dengan elemen satuan yang tidak sama dengan nol dan tidak mempunyai pembagi nol sejati mengacu pada [2]. Selanjutnya untuk dapat memahami tulisan ini, pemahaman mengenai Daerah Integral sangat diperlukan.

2. MATRIKS INVERS MOORE PENROSE PADA DAERAH INTEGRAL

Berikut ini adalah definisi mengenai matriks Invers Moore Penrose.

Definisi 2.1. [3] Diketahui *A* adalah matriks berukuran mxn atas Daerah Integral *R*. Suatu matriks *G* berukuran *nxm* atas *R* dikatakan matriks invers Moore Penrose dari *A* jika:

1. $AGA = A$
2. $GAG = G$
3. $(AG)^T = AG$
4. $(GA)^T = GA$

Lemma 2.1. [3] Diketahui *A* adalah matriks tidak nol berukuran *nx1* atas *R*. Matriks *A* dikatakan mempunyai Invers Moore Penrose jika dan hanya jika $A^T A$ *invertible* di *R*

Bukti.

Diketahui bahwa *A* mempunyai invers Moore Penrose, akan ditunjukkan bahwa $A^T A$ invertible di *R*.

Misal *G* adalah invers Moore Penrose dari *A*, maka $AGA = A$. Karena $A \neq 0$ dan berukuran *nx1* maka *GA* adalah I_1.

Selanjutnya karena $(AG)^T = AG$ maka $G^T A^T A = (AG)^T A = AGA = A$. Sehingga $(GG^T)(A^T A) = G(G^T A^T A) = GA = I_1$.

Sampai disini terbukti bahwa $A^T A$ *invertible* di *R*, dengan inversnya GG^T.

Sebaliknya diketahui bahwa $A^T A$ *invertible* di *R*, akan dibuktikan bahwa A mempunyai matriks invers Moore Penrose.

Untuk membuktikan bahwa *A* mempunyai matriks invers Moore Penrose, akan ditunjukkan bahwa $(A^T A)^{-1} A^T$ adalah invers Moore Penrose dari $A^T A$.

(a). $((A^T A)^{-1} A^T)A((A^T A)^{-1} A^T)$
$= (A^T A)^{-1} (A^T A)(A^T A)^{-1} A^T)$.
Karena $A^T A$ *invertible*, artinya
$(A^T A)^{-1}$ ada, maka
$(A^T A)^{-1} (A^T A)(A^T A)^{-1} A^T)$
$= I(A^T A)^{-1} A^T = (A^T A)^{-1} A^T$.

(b). $A((A^T A)^{-1} A^T)A =$
$A((A^T A)^{-1} A^T A)$. Karena
$A^T A$ invertible di *R*, maka
$((A^T A)^{-1} A^T A) = A$.

(c). $(A((A^T A)^{-1} A^T))^T$
$= ((A^T A)^{-1})^T A^T$
$= A(A^{-1} (A^T)^{-1})^T A^T$
$= A(A^{-1} (A^{-1})^T)^T A^T$
$= AA^{-1} (A^{-1})^T A^T$
$= AA^{-1} (A^T)^{-1} A^T$
$= A (A^T A)^{-1} A^T$

(d). $(((A^T A)^{-1} A^T)A)^T$
$= A^T A((A^T A)^{-1})^T$
$= A^T A(A^{-1} (A^{-1})^T)^T$
$= A^T A(A^{-1})^T$
$= A^T ((A^T A)^{-1} A^T)^T$
$= A^T A((A^T A)^{-1})^T$
$= A^T A (A^{-1} (A^T)^{-1})^T$
$= A^T A (A^{-1} (A^{-1})^T)^T$
$= A^T A (A^{-1} (A^{-1})^T)$
$= A^T A(A^T A)^{-1}$
$= (A^T A)^{-1} (A^T A)$ ■

Dengan cara yang sama juga dapat ditunjukkan untuk matriks tak nol *A* yang berukuran *1xm* atas *R*.

Pada pembicaraan selanjutnya akan dibahas untuk matriks atas *R* yang *full rank.*

Definisi 2.2. [3] Diketahui $A = ((a_{ij}))$, adalah matriks berukuran mxn atas daerah integral *R*,
$\alpha = (i_1,...,i_r)$ dengan $1 \le i_1 \le ... \le i_r \le m$,
$\beta = (j_1,...,j_r)$ dengan $1 \le j_1 \le ... \le j_r \le n$.
A^α_β adalah submatriks *A* yang ditentukan oleh baris sesuai dengan α dan kolom sesuai dengan β. Jika $\alpha = (i_1,...,i_m)$ maka A^α_β cukup ditulis dengan A_β, dan jika $\beta = (j_1,...,j_n)$ maka A^α_β cukup ditulis dengan A^α.

Teorema 2.1. [3] Diketahui *A* adalah matriks berukuran *mxn* atas *R* dengan rank n. Pernyataan di bawah ini ekivalen.

1. *A* mempunyai matriks invers Moore Penrose.
2. $A^T A$ *invertible* di *R*.
3. $\sum_\alpha \left|A^\alpha\right|^2$ *invertible* di *R*. Dengan α berjalan sepanjang *n* elemen subset dari *{1,2,…,m}*.

Selanjutnya jika Invers Moore Penrose dari A ada, maka $((A^T A)^{-1})A^T$ adalah invers Moore Penrose dari *A*.

Bukti.

$1 \Rightarrow 2$.

Diketahui *A* mempunyai invers Moore Penrose. Akan ditunjukkan bahwa $A^T A$ *invertible* di *R*.

Misal *G* adalah invers Moore Penrose dari *A*, maka $AGG^T A^T A = AG(AG)^T A = AGAGA = AGA = A$.

Misal *A* *full coulomb rank* , maka menurut [1] rank *A* adalah *n*. Sehingga $GG^T A^T A = I_n$

Terbukti bahwa $A^T A$ *invertible* di *R*.

$2 \Rightarrow 1$.

Selanjutnya diketahui $A^T A$ invertible di *R*. Untuk menunjukkan bahwa *A* mempunyai invers Moore Penrose yaitu dengan menunjukkan bahwa $((A^T A)^{-1})A^T$ adalah invers Moore Penrose dari *A* yang sudah ditunjukkan pada lemma 2.

$2 \Rightarrow 3$.
Karena A mempunyai rank n dan dengan menggunakan formulasi Cauchy Binet, diperoleh:

$$\left|A^T A\right| = \sum_\alpha \left|A^T_\alpha\right| \left|A^\alpha\right| = \sum_\alpha \left|A^\alpha\right|^2$$

Dengan α berjalan sepanjang n elemen subset dari $\{1,2,\ldots,m\}$.
Karena suatu matriks bujur sangkar atas R *invertible* jika dan hanya jika determinannya invertible di R dan $A^T A$ *invertible,* maka terbukti bahwa $\sum_\alpha \left|A^\alpha\right|^2$ *invertible.* ■

Teorema diatas juga berlaku jika A mempunyai rank m (*full row rank*).

Teorema 2.2. [3] Jika A adalah matriks berukuran mxn di R dengan rank r, dan $A = BC$ adalah faktorisasi rank dari A atas R, maka kondisi dibawah ini ekivalen.

1. A mempunyai invers Moore Penrose.
2. $B^T B$ dan CC^T *invertible* di R.
3. $\sum_{\alpha,\beta} \left|A^\alpha_\beta\right|^2$ *invertible* di R, dengan $\alpha \subset \{1,2,\ldots m\}$; dan $\beta \subset \{1,2,\ldots,n\}$.

Selanjutnya jika invers Moore Penrose dari A ada maka $C^T (CC^T)^{-1} (B^T B)^{-1} B^T$ adalah invers Moore Penrose dari A.

Bukti.
$1 \Rightarrow 2$.
Misal G adalah matriks invers Moore Penrose dari A, sehingga $BCGG^T A^T BC = BCG(AG)^T BC = BCGAGBC = BCGBC = BC$.
Artinya $CGG^T A^T B = CGG^T (BC)^T B = CGG^T C^T B^T B = I$. Terbukti bahwa $B^T B$ *invertible* di R.
Dengan cara yang sama diperoleh juga bahwa CC^T *invertible* di R.
$2 \Rightarrow 1$
Akan ditunjukkan bahwa $C^T (CC^T)^{-1} (B^T B)^{-1} B^T$ adalah matriks invers Moore Penrose dari A.

(a). $AC^T (CC^T)^{-1} (B^T B)^{-1} B^T A = AC^T (C^T)^{-1} C^{-1} B^{-1} (B^T)^{-1} B^T A = AC^{-1} B^{-1} A = A(BC)^{-1} A = AA^{-1} A = A.$

(b). $C^T (CC^T)^{-1} (B^T B)^{-1} B^T AC^T (CC^T)^{-1} (B^T B)^{-1} B^T =$
$C^T (CC^T)^{-1} (B^T B)^{-1} B^T A$
$C^T (C^T)^{-1} C^{-1} B^{-1} (B^T)^{-1} B^T =$
$C^T (CC^T)^{-1} (B^T B)^{-1} B^T AC^{-1} B^{-1} =$
$C^T (CC^T)^{-1} (B^T B)^{-1} B^T AC^{-1} B^{-1} =$
$C^T (CC^T)^{-1} (B^T B)^{-1} B^T A (BC)^{-1} =$
$C^T (CC^T)^{-1} (B^T B)^{-1} B^T A A^{-1} =$
$C^T (CC^T)^{-1} (B^T B)^{-1} B^T$

(c). Karena $AC^T (CC^T)^{-1} (B^T B)^{-1} B^T =$
$AC^T (C^T)^{-1} C^{-1} B^{-1} (B^T)^{-1} B^T =$
$AC^{-1} B^{-1} = A(BC)^{-1} = AA^{-1} = I$,
maka $(AC^T (CC^T)^{-1} (B^T B)^{-1} B^T)^T =$
$AC^T (CC^T)^{-1} (B^T B)^{-1} B^T$

(d). Dengan cara yang sama karena
$C^T (CC^T)^{-1} (B^T B)^{-1} B^T = I$ maka
$(C^T (CC^T)^{-1} (B^T B)^{-1} B^T A)^T =$
$C^T (CC^T)^{-1} (B^T B)^{-1} B^T A.$

$2 \Rightarrow 3$
Karena $A = BC$ adalah faktorisasi rank dari A atas R, maka dengan menggunakan formulasi Cauchy Binet diperoleh bahwa $\left|A^\alpha_\beta\right| = \left|B^\alpha\right| \left|C_\beta\right|$ untuk suatu α berjalan sepanjang r elemen *subset* dai $\{1,2,\ldots,m\}$ dan β berjalan sepanjang r elemen subset dai $\{1,2,\ldots,n\}$. Sehingga $\sum_{\alpha,\beta} \left|A^\alpha_\beta\right|^2 =$

$$\sum_{\alpha,\beta} \left|B^\alpha\right|^2 \left|C_\beta\right|^2 = \sum_\alpha \left|B^\alpha\right|^2 \sum_\beta \left|C_\beta\right|^2.$$

Dengan menggunakan Teorema 2. Terbukti bahwa $\sum_{\alpha,\beta} \left|A^\alpha_\beta\right|^2$ *invertible.* ■

Akibat 2.1.
Diketahui A adalah matriks berukuran mxn atas R dengan rank r. Jika ada faktorisasi rank $A = BC$ dari A atas R maka A akan mempunyai matriks Invers Moore Penrose jika dan hanya jika $C_r(A)$ mempunyai invers Moore Penrose.

Bukti.
($\Leftarrow$)Karena ada faktorisasi rank $A = BC$ maka $C_r(A) = C_r(B)\ C_r(C)$. Sehingga

karena $C_r(A)$ mempunyai invers Moore Penrose dan dengan menggunakan teorema 3 [1)$\Rightarrow$3)], diperoleh bahwa jumlahan dari semua elemen di $C_r(A)$ yaitu $\sum_{\alpha,\beta} \left|A_{\beta}^{\alpha}\right|^2$ *invertible*, dengan $\alpha \subset \{1,2,\ldots m\}$; dan $\beta \subset \{1,2,\ldots,n\}$. Akibatnya dengan menggunakan teorema 3 [3) $\Rightarrow$1)] diperoleh A mempunyai invers Moore Penrose.

($\Rightarrow$)Misal G adalah invers Moore Penrose dari A, sehingga $AGA = A$. Dengan menggunakan sifat matriks Compound diperoleh bahwa $C_r(G)$ adalah invers dari $C_r(A)$. ■

Lemma 2.2.
Diketahui A matriks berukuran mxn atas R yang mempunyai rank 1. A dikatakan mempunyai invers Moore Penrose jika dan hanya jika $\sum_{i,j} a_{i,j}{}^2$ invertible di R.

Bukti.
($\Leftarrow$)Diketahui $u = \sum_{i,j} a_{i,j}{}^2$ invertible di R. Akan ditunjukkan bahwa $u^{-1}A^T$ adalah invers Moore Penrose dari A.
Karena A mempunyai rank 1 maka setiap minor berukuran 2x2 dari A mempunyai determinan nol.
Untuk suatu i,j,k,l diperoleh $a_{k,j}\ a_{i,l} = a_{i,j}\ a_{k,l}$. Sehingga untuk suatu i,l diperoleh:

$$\begin{aligned}\sum_{j,k} a_{ij} g_{jk} a_{kl} &= u^{-1}\sum_{j,k} a_{ij}a_{kj}a_{kl}\\ &= u^{-1}\sum_{j,k} a_{il}a_{kj}{}^2\\ &= \sum_{k,j}((a_{kj})^2)^{-1}\sum_{j,k} a_{il}a_{kj}{}^2\\ &= a_{il}\ \ldots.(*).\end{aligned}$$

Terbukti bahwa $AGA = A$.

$$\begin{aligned}\sum_{j,k} g_{ji}a_{il}g_{lk} &= u^{-1}\ u^{-1}\sum_{j,k} a_{ij}a_{il}a_{kl}\\ &= u^{-1}\ u^{-1}\sum_{j,k} a_{kj}a_{il}{}^2\\ &= u^{-1}(a_{il}{}^2)^{-1}\sum_{j,k} a_{kj}a_{il}{}^2\\ &= u^{-1}\sum_{j,k} a_{kj} = g_{jk}\ .\end{aligned}$$

Terbukti bahwa $GAG = G$.

Selanjutnya
$(AG)^T = (Au^{-1}A^T)^T = A(u^{-1})^T A^T = Au^{-1}A^T = AG.$
$(GA)^T = (u^{-1}A^T A)^T = A^T A(u^T)^{-1} = A^T Au^{-1} = u^{-1}A^T A = GA.$
($\Rightarrow$)Misal G adalah invers Moore Penrose dari A ; r_i adalah baris ke i dari A dengan $i = 1,2,\ldots,m$ dan c_j adalah kolom ke j dari G dengan $j = 1,2,..,n$.
Selanjutnya dibentuk matriks $B_{1xmn} = (r_1, r_2, \ldots, r_m)$; $H_{mnx1} = (c_1^T, c_2^T, \ldots, c_m^T)$ dan akan ditunjukkan bahwa H adalah invers Moore Penrose dari B.
Dengan menggunakan (*) diperoleh $u^{-1}\sum_{j,k} a_{kj}{}^2 = 1$; $u^{-1}\sum_{j,k} a_{kj}\ a_{kj} = 1$; $\sum_{j,k} a_{kj}\, g_{jk} = 1$; $BH = 1$. Sehingga $HBH = H$; $BHB = B$ dan $(BH)^T = BH$.

Selanjutnya $HB = \begin{bmatrix} c_1r_1 & \cdots & c_1r_m \\ c_2r_1 & \cdots & c_2r_m \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_mr_1 & \cdots & c_mr_m \end{bmatrix}$.

Untuk menunjukkan bahwa $(HB)^T = HB$, akan ditunjukkan dengan $(c_i r_j)^T$
Diatas sudah ditunjukkan bahwa $u^{-1}A^T$ adalah invers Moore Penrose dari A. Karena sifat tunggal dari invers maka $g_{ij} = u^{-1}a_{ji}$, untuk setiap i, j. Sehingga untuk suatu i,j,k,l diperoleh $g_{ki}a_{jl} = u^{-1}\ a_{ik}a_{jl} = u^{-1}\ a_{jl}\ a_{ik} = g_{lj}\ a_{ik}$.
Jadi $(c_i r_j)^T = c_j r_i$, untuk setiap i, j. Sehingga $(HB)^T = HB$. Kemudian dengan menggunakan Lemma 2.1 diperoleh $\sum_{i,j} a_{i,j}{}^2$ *invertible* di R. ■

Teorema 2.3.
Diketahui A matriks berukuran mxn atas R dengan rank r. Pernyataan pernyataan di bawah ini ekivalen :
1. A mempunyai invers Moore Penrose.

2. $C_r(A)$ mempunyai invers Moore Penrose
3. $\sum_{\alpha,\beta} \left|A_\beta^\alpha\right|^2$ *invertible* di *R*, dengan $\alpha \subset \{1,2,\ldots m\}$; dan $\beta \subset \{1,2,\ldots,n\}$.

Selanjutnya jika *G* invers Moore Penrose dari *A*, maka *G* = $((g_{ij}))$ dengan

$$g_{ji} = \sum_{\alpha : i\in\alpha} \sum_{\beta : j\in\beta} u^{-1} \left|A_\beta^\alpha\right| \frac{\partial}{\partial a_{ij}} \left|A_\beta^\alpha\right| \text{ dan}$$

$$u = \sum_{\alpha,\beta} \left|A_\beta^\alpha\right|^2$$

Bukti.

$1 \Rightarrow 2$.

Misal G adalah invers Moore Penrose dari A. Denganmenggunakan sifat matriks Compound yang diberikan oleh *Prosolov* maka C_r(G) adalah invers Moore Penrose dari C_r(A).

$2 \Rightarrow 3$.

Dengan menggunakan teorema 3 diperoleh A mempunyai invers Moore Penrose. ■

3. PENUTUP

Jika A adalah matriks atas Daerah Integral yang mempunyai faktorisasi rank, maka:

1. Invers Moore Penrose dari A dapat diperoleh melalui faktorisasi ranknya
2. A mempunyai Invers Moore Penrose jika dan hanya jika matriks Compoundnya juga mempunyai invers Moore Penrose.

4. DAFTAR PUSTAKA

[1] Ayres F., *Linear Algebra*, Mc Graw – Hill,Inc.,United State of America.

[2] Bapat, R.B., Bhaskara Rao, K.P.S., Mayunata, K. (1990), *Generalized Over Integral Domain*, Elsevier Science Publishing Co.Inc , New York.

[3] Brown W.C. (1993), *Matrices Over Commutative Rings* ,Marcel Dekker, Inc. New York.

[4] Fraleigh J.B.(1994), *A First course in Abstract Algebra*, Fourth edition, Addison Wesley Co.Inc.,New York.