

**PENENTUAN DISTRIBUSI RATAAN  
DAN VARIABILITAS PROSES PADA  
PENGENDALIAN MUTU MULTIVARIAT**



*Oleh :*

**Drs. Sudarno, MSi**

**Jurusan Matematika  
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam  
Universitas Diponegoro  
Semarang**

**2005**

UPT-PUSTAK-UNDIP	
No. Daft:	209/KI/PM/199/K1
Tgl.	24-3-06

# PENENTUAN DISTRIBUSI RATAAN DAN VARIABILITAS PROSES PADA PENGENDALIAN MUTU MULTIVARIAT

**Sudarno**  
**Jurusan Matematika FMIPA UNDIP**

## **Abstrak**

Grafik pengendalian mutu multivariat merupakan perluasan dari grafik pengendalian mutu univariat. Ditemukan produk yang dihasilkan oleh pabrik mempunyai dua atau lebih karakteristik mutu yang harus diuji. Untuk menguji distribusi proses produksi sudah terkendali secara statistik atau belum, dapat menggunakan grafik pengendali Hotelling  $T^2$ , sedangkan untuk menguji variabilitasnya menggunakan grafik pengendali |S|. Dalam tulisan ini dibatasi pada data berkelompok dengan ukuran sampel konstan, dan grafik pengendali untuk kelompok variabel. Statistik uji yang dipergunakan adalah batas pengendali atas, Sedangkan untuk menguji salah satu karakteristik mutu yang di luar batas pengendali, menggunakan interval pengendali individu, serta statistik |S| dipergunakan untuk mengetahui ukuran dispersi proses.

**Kata kunci:** Distribusi Hotelling  $T^2$ , Grafik Pengendali Hotelling, Grafik Pengendali |S|.

## **1. PENDAHULUAN**

Proses produksi yang baik akan menghasilkan produk yang bermutu tinggi. Produk yang bermutu tinggi akan disenangi oleh konsumen. Sehingga pabrik maupun produknya akan tetap eksis. Untuk mengetahui apakah proses produksi sudah baik atau belum dapat menggunakan uji grafik pengendali mutu. Jika dalam uji grafik pengendali mutu, sebarannya dinyatakan terkendali. Maka proses produksi tersebut dikatakan sudah terkendali secara statistik. Sehingga produk yang dihasilkan akan memenuhi standar mutu yang ditentukan (Montgomery, 2001). Sedang dalam Mahajan (1995), dikatakan bahwa proses produksi akan terkendali secara statistik jika semua titik sampel terletak di dalam batas pengendali, sebarannya acak atau tidak membentuk tren.

Grafik pengendali rata-rata dipergunakan untuk menguji proses produksi yang mempunyai karakteristik mutu berjenis variabel. Dalam penerapannya berpasangan dengan grafik pengendali jangkauan atau simpangan baku, supaya hasil analisisnya lebih akurat. Jumlah karakteristik mutu yang diuji hanya satu dengan ukuran sampel konstan atau bervariasi. Pengembangan grafik ini adalah grafik yang dipergunakan untuk menguji dua atau lebih karakteristik mutu jenis variabel dalam suatu produk, dengan ukuran sampel konstan dan berpasangan. Grafik ini adalah grafik pengendali Hotelling

$T^2$ . Selain itu perluasan sebaran antar nilai pengamatan dan antar karakteristik mutu mempengaruhi variabilitasnya. Sehingga perlu matriks varian-kovarian (Mitra,1993). Pada Johnson (1996), dikatakan bahwa jika terdapat sampel acak dari populasi berdistribusi normal, statistik ujinya adalah  $t$ . Statistik ini ekuivalen dengan statistik  $t^2$ . Jika hal ini dikembangkan untuk kasus multivariat, statistik ujinya adalah statistik  $T^2$ , yang disebut Hotelling  $T^2$ . Sedangkan pada Montgomery (2001) dinyatakan bahwa jika terdapat sampel acak berdistribusi normal yang mempunyai karakteristik mutu multivariat, statistik ujinya adalah chi-kuadrat dan grafik pengendalinya adalah grafik pengendali chi-kuadrat. Jika pada statistiknya,  $\mu$  diganti  $\bar{\bar{X}}$  dan  $\Sigma$  diganti  $S$ , maka statistiknya adalah  $T^2$  dan grafik pengendalinya adalah grafik pengendali Hotelling  $T^2$ .

Dalam tulisan ini akan dibahas grafik pengendali multivariat Hotelling  $T^2$  untuk data kelompok, yang dipergunakan untuk menguji produk yang mempunyai dua atau lebih karakteristik mutu jenis variabel dengan ukuran sampel konstan. Untuk mengetahui proses produksi sudah terkendali atau belum, menggunakan nilai  $T^2$  dibandingkan dengan batas pengendali atas. Sedangkan untuk mengetahui karakteristik mutu mana yang di luar pengendali menggunakan interval pengendali individu. Selain itu juga dibicarakan tentang grafik pengendali variabilitas  $|S|$ , yaitu untuk mengetahui sebaran dari ukuran dispersi atau variabilitasnya.

## 2. GRAFIK PENGENDALI HOTELLING $T^2$ DAN VARIABILITAS $|S|$

### a. Grafik Pengendali Hotelling $T^2$

Misal terdapat dua buah karakteristik mutu  $X_1$  dan  $X_2$  berdistribusi bersama normal bivariat. Diasumsikan bahwa nilai rata-rata karakteristik dinyatakan masing-masing dengan  $\bar{X}_1$  dan  $\bar{X}_2$ . Jika rata-rata sampel adalah  $\bar{X}_1$  dan  $\bar{X}_2$ , dengan varian sampel  $s_1^2$  dan  $s_2^2$ , dan kovarian antara dua variable dinyatakan dengan  $s_{12}$  untuk sampel berukuran  $n$ . Maka statistik

$$T^2 = \frac{n}{(s_1^2 s_2^2 - s_{12}^2)} [s_2^2 (\bar{X}_1 - \bar{\bar{X}}_1)^2 + s_1^2 (\bar{X}_2 - \bar{\bar{X}}_2)^2 - 2s_{12} (\bar{X}_1 - \bar{\bar{X}}_1)(\bar{X}_2 - \bar{\bar{X}}_2)] \quad (1)$$

adalah berdistribusi Hotelling  $T^2$  dengan derajat bebas 2 dan  $(n - 1)$  (Hotelling, 1947). Dalam hal ini, 2 diambil dari dua buah karakteristik mutu yang dibicarakan, sedangkan  $(n - 1)$  adalah derajat bebas yang sesuai dengan varian sampel. Jika nilai hitung  $T^2$ , yang diberikan Persamaan (1) melebihi  $T^2_{\alpha, 2, n-1}$ , yaitu titik pada distribusi  $T^2$  sedemikian hingga proporsi kanan adalah  $\alpha$ , maka sekurang-kurangnya satu dari karakteristik mutu adalah keluar dari kontrol. Nilai Hotelling  $T^2$  titik persentil dapat diperoleh dari titik persentil distribusi-F dengan menggunakan relasi berikut ini:

$$T^2_{\alpha, p, (n-1)} = p \frac{(n-1)}{(n-p)} F_{\alpha, p, n-p} \quad (2)$$

dengan  $F_{\alpha, p, n-p}$  menggambarkan titik pada distribusi-F sedemikian hingga proporsi kanan adalah  $\alpha$ , dengan derajat bebas pembilang  $p$  dan derajat bebas penyebut  $(n - p)$ .

Metode pengambilan keputusan di atas dapat dipergunakan hanya dengan cara hitungan atau tabel, tetapi tidak dapat untuk cara grafik. Untuk mengatasi kekurangan ini, nilai  $T^2$  yang diberikan oleh Persamaan (1) dapat digambarkan pada grafik pengendali dari sampel demi sampel sesuai dengan urutan waktu nilai data diperoleh. Grafik pengendali demikian mempunyai satu batas pengendali atas dari  $T^2_{\alpha, p, n-1}$ , dengan  $p$  menggambarkan banyaknya karakteristik mutu. Pola giliran tidak acak dari grafik ini dapat dipergunakan untuk mengetahui proses produksi sudah terkendali secara statistik atau belum.

Jika terdapat lebih dari dua karakteristik mutu yang dibicarakan, maka nilai  $T^2$  yang disajikan menurut Persamaan (1) untuk sampel yang diberikan dapat digeneralisasi sebagai berikut:

$$T^2 = n(\bar{X} - \bar{\bar{X}})' S^{-1} (\bar{X} - \bar{\bar{X}}) \quad (3)$$

dengan  $\bar{X}$  menggambarkan vektor rata-rata sampel dari  $p$  karakteristik mutu untuk suatu sampel berukuran  $n$ ,  $\bar{\bar{X}}$  menggambarkan vektor rata-rata untuk tiap-tiap karakteristik mutu, dan  $S$  menyatakan matriks varian-kovarian dari  $p$  karakteristik mutu. Dalam praktek,  $\bar{\bar{X}}$  dan  $S$  biasanya ditaksir dari sampel bilamana proses dalam keadaan terkendali. Di bawah syarat demikian, batas pengendali atas dari grafik  $T^2$  yang

diberikan oleh Persamaan (2) dapat dimodifikasi dengan mengambil bentuk berikut ini (Alt, 1982):

$$\text{BPA} = \left( \frac{mnp - mp - np + p}{mn - m - p + 1} \right) F_{\alpha, p, (mn - m - p + 1)} \quad (4)$$

dengan  $m$  menggambarkan jumlah sampel, masing-masing berukuran  $n$ , yang dipergunakan untuk menaksir  $\bar{X}$  dan  $S$ . Nilai  $T^2$  untuk tiap-tiap dari  $m$  sampel dihitung dengan menggunakan Persamaan (3). Jika nilai  $T^2$  untuk sampel ke- $j$ , yaitu  $T_j^2$  di atas batas pengendali atas, ini menandakan terdapat titik di luar pengendali, dan pada sampel ini perlu dilakukan penyelidikan sebab-sebab terduga pada proses produksi yang menghasilkan data dari sampel tersebut.

Untuk dapat menghitung  $T_j^2$ , diperlukan vektor rata-rata sampel diberikan dengan

$$\bar{X}_j = \begin{bmatrix} \bar{X}_{1j} \\ \bar{X}_{2j} \\ \vdots \\ \bar{X}_{pj} \end{bmatrix}, \quad j = 1, 2, \dots, m$$

dengan  $\bar{X}_{ij}$  mewakili rata-rata sampel dari karakteristik mutu ke- $i$  untuk sampel ke- $j$  dan

$$\bar{X}_{ij} = \frac{\sum_{k=1}^n X_{ijk}}{n}, \quad \begin{cases} i = 1, 2, \dots, p \\ j = 1, 2, \dots, m \end{cases} \quad (5)$$

dengan  $X_{ijk}$  menggambarkan nilai pengamatan ke- $k$  dari karakteristik mutu ke- $i$  dalam sampel ke- $j$ . Varian sampel untuk karakteristik mutu ke- $i$  dalam sampel ke- $j$  diberikan dengan

$$s_{ij}^2 = \frac{1}{(n-1)} \sum_{k=1}^n (X_{ijk} - \bar{X}_{ij})^2, \quad \begin{cases} i = 1, 2, \dots, p \\ j = 1, 2, \dots, m \end{cases} \quad (6)$$

Kovarian antara karakteristik mutu  $i$  dan  $h$  dalam sampel ke- $j$  dihitung dari

$$s_{ihj} = \frac{1}{(n-1)} \sum_{k=1}^n (X_{ijk} - \bar{X}_{ij})(X_{ihk} - \bar{X}_{hj}), \quad \begin{cases} j = 1, 2, \dots, m \\ i \neq h \end{cases} \quad (7)$$

Vektor rata-rata nominal dari tiap-tiap karakteristik mutu untuk  $m$  sampel ditaksir dengan

$$\bar{\bar{X}}_i = \frac{\sum_{j=1}^m \bar{X}_{ij}}{m}, \quad i = 1, 2, \dots, p \quad (8)$$

Anggota dari matriks varian-kovarian sampel  $S$  dalam Persamaan (3) ditaksir dari rata-rata untuk  $m$  sampel berikut ini:

$$s_i^2 = \frac{\sum_{j=1}^m s_{ij}^2}{m}, \quad i = 1, 2, \dots, p \quad (9)$$

dan

$$s_{ih} = \frac{\sum_{j=1}^m s_{ihj}}{m}, \quad i \neq h \quad (10)$$

Akhirnya, vektor  $\bar{X}$  dapat ditaksir dengan menggunakan anggota  $\{\bar{X}_i\}$ , dan matriks  $S$  dapat ditaksir sebagai berikut (hanya bagian diagonal atas yang ditunjukkan karena merupakan matriks simetris):

$$S = \begin{bmatrix} s_1^2 & s_{12} & \dots & s_{1p} \\ & s_2^2 & \dots & s_{2p} \\ & & \vdots & \vdots \\ & & & s_p^2 \end{bmatrix} \quad (11)$$

Penggunaan dari matriks ini pada Persamaan (3) dengan mencari matriks inversnya, yaitu  $S^{-1}$ .

Jika dengan grafik pengendali Hotelling diperoleh hasil bahwa proses di luar pengendali secara statistik, maka untuk mengetahui karakteristik mutu mana yang menyebabkan proses tidak terkendali. Dapat menggunakan interval pengendali individu pada sampel tersebut, yaitu apakah nilai rata-rata karakteristik mutu berada di dalam atau di luar interval tersebut. Jika berada di luar interval pengendali individu, maka dapat dikatakan bahwa karakteristik mutu itu yang menyebabkan proses tidak terkendali secara statistik. Jika peluang kesalahan Tipe I untuk prosedur pengendali bersama adalah  $\alpha$ , maka untuk sampel  $j$ , interval pengendali individu untuk karakteristik mutu ke- $i$  adalah

$$\bar{X}_i \pm t_{\alpha/2p, m(n-1)} s_i \sqrt{\frac{m-1}{mn}}, \quad i = 1, 2, \dots, p \quad (12)$$

dengan  $\bar{X}_i$  dan  $s_i^2$  masing-masing diberikan dari Persamaan (8) dan (9). Jika  $\bar{X}_i$  jatuh di luar interval ini, maka karakteristik mutu ini dapat dikatakan yang menyebabkan proses tidak terkendali secara statistik.

**b. Grafik Pengendali Variabilitas |S|**

Untuk mengetahui variabilitas dari proses produksi ini, dapat disarikan ke dalam matriks varian-kovarian populasi  $\Sigma$  yang berukuran  $p \times p$ . Pada matriks tersebut elemen diagonal utama adalah varian populasi dari variabel proses individu, sedangkan elemen lainnya merupakan kovarian populasi dari variabel proses individu. Menurut Alt(1985) diperkenalkan bahwa untuk mengetahui variabilitas proses dapat menggunakan varian generalisasi sampel, |S|. Statistik ini adalah determinan dari matriks varian-kovarian sampel. Untuk dapat membuat grafik pengendali |S|, maka perlu menentukan rata-rata dan ragamnya. Supaya dapat mengetahui batas-batas pengendali.

Rataan dan ragam dari |S|, masing-masing adalah

$$E(|S|) = b_1 |\Sigma| \tag{13}$$

$$V(|S|) = b_2 |\Sigma|^2 \tag{14}$$

dengan

$$b_1 = \frac{1}{(n-1)^p} \prod_{i=1}^p (n-i) \tag{15}$$

dan

$$b_2 = \frac{1}{(n-1)^{2p}} \prod_{i=1}^p (n-i) \left[ \prod_{j=1}^p (n-j+2) - \prod_{j=1}^p (n-j) \right] \tag{16}$$

Oleh karena itu batas-batas grafik pengendali |S| adalah

$$\begin{aligned} BPA &= |\Sigma| (b_1 + 3 b_2^{1/2}) \\ GT &= b_1 |\Sigma| \\ BPB &= |\Sigma| (b_1 - 3 b_2^{1/2}) \end{aligned} \tag{17}$$

Jika BPB bernilai negatif, maka nilainya diambil nol. Dalam praktek, biasanya  $\Sigma$  ditaksir dengan matriks varian-kovarian sampel  $S$ . Karena  $|S| / b_1$  merupakan penaksir tak bias dari  $|\Sigma|$ , maka  $|\Sigma| = |S| / b_1$ .

### 3. PEMBAHASAN

Produk dengan dua karakteristik mutu jenis variabel akan diuji kualitasnya berdasarkan statistiknya. Karakteristik mutunya adalah daya rentang ( $X_1$ ) dan diameter ( $X_2$ ). Untuk pengujian ini diambil dua puluh sampel dengan ukuran sampel adalah empat dari proses produksi. Setiap komponen yang terambil, diukur sekaligus daya rentang dan diameternya. Ingin diketahui apakah proses produksi sudah terkendali secara statistik atau belum dengan menggunakan grafik pengendali multivariat Hotelling  $T^2$  dan grafik pengendali variabilitas  $|S|$ . Adapun datanya disajikan dalam Tabel 1, berikut ini:

**Tabel 1.** Data Produk tentang Daya Rentang dan Diameter

Nomor Sampel	Daya Rentang	Diameter
1	66 70 68 72	16 18 15 20
2	75 60 70 75	17 22 18 19
3	65 70 70 65	20 18 15 18
4	72 70 75 65	19 20 15 17
5	73 74 72 70	21 21 23 19
6	72 74 73 74	21 19 20 18
7	63 62 65 66	22 20 24 22
8	75 84 75 66	22 20 20 22
9	65 69 77 71	18 16 18 18
10	70 68 67 67	18 17 19 18
11	80 75 70 69	24 18 20 22
12	68 65 80 50	20 21 20 22
13	74 80 76 74	19 17 20 21
14	76 74 75 73	20 17 18 18
15	71 70 74 73	18 16 17 18
16	68 67 70 69	18 16 19 20
17	72 76 75 77	22 19 23 20
18	76 74 75 77	19 23 20 21
19	72 74 73 75	20 18 20 19
20	72 68 74 70	21 19 18 20

#### a. Distribusi Rataan Proses

Untuk mengetahui distribusi rata-rata proses perlu nilai  $T^2$ . Dengan cara menghitung masing-masing nilai pada rata-rata sampel, varian sampel dan kovarian sampel. Untuk rata-rata sampel, dihitung rata-rata tiap sampel,  $j=1, 2, \dots, 20$  dari daya rentang, yaitu  $\bar{X}_{1j}$  dan diameter, yaitu  $\bar{X}_{2j}$  menggunakan Persamaan (5). Selanjutnya dihitung rata-rata sampel masing-masing  $\bar{\bar{X}}_i$ ,  $i=1, 2$  menggunakan Persamaan (8). Sedangkan untuk varian sampel, dihitung varian tiap sampel,  $j=1, 2, \dots, 20$  dari daya rentang, yaitu  $s_{1j}^2$  dan diameter, yaitu  $s_{2j}^2$  menggunakan Persamaan (6). Selanjutnya



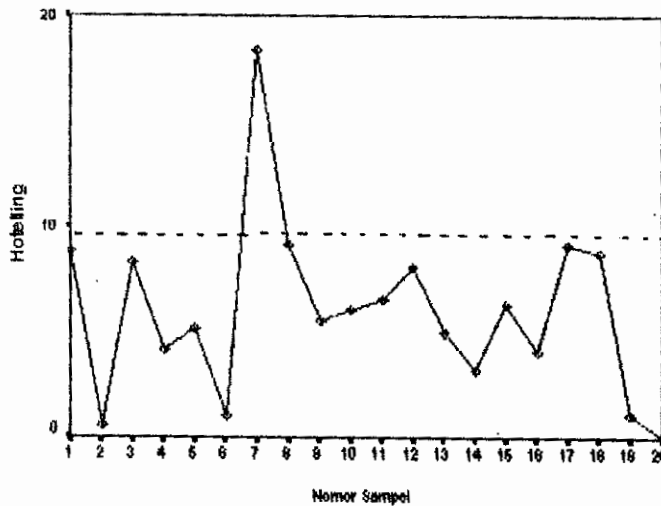
dihitung rata-rata varian sampel masing-masing  $s_i^2$ ,  $i = 1, 2$  menggunakan Persamaan (9). Kemudian dihitung kovarian tiap sampel dari daya rentang dan diameter, yaitu  $s_{12j}$ ,  $j = 1, 2, \dots, 20$  menggunakan Persamaan (7). Selanjutnya dihitung rata-rata kovarian sampel  $s_{12}$ , menggunakan Persamaan (10). Akhirnya, nilai  $T_j^2$ ,  $j = 1, 2, \dots, 20$  dapat dihitung menggunakan Persamaan (1). Adapun hasil dari perhitungan di atas dapat disajikan dalam Tabel 2, di bawah ini:

**Tabel 2.** Data untuk membentuk Grafik Hotelling  $T^2$

Nomor Sampel	Rataan Sampel		Varian Sampel		Kovarian Sampel	Hotelling
	Daya Rentang	Diameter				
j	$\bar{X}_{1j}$	$\bar{X}_{2j}$	$s_{1j}^2$	$s_{2j}^2$	$s_{12j}$	$T^2$
1	69,00	17,25	6,67	4,92	5,00	8,87
2	70,00	19,00	50,00	4,67	-13,33	0,59
3	67,50	17,75	8,33	4,25	-4,17	8,35
4	70,50	17,75	17,67	4,92	-2,50	4,19
5	72,25	21,00	2,92	2,67	1,33	5,17
6	73,25	19,50	0,92	1,67	-1,17	1,04
7	64,00	22,00	3,33	2,67	2,00	18,34
8	75,00	21,00	54,00	1,33	-6,00	9,21
9	70,50	17,50	25,00	1,00	1,00	5,55
10	68,00	18,00	2,00	0,67	-0,33	6,06
11	73,50	21,00	25,67	6,67	4,67	6,59
12	65,75	20,75	152,25	0,92	-10,75	8,09
13	76,00	19,25	8,00	2,92	-4,00	4,94
14	74,50	18,25	1,67	1,58	1,17	3,23
15	72,00	17,25	3,33	0,92	0,67	6,34
16	68,50	18,25	1,67	2,92	1,83	4,14
17	75,00	21,00	4,67	3,33	-2,33	9,21
18	75,50	20,75	1,67	2,92	-1,17	8,81
19	73,50	19,25	1,67	0,92	-0,83	1,09
20	71,00	19,50	6,67	1,67	-0,67	0,07
Rataan	71,26	19,30	18,90	2,68	-1,48	

Untuk perhitungan selanjutnya, dihitung nilai batas pengendali atas (BPA) berdasarkan Persamaan (4). Dari kasus ini, jika diambil  $\alpha = 0,01$  didapat nilai batas pengendali atas adalah 9,62. Berdasarkan nilai batas pengendali atas ini dan Tabel 2, terlihat bahwa pada nomor sampel ke-7, mempunyai nilai  $T^2 = 18,34$  lebih besar dari BPA = 9,62. Dengan kondisi seperti ini dapat dikatakan bahwa proses produksi tidak terkendali secara statistik, karena terdapat titik di luar batas pengendali atas.

Jika disajikan menurut grafik, maka grafik pengendali multivariat Hotelling  $T^2$  digambarkan sebagai berikut:



Gambar 1. Grafik pengendali Hotelling  $T^2$ .

Terlihat dalam Gambar 1, bahwa nomor sampel ke-7 berada di atas batas pengendali atas. Hal ini menyatakan proses produksi tidak terkendali secara statistik, dengan cara penyajian dalam bentuk gambar.

Untuk mengetahui karakteristik mutu mana yang menyebabkan proses tidak terkendali, selanjutnya dihitung interval pengendali individu pada daya rentang dan diameter produk, menggunakan Persamaan (12). Dengan mengambil  $\alpha = 0,01$ , didapat interval pengendali individu masing-masing untuk daya rentang dan diameter adalah (64,87 ; 77,65) dan (16,89 ; 21,71). Dari hasil ini terlihat bahwa nilai rata-rata pada sampel ke-7 baik daya rentang maupun diameter terletak di luar interval tersebut. Maka dapat disimpulkan bahwa kedua karakteristik mutu tersebut belum terkendali, sehingga perlu dikontrol lagi sampai didapat proses produksi terkendali secara statistik.

#### b. Distribusi Variabilitas Proses

Untuk mengetahui distribusi variabilitas proses perlu mendapatkan nilai  $|S|$ . Berdasarkan kelanjutan dari nilai-nilai yang telah didapat pada Tabel 2, di atas, telah didapat nilai-nilai dari  $s_{1j}^2$ ,  $s_{2j}^2$ , dan  $s_{12j}$ . Selanjutnya disusun matriks varian-kovarian  $S$  seperti pada Persamaan (11), untuk tiap-tiap nomor sampel. Setelah itu hitung

determinannya  $|S|$ , juga untuk setiap nomor sampel. Akhirnya, diperoleh nilai  $|S|$  untuk  $j = 1, 2, \dots, 20$ . Adapun hasil dari perhitungan di atas dapat disajikan dalam Tabel 3, di berikut ini:

Tabel 3. Data untuk membentuk Grafik Variabilitas  $|S|$

Nomor Sampel	Rataan Sampel		Varian Sampel		Kovarian Sampel	Variabilitas
	Daya Rentang	Diameter	$s_{1j}^2$	$s_{2j}^2$		
$j$	$\bar{X}_{1j}$	$\bar{X}_{2j}$	$s_{1j}^2$	$s_{2j}^2$	$s_{12j}$	$ S $
1	69,00	17,25	6,67	4,92	5,00	7,82
2	70,00	19,00	50,00	4,67	-13,33	22,31
3	67,50	17,75	8,33	4,25	-4,17	18,01
4	70,50	17,75	17,67	4,92	-2,50	80,69
5	72,25	21,00	2,92	2,67	1,33	6,03
6	73,25	19,50	0,92	1,67	-1,17	0,17
7	64,00	22,00	3,33	2,67	2,00	4,89
8	75,00	21,00	54,00	1,33	-6,00	35,82
9	70,50	17,50	25,00	1,00	1,00	24,00
10	68,00	18,00	2,00	0,67	-0,33	1,23
11	73,50	21,00	25,67	6,67	4,67	149,41
12	65,75	20,75	152,25	0,92	-10,75	24,51
13	76,00	19,25	8,00	2,92	-4,00	7,36
14	74,50	18,25	1,67	1,58	1,17	1,27
15	72,00	17,25	3,33	0,92	0,67	2,62
16	68,50	18,25	1,67	2,92	1,83	1,53
17	75,00	21,00	4,67	3,33	-2,33	10,12
18	75,50	20,75	1,67	2,92	-1,17	3,51
19	73,50	19,25	1,67	0,92	-0,83	0,85
20	71,00	19,50	6,67	1,67	-0,67	10,69
Rataan	71,26	19,30	18,90	2,68	-1,48	

Untuk perhitungan selanjutnya, akan dihitung batas-batas pengendali. Sebelum mendapatkan batas-batas tersebut, perlu ditentukan dahulu nilai  $b_1$  dan  $b_2$ , masing-masing menggunakan Persamaan (15), dan (16). Hasilnya didapat

$$b_1 = \frac{1}{(4-1)^2} \prod_{i=1}^2 (4-i) = 0,6667 \text{ dan}$$

$$b_2 = \frac{1}{(4-1)^4} \prod_{i=1}^2 (4-i) \left[ \prod_{i=1}^2 (n-j+2) - \prod_{j=1}^2 (n-j) \right] = 1,037.$$

Selain itu juga matriks varian-kovarian sampel

$$S = \begin{bmatrix} 18 & -1,48 \\ -1,48 & 2,68 \end{bmatrix}, \text{ dan } |S| = 48,4616, \text{ akibatnya nilai } |\Sigma| = 72,69. \text{ Sehingga}$$

batas-batas pengendali dapat ditentukan berdasarkan Persamaan (17), hasilnya adalah

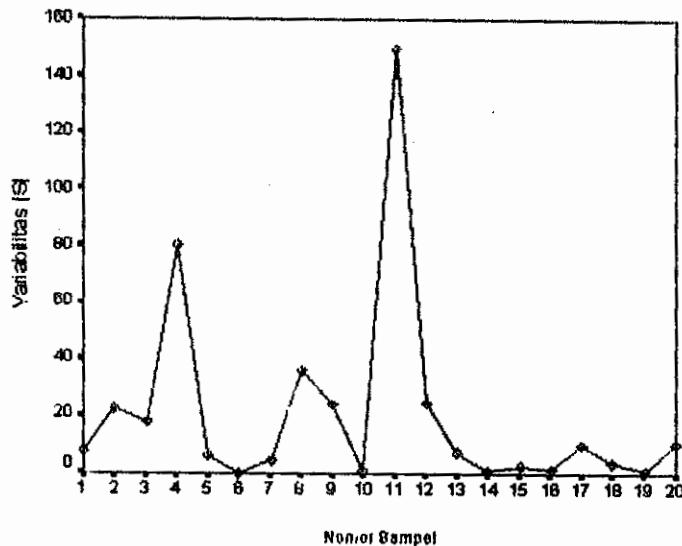
$$BPA = 72,69 [ 0,6667 + 3 (1,037)^{0,5} ] = 270,53$$

$$GT = 48,4616$$

$$BPB = 0$$

Berdasarkan nilai batas-batas pengendali ini dan Tabel 3, terlihat bahwa semua titik sampel lebih kecil dari BPA. Dengan hasil seperti ini dapat dikatakan bahwa variabilitas proses produksi terkendali secara statistik.

Jika disajikan menurut grafik, maka grafik pengendali variabilitas |S| dapat digambarkan sebagai berikut:



Gambar 2. Grafik pengendali Variabilitas |S|.

Terlihat dalam Gambar 2, bahwa distribusi dari setiap titik sampel di bawah 270,53. Hal ini menyatakan bahwa variabilitas proses produksi terkendali secara statistik, dengan cara penyajian dalam bentuk gambar.

#### 4. KESIMPULAN

Grafik pengendali multivariate Hotelling  $T^2$  merupakan perluasan dari grafik pengendali rata-rata. Dalam grafik pengendali Hotelling  $T^2$  batas pengendalinya menggunakan batas pengendali atas. Untuk mengetahui proses produksi sudah terkendali atau belum, menggunakan dasar ada tidaknya sampel yang nilainya melampaui batas pengendali atas. Jika terdapat sampel yang melampaui batas

pengendali atas, maka dapat dicari karakteristik mutu mana yang menyebabkan tidak terkendali, dengan menggunakan interval pengendali individu.

Dalam pembahasan tulisan ini didapat hasil bahwa distribusi rata-rata proses belum terkendali tetapi distribusi variabilitas proses sudah terkendali. Maka proses produksi dikatakan masih belum terkendali secara statistik. Karena masih terdapat kejadian yang belum terkendali.

#### DAFTAR PUSTAKA

1. Alt, F.B., *Multivariate Quality Control: State of the Art*, American Society for Quality Control Annual Quality Congress Transaction, pp. 886 – 893, 1982.
2. Alt, F.B., *Multivariate Quality Control: in Encyclopedia of Statistical Sciences*, Vol.6, edited by N.L. Johnson and S. Kotz, Wiley, New York, 1985.
3. Hotelling, H., *Multivariate Quality Control*, in C. Eisenhart, M. W. Hastny, and W. A. Wallis, Eds., *Techniques of Statistical Analysis*, McGraw Hill, New York, 1947.
4. Jhonson, R.A., and Wichern, D.W., *Applied Multivariate Statistical Analysis*, Third Edition, Prentice-Hall of India Private Limited, New Delhi, 1996.
5. Mahajan, M., *Statistical Quality Control*, Dhanpat Rai & Sons, Delhi, 1995.
6. Mitra, A., *Fundamentals of Quality Control and Improvement*, Macmilan Publishing Company, New York, 1993.
7. Montgomery, D.C., *Introduction to Statistical Quality Control*, Fourth Edition, John Wiley & Sons, Inc., New York, 2001.
8. Santoso, S., *Mengolah Data Statistik Secara Profesional*, PT Gramedia, Jakarta, 1999.
9. Sudarno, *Grafik Pengendali Multivariat Hotelling  $T^2$  untuk Data Kelompok*, Prosiding: Seminar Nasional Matematika X, Jurusan Matematika FMIPA UNDIP, Semarang, 2005.