GRAF FUZZY *M-STRONG*

SKRIPSI

Oleh :

Rika Juwita Sari

J2A 006 046

PROGRAM STUDI MATEMATIKA JURUSAN MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS DIPONEGORO

SEMARANG

2010

GRAF FUZZY *M-STRONG*

Rika Juwita Sari

J2A 006 046

Skripsi

Diajukan sebagai syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains

pada

Program Studi Matematika

PROGRAM STUDI MATEMATIKA JURUSAN MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS DIPONEGORO

SEMARANG

2010

HALAMAN PENGESAHAN

Judul : GRAF FUZZY *M-STRONG*

Nama : Rika Juwita Sari

NIM : J2A 006 046

Telah diujikan pada sidang Tugas Akhir tanggal 30 Juli 2010 dan dinyatakan **lulus** pada tanggal Agustus 2010.

Semarang, Agustus 2010
Panitia Penguji Tugas Akhir
Ketua,

Dra. Titi Udjiani SRRM, M.Si
NIP. 1964 02 23 1991 02 2 001

Mengetahui,	Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika	Ketua Program studi Matematika
FMIPA UNDIP	Jurusan Matematika FMIPA
Dr. Widowati, S.Si, M.Si	Bambang Irawanto, S.Si, M.Si
NIP. 1969 02 14 1994 03 2 002	NIP. 1967 07 29 1994 03 1 001

HALAMAN PENGESAHAN

Judul : GRAF FUZZY *M-STRONG*

Nama : Rika Juwita Sari

NIM : J2A 006 046

Telah diujikan pada sidang Tugas Akhir tanggal 30 Juli 2010.

Semarang, Agustus 2010

Pembimbing Utama	Pembimbing Anggota
Drs. Bayu Surarso, M.Sc, Ph.D	Bambang Irawanto, S.Si, M.Si
NIP. 1963 11 05 1988 03 1 001	NIP. 1967 07 29 1994 03 1 001

KATA PENGANTAR

Puji Syukur penulis panjatkan kehadirat Tuhan Yang Maha Esa yang telah melimpahkan rahmat dan hidayah-Nya sehingga penulis dapat menyusun tugas akhir yang berjudul **" Graf Fuzzy *M-Strong* "**. Tugas akhir ini disusun sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar sarjana strata satu pada Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Diponegoro Semarang.

Banyak pihak yang telah membantu menyelesaikan Tugas Akhir ini. Oleh karena itu, rasa hormat dan terima kasih penulis sampaikan kepada :

1. Dr. Widowati, S.Si, M.Si selaku Ketua Jurusan Matematika FMIPA UNDIP.
2. Bambang Irawanto, S.Si, M.Si selaku Ketua Program Studi Matematika FMIPA UNDIP dan dosen pembimbing II.
3. Drs. Bayu Surarso, M.Sc, Phd selaku dosen pembimbing I yang dengan sabar membimbing dan mengarahkan penulis hingga selesainya Tugas Akhir ini.
4. Bapak dan Ibu dosen Jurusan Matematika FMIPA UNDIP, yang telah memberikan ilmu pengetahuan kepada penulis.
5. Semua pihak yang telah memberikan dukungan serta bantuan kepada penulis dalam menyelesaikan Tugas Akhir ini.

Penulis menyadari bahwa Tugas Akhir ini masih jauh dari sempurna. Oleh karena itu kritik dan saran yang bersifat membangun sangat penulis harapkan. Semoga Tugas Akhir ini bermanfaat bagi semua.

Semarang,   Juli 2010

Penulis

ABSTRAK

Graf fuzzy *M-strong* adalah graf fuzzy kuat (*strong*) yang diperkenalkan oleh Mordeson dan Peng. Pada operasi graf fuzzy, dipelajari bahwa jika terdapat dua graf fuzzy *M-strong* G_1 dan G_2 maka join $G_1 + G_2$ adalah juga *M-strong*. Jika *cartesian product* $G_1 \times G_2$ dan komposisi $G_1[G_2]$ adalah *M-strong* maka G_1 atau G_2 adalah *M-strong*. Misalkan G^C adalah komplemen dari suatu graf fuzzy, dibuktikan bahwa $G = G^{C^C}$ jika G adalah graf fuzzy *M-strong*. Selanjutnya dipelajari juga mengenai subgraf fuzzy parsial *M-strong*, dan diperoleh bahwa join dari dua subgraf fuzzy parsial *M-strong* tersebut adalah *M-strong*. Diperoleh juga bahwa subgraf fuzzy *full spanning* dari graf fuzzy *M-strong* adalah *M-strong*.

Kata kunci : graf fuzzy *M-strong*, subgraf fuzzy parsial, subgraf fuzzy *full spanning*

ABSTRACT

M-strong fuzzy graph is a strong fuzzy graph which were introduced by Mordeson and Peng. In operation of fuzzy graph we study if there are two M-strong fuzzy graphs G_1 and G_2, then join $G_1 + G_2$ is also M-strong. If cartesian product $G_1 \times G_2$ and composition $G_1[G_2]$ is M-strong then at least G_1 or G_2 is M-strong. Let G^C is complement a fuzzy graph, we get that $G = G^{C^C}$ if G is a M-strong fuzzy graph. We also study about M-strong partial fuzzy subgraph, and we get that join from two M-strong partial fuzzy subgraphs is M-strong. And also we get full spanning fuzzy subgraph from a M-strong fuzzy graph is also M-strong.

Keywords : M-strong fuzzy graph, partial fuzzy subgraph, full spanning fuzzy subgraph.

DAFTAR ISI

DAFTAR SIMBOL

$\sigma(x)$	: derajat keanggotaan himpunan kabur A dalam pemetaan σ
$f : S \to T$	: f memetakan S ke T
$\wedge$	: meet
$\vee$	: join
$G : (\sigma, \mu)$	: graf fuzzy dengan himpunan titik σ dan himpunan garis μ
G^C	: komplemen dari graf G
G^{C^C}	: komplemen dari graf G^C
$G_1 \cup G_2$	: gabungan dari graf G_1 dan G_2
$G_1 + G_2$	: join dari graf G_1 dan G_2
$G_1 \times G_2$	: cartesian product dari graf G_1 dan G_2
$G_1[G_2]$	: komposisi dari graf G_1 dan G_2
$V_1 \backslash V_2$	: himpunan titik yang terdapat dalam V_1 tetapi tidak terdapat dalam V_2
$V_2 \backslash V_1$	: himpunan titik yang terdapat dalam V_2 tetapi tidak terdapat dalam V_1
$X_1 \backslash X_2$	: himpunan garis yang terdapat dalam X_1 tetapi tidak terdapat dalam X_2
$X_2 \backslash X_1$	: himpunan garis yang terdapat dalam X_2 tetapi tidak terdapat dalam X_1

DAFTAR GAMBAR

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Teori graf merupakan salah satu ilmu yang dibahas dalam matematika yang mempelajari himpunan titik dan himpunan garis. Suatu graf merupakan diagram yang terdiri dari noktah-noktah tidak kosong yang disebut titik (*vertex*) dan dihubungkan oleh garis yang disebut sisi (*edge*).

Salah satu sub dari graf adalah graf fuzzy. Graf fuzzy diperkenalkan oleh Rosenfeld. Pada tugas akhir ini dipelajari suatu materi graf fuzzy yang disebut graf fuzzy *M-strong*. Untuk menghindari kebingungan dengan busur kuat yang diperkenalkan oleh Bhutani dan Rosenfeld [4], graf fuzzy kuat disini dinamakan graf fuzzy *M-strong* karena graf fuzzy strong atau kuat ini pertama kali diperkenalkan oleh Mordeson dan Peng [2].

Telah dipelajari sebelumnya pada Tugas Akhir Tina Anggita Novia [7] mengenai operasi-operasi pada graf, dan juga pada graf fuzzy, disini dipelajari bagaimana sifat graf fuzzy *M-strong* ketika dioperasikan. Komplemen graf fuzzy yang telah dibahas pada tugas akhir Tina Anggita Novia dilengkapi dengan definisi dan proposisi yang belum dibahas sebelumnya.

Subgraf merupakan bagian dari suatu graf. Disini dipelajari mengenai subgraf fuzzy parsial *M-strong* dan subgraf fuzzy *full spanning M-strong*.

1.2 Permasalahan

Permasalahan yang dibahas dalam tugas akhir ini adalah mengenai:

1. Operasi join, cartesian product dan komposisi pada graf fuzzy *M-strong*.
2. Komplemen graf fuzzy *M-strong*.
3. Operasi join pada subgraf fuzzy parsial *M-strong*.
4. Subgraf fuzzy *full spanning* dari graf fuzzy *M-strong*.

1.3 Pembatasan Masalah

Graf yang dibahas pada tugas akhir ini hanya pada graf sederhana dan graf terbatas.

1.4 Tujuan Penulisan

Tujuan dari Tugas Akhir ini adalah :

1. Mempelajari pengertian graf fuzzy *M-strong* yang diperkenalkan oleh Mordeson dan Peng.
2. Mempelajari operasi-operasi pada graf fuzzy *M-strong*.
3. Mempelajari komplemen graf fuzzy *M-strong*.
4. Mempelajari subgraf fuzzy parsial dan subgraf fuzzy *full spanning*.

1.5 Sistematika Penulisan

Sistematika penulisan yang digunakan penulisan tugas akhir ini adalah:

1. Bab I adalah Pendahuluan, yang berisi tentang Latar Belakang, Permasalahan, Pembatasan Masalah, Tujuan Penulisan dan Sistematika Penulisan.
2. Bab II adalah Teori Penunjang. Pada bab ini berisi tentang teori-teori yang mendukung pembahasan pada bab III, diantaranya : Himpunan, Pengertian Fungsi dan Graf.
3. Bab III adalah Pembahasan. Pada bab pembahasan ini dibahas mengenai Pengertian Graf Fuzzy *M-strong* menurut Mordeson dan Peng, Operasi join, Cartesian product dan Komposisi pada Graf Fuzzy *M-strong*, Komplemen Graf Fuzzy *M-strong* dan mengenai subgraf fuzzy parsial dan subgraf fuzzy *full spanning*.
4. Bab IV adalah Penutup yang berisi kesimpulan dari yang telah dipelajari pada Bab III.

BAB II

TEORI PENUNJANG

2.1 Himpunan

Himpunan didefinisikan sebagai suatu kumpulan obyek-obyek yang mempunyai kesamaan sifat tertentu. Suatu himpunan haruslah terdefinisi secara tegas, dalam arti bahwa untuk setiap obyek selalu dapat ditentukan secara tegas apakah obyek tersebut merupakan anggota himpunan tersebut atau tidak. Dengan kata lain, untuk setiap himpunan terdapat batas yang tegas antara obyek-obyek yang merupakan anggota dan obyek-obyek yang tidak merupakan anggota dari himpunan itu. Oleh karenanya himpunan semacam itu seringkali disebut himpunan tegas *(crisp set)*. Kemudian teori himpunan mulai berkembang, pada tahun 1965 Profesor Zadeh memperluas teori himpunan tegas *(crisp set)* menjadi himpunan kabur *(fuzzy set)*. Himpunan kabur adalah suatu himpunan yang derajat keanggotaannya menunjukkan suatu variabel tidak hanya bernilai benar atau salah, tetapi terdapat nilai.

2.1.1 Himpunan Tegas [4]

Himpunan tegas adalah himpunan yang terdefinisi secara tegas, artinya bahwa untuk setiap elemen dalam semestanya selalu dapat ditentukan secara tegas apakah elemen tersebut merupakan anggota dari himpunan tersebut atau tidak.

Dengan kata lain, suatu himpunan tegas A dalam semesta X dapat didefinisikan dengan menggunakan suatu fungsi $\chi : X \to \{0,1\}$, yang disebut fungsi karakteristik dari himpunan *A*, dimana untuk setiap $x \in X$

$$\chi(x) = \begin{cases} 1 & untuk \quad x \in A \\ 0 & untuk \quad x \notin A \end{cases}$$

Selanjutnya nilai dari $\chi(x)$ menyatakan derajat keanggotaan dalam himpunan *A*.

Contoh 2.1 :

Misalkan himpunan $A = \{a, b, c, d, e\}$,

sehingga $b \in A$, $m \notin A$ dan $\chi(b) = 1$, $\chi(m) = 0$.

Definisi 2.1 [6]

Jika setiap elemen himpunan A merupakan elemen himpunan B maka A dikatakan sebagai himpunan bagian (*subset*) dari B dan dinotasikan $A \subseteq B$.

Definisi 2.2 [3]

Gabungan dua buah himpunan A dan B, dinyatakan dengan $A \cup B$, adalah himpunan semua elemen *A* atau *B* :

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \; atau \; x \in B\}$$

Irisan dua buah himpunan A dan B, dinyatakan dengan $A \cap B$, adalah himpunan yang elemen-elemennya merupakan anggota dari *A* dan juga *B* :

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \; dan \; x \in B\}$$

Contoh 2.2 :

Misalkan himpunan $A = \{1,2,3,4\}$ dan himpunan $B = \{3,4,5,6,7\}$, maka gabungan dari himpunan A dan B adalah $A \cup B = \{1,2,3,4,5,6,7\}$ dan irisan dari himpunan A dan B adalah $A \cap B = \{3,4\}$.

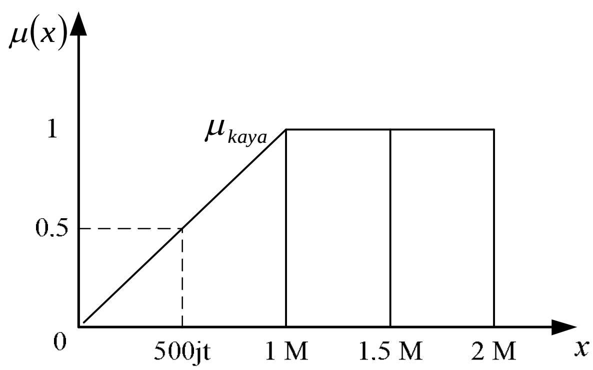
2.1.2 Himpunan Kabur (*Fuzzy Set*)

Dalam perkembangan teori himpunan, telah dikembangkan pula mengenai himpunan kabur. Pada himpunan tegas terdapat batas yang tegas antara unsur-unsur yang merupakan anggota dan unsur-unsur yang tidak merupakan anggota dari suatu himpunan. Tetapi dalam kenyataannya tidak semua himpunan yang kita jumpai dalam kehidupan sehari-hari terdefinisi secara demikian , misalnya himpunan orang kaya, himpunan mahasiswa pandai, dan sebagainya. Himpunan orang kaya misalnya, hal ini tidak dapat ditentukan secara pasti ukuran "kaya" itu seperti apa. Hal itu menunjukkan bahwa kelompok orang kaya dan kelompok orang tidak kaya tidak dapat ditentukan secara tegas. Untuk mengatasi himpunan dengan batas tidak tegas itu, *Prof. Zadeh* mengaitkan himpunan semacam itu dengan suatu fungsi yang menyatakan derajat kesesuaian unsur-unsur dalam semestanya dengan konsep yang merupakan syarat keanggotaan himpunan tersebut. Fungsi itu disebut fungsi keanggotaan dan nilai fungsi itu disebut derajat keanggotaan suatu unsur dalam himpunan itu, yang selanjutnya himpunan semacam ini disebut himpunan kabur *(fuzzy set)*. Dengan demikian setiap unsur dalam wacananya mempunyai derajat keanggotaan tertentu dalam himpunan tersebut. Derajat keanggotaan dinyatakan dengan suatu bilangan real dalam selang tertutup [0,1]. Nilai keanggotaan menunjukkan suatu variabel yang tidak hanya bernilai benar atau salah, tetapi terdapat nilai diantaranya.

Fungsi keanggotaan dari suatu himpunan kabur A dalam semesta X adalah pemetaan μ dari X ke selang [0,1], yaitu $\mu : X \rightarrow [0,1]$. Nilai fungsi $\mu(x)$ menyatakan derajat keanggotaan unsur $x \in X$ dalam himpunan kabur A. Nilai fungsi sama dengan 1 menyatakan keanggotaan penuh, dan nilai fungsi sama dengan 0 menyatakan sama sekali bukan anggota himpunan kabur tesebut.

Contoh 2.3 :

Diberikan himpunan orang kaya dengan kekayaan sebesar $\geq$ 1 M, dengan semestanya merupakan himpunan orang kaya dengan kekayaan 500 juta sampai 2 M. Himpunan tersebut dapat dinyatakan dengan keanggotaan μ_{kaya} dengan grafik seperti yang disajikan berikut :



Gambar 2.1 Fungsi keanggotaan himpunan kabur "kaya"

Misalnya seseorang yang mempunyai kekayaan 500 juta mempunyai derajat keanggotaan 0.5, yaitu μ_{kaya}(500) = 0.5, dalam himpunan kabur "kaya" tersebut.

2.1.3 Supremum dan Infimum suatu Himpunan

Definisi 2.3 [10]

Diberikan himpunan tidak kosong $A \subseteq \Re$, bilangan x disebut batas atas himpunan A jika untuk setiap $a \in A$ berlaku $a \leq x$. Himpunan A dikatakan terbatas keatas jika himpunan tersebut mempunyai batas atas. Bilangan x bukan batas atas A jika terdapat $a \in A$ dengan $a > x$.

Contoh 2.4 :

Diberikan himpunan $A = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\right\}$, maka 1 merupakan batas atas dari himpunan tersebut karena untuk setiap $a \in A$ berlaku $a \leq 1$.

Definisi 2.4 [10]

Diberikan himpunan tidak kosong $A \subseteq \Re$, bilangan x disebut batas bawah himpunan A jika untuk setiap $a \in A$ berlaku $x \leq a$. Himpunan A dikatakan terbatas kebawah jika himpunan tersebut mempunyai batas bawah, bilangan x bukan batas bawah A jika terdapat $a \in A$ dengan $a < x$.

Contoh 2.5 :

Diberikan himpunan $A = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\right\}$, maka 0 merupakan batas bawah dari himpunan tersebut karena untuk setiap $a \in A$ berlaku $0 \leq a$.

Definisi 2.5 [10]

Bilangan x disebut infimum himpunan $A \subseteq \Re$, ditulis dengan notasi inf A, jika memenuhi kondisi-kondisi berikut :

(i). x batas bawah himpunan A

(ii). Jika y batas bawah A maka $y \le x$

Contoh 2.6 :

1. Diberikan himpunan $A = \{0,1\}$, maka inf A = 0.

2. Diberikan himpunan $A = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\right\}$, maka inf A = 0.

Definisi 2.6 [10]

Bilangan x disebut supremum himpunan $A \subseteq \Re$, ditulis dengan notasi sup A, jika memenuhi kondisi-kondisi berikut :

(i). x batas atas himpunan A

(ii). Jika y batas atas A maka $y \ge x$

Contoh 2.7 :

1. Diberikan himpunan $A = \{1,2\}$, maka sup A = 2.

2. Diberikan himpunan $A = \{2,3,4,8\}$, maka sup A = 8.

Definisi 2.7 [13]

Diberikan $a, b \in \Re$, meet dari dua bilangan tersebut yang dinotasikan dengan $a \wedge b$ didefinisikan oleh :

$$a \wedge b = \inf(a,b).$$

Contoh 2.8 :

Misalkan $2,5 \in \Re$, maka $2 \wedge 5 = \inf(2,5) = 2$

Definisi 2.8 [13]

Diberikan $a,b \in \Re$, join dari dua bilangan tersebut yang dinotasikan dengan $a \vee b$ didefinisikan oleh :

$$a \vee b = \sup(a,b).$$

Contoh 2.9 :

Misalkan $2,5 \in \Re$, maka $2 \vee 5 = \sup(2,5) = 5$

2.2 Pengertian Fungsi (Pemetaan)

Definisi 2.9 [6]

Misalkan A dan B merupakan himpunan tidak kosong, maka *cross product* dari A dan B yang dinotasikan dengan $A \times B$, didefinisikan oleh

$$A \times B = \{(a,b) \mid a \in A, b \in B\}.$$

Contoh 2.10 :

Misalkan $A = \{1,2,3\}$ dan $B = \{a,b\}$,

Maka $A \times B = \{(1,a),(2,a),(3,a),(1,b),(2,b),(3,b)\}$

$B \times A = \{(a,1),(b,1),(a,2),(b,2),(a,3),(b,3)\}$

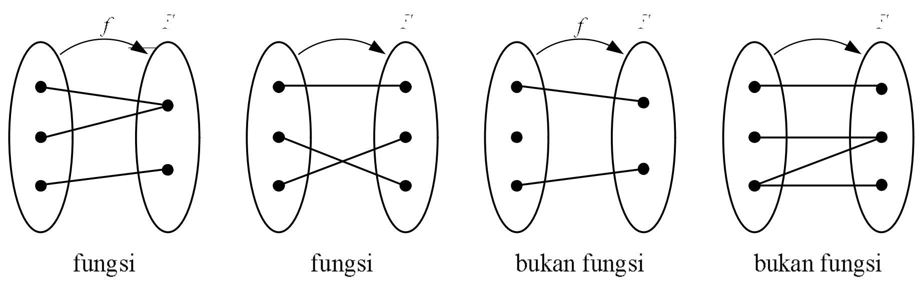
dari contoh diatas didapat bahwa $A \times B \neq B \times A$.

Definisi 2.10 [6]

Jika S dan T merupakan himpunan-himpunan tidak kosong, maka pemetaan dari S ke T adalah suatu subset dari $S \times T$, sedemikian hingga untuk setiap $s \in S$ terdapat dengan tunggal $t \in T$, sehingga pasangan $(s,t) \in S \times T$.

Jika f memetakan S ke T, maka dituliskan $f : S \to T$. Jika t adalah bayangan (hasil pemetaan) dari *s*, maka $f : s \to t$ atau $f(s) = t$.

Contoh 2.11 :



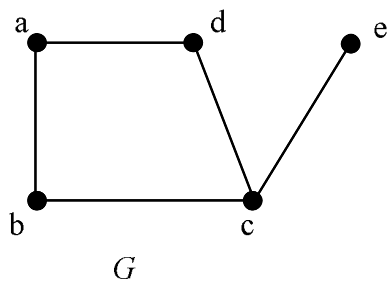
Gambar 2.2 Contoh fungsi dan bukan fungsi

2.3 Graf

Definisi 2.11 [11]

Graf adalah himpunan tidak kosong dari elemen-elemen yang disebut titik dan suatu himpunan pasangan tidak terurut titik-titik tersebut yang disebut garis (sisi). Himpunan titik dari graf *G* dinotasikan dengan *V(G)*, dan himpunan garis dari graf *G* dinotasikan *E(G)*.

Contoh 2.12 :



Gambar 2.3 Graf G

Graf G pada Gambar 2.3 dengan himpunan titik $V(G) = \{a, b, c, d, e\}$ dan himpunan garis $E(G) = \{(a,b), (b,c), (c,d), (d,a), (c,e)\}$.

Definisi 2.12 [11]

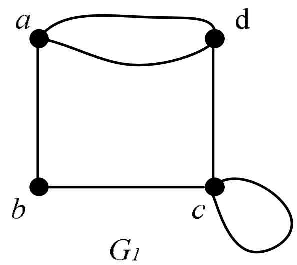
Dua garis atau lebih yang menghubungkan pasangan titik yang sama disebut garis ganda (*multiple edges*) dan sebuah garis yang menghubungkan sebuah titik ke dirinya sendiri disebut lup. Graf tanpa lup dan tanpa garis ganda disebut graf sederhana *(simple graphs)*.

Contoh 2.13 :

i) Graf sederhana G

Seperti pada Contoh 2.12.

ii) Contoh graf G_1 dengan garis ganda dan lup



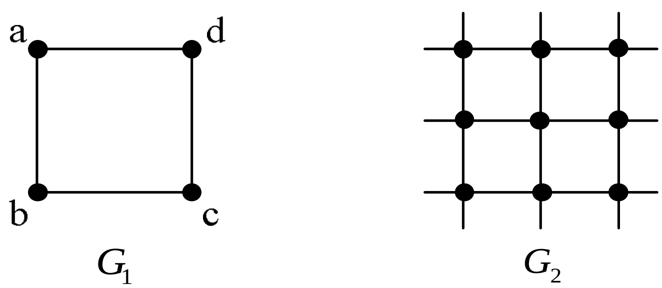
Gambar 2.4 Graf G_1 dengan garis ganda pada sisi (a,d) dan lup pada titik c

Definisi 2.13 [5]

Suatu graf dikatakan berhingga jika graf tersebut mempunyai jumlah titik *n* berhingga, dan graf dikatakan tak berhingga jika graf tersebut mempunyai jumlah titik tak berhingga.

Contoh 2.14 :

Diberikan graf G_1 dan G_2 seperti berikut.



Gambar 2.5 Graf G_1 adalah graf berhingga dan graf G_2 adalah graf tak berhingga

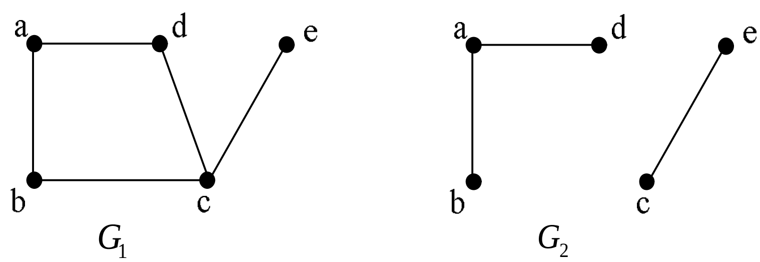
Definisi 2.14 [3]

Misalkan *u* dan *v* adalah titik-titik dari suatu graf *G*, maka graf *G* dikatakan terhubung *(connected)* jika terdapat garis yang menghubungkan titik *u* dan *v* didalam *G*.

Graf *G* dikatakan tidak terhubung *(disconnected)* jika titik *u* dan *v* tidak terdapat garis yang menghubungkan.

Contoh 2.15 :

Diberikan graf G_1 dan G_2 seperti berikut.



Gambar 2.6 Graf G_1 *adalah graf terhubung dan* G_2 *adalah graf tidak terhubung*

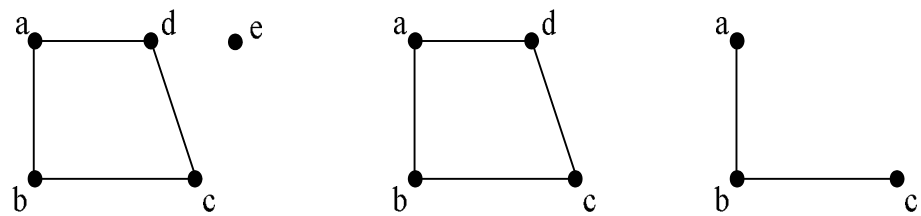
Definisi 2.15 [11]

Misalkan *G* suatu graf dengan himpunan titik *V(G)* dan daftar sisi *E(G)*. Subgraf dari *G* adalah graf yang semua titiknya anggota *V(G)* dan semua sisinya anggota *E(G)*.

Contoh 2.16 :

Diberikan graf *G* seperti pada Contoh 2.12.

Maka graf-graf dibawah ini adalah subgraf dari G



Gambar 2.7 Subgraf-subgraf dari graf G pada Contoh 2.12

Definisi 2.16 [11]

Misalkan G adalah graf sederhana, dan misalkan v adalah suatu titik dari G. Derajat v adalah banyaknya sisi yang bertemu pada titik v, dan dinotasikan oleh der v.

Contoh 2.17 :

Diberikan graf G seperti pada Contoh 2.12, maka diperoleh

der a = 2, der b = 2, der c = 3, der d = 2, der e = 1.

Definisi 2.17 [11]

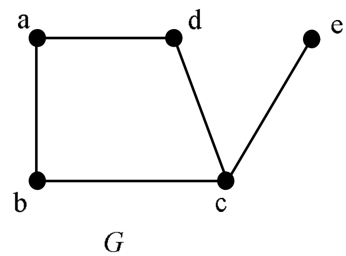
Misalkan G adalah suatu graf sederhana, komplemen G yang dinotasikan dengan G^C didefinisikan oleh :

i. $V(G^C) = V(G)$ dan

ii. $(x, y) \in E(G^C) \Leftrightarrow (x, y) \notin E(G)$

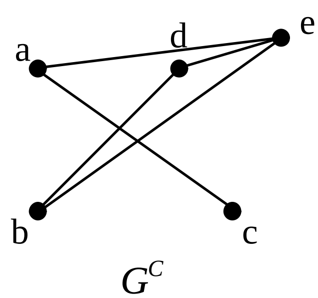
Contoh 2.18 :

Diberikan graf G seperti pada Contoh 2.12.



Gambar 2.8 Graf G

Diperoleh G^C dari graf G adalah seperti berikut



Gambar 2.9 Komplemen graf G^C

Definisi 2.18 [11]

Misalkan G^C adalah suatu komplemen dari graf sederhana G, komplemen dari G^C, yang dinotasikan dengan G^{C^C} didefinisikan oleh :

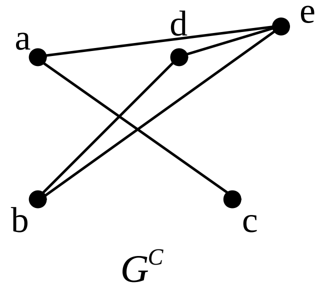
iii. $V\left(G^{C^C}\right)=V\left(G^C\right)$ dan

iv. $(x,y)\in E\left(G^{C^C}\right) \Leftrightarrow (x,y)\notin E\left(G^C\right)$

Dari definisi komplemen graf diatas didapat $G^{C^C}=G$.

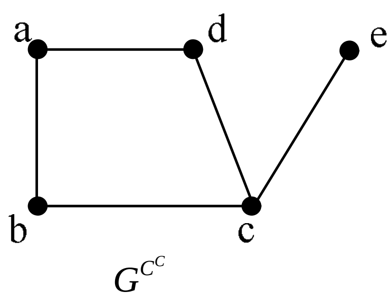
Contoh 2.19 :

Diberikan graf G^C seperti pada Contoh 2.18.



Gambar 2.10 *Komplemen graf* G^C

Diperoleh komplemen dari G^C adalah seperti berikut



Gambar 2.11 *Komplemen dari graf* G^C

Dari contoh diatas diperoleh bahwa komplemen dari graf G^C atau G^{C^C} adalah sama dengan graf G itu sendiri.

Definisi 2.19 [5]

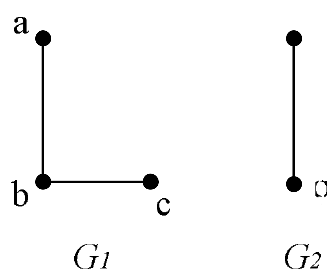
Misalkan diberikan graf G dan graf H, dengan himpunan titik $V(G)$ dan himpunan titik $V(H)$ saling asing. Gabungan dari graf G dan graf H dinotasikan dengan $G \cup H$ dan didefinisikan oleh :

i. $V(G \cup H) = V(G) \cup V(H)$

ii. $E(G \cup H) = E(G) \cup E(H)$.

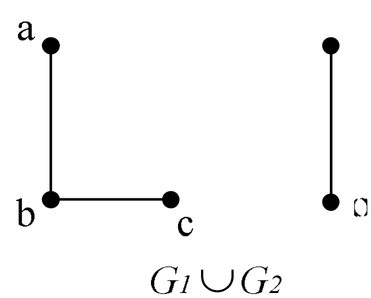
Contoh 2.20 :

Diberikan graf G_1 dan graf G_2 seperti berikut :



Gambar 2.12 Graf G_1 dan graf G_2

Gabungan dari graf G_1 dan graf G_2 adalah :



Gambar 2.13 Gabungan graf G_1 dan graf G_2

Definisi 2.20 [5]

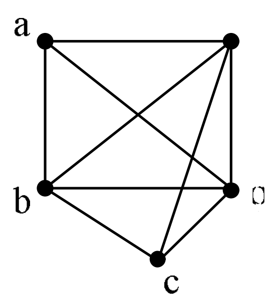
Misalkan diberikan graf G dan graf H, dengan himpunan titik $V(G)$ dan himpunan titik $V(H)$ saling asing. Join dari graf G dan graf H yang dinotasikan dengan $G+H$ didefinisikan oleh :

i. $V(G+H) = V(G) \cup V(H)$

ii. $E(G+H) = E(G) \cup E(H) \cup \{(g,h) \mid g \in G, h \in H\}$

Contoh 2.21 :

Diberikan graf G_1 dan graf G_2 seperti pada Contoh 2.20, maka join dari graf G_1 dan graf G_2 tersebut :



$G_1 + G_2$

Gambar 2.14 Join dari graf G_1 dan graf G_2 pada Contoh 2.20

Definisi 2.21 [5]

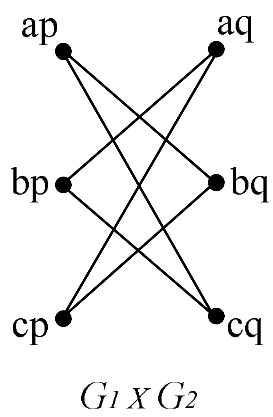
Misalkan diberikan graf G dan graf H, dengan himpunan titik $V(G)$ dan himpunan titik $V(H)$ saling asing. *Cartesian product* dari graf G dan graf H adalah suatu graf yang di notasikan dengan $G \times H$ yang didefinisikan oleh :

i. $V(G \times H) = \{gh \mid g \in V(G) \; dan \; h \in V(H)\}$

ii. $(g_1h_1, g_2h_2) \in E(G \times H) \Leftrightarrow (g_1, g_2) \in E(G) \; dan \; (h_1, h_2) \in E(H)$

Contoh 2.22 :

Diberikan graf G_1 dan graf G_2 pada Contoh 2.20, maka *cartesian product* dari graf G_1 dan graf G_2 tersebut :



Gambar 2.15 *Cartesian product dari graf* G_1 dan graf G_2 *pada Contoh 2.20*

BAB III

PEMBAHASAN

3.1. Pengertian Graf Fuzzy *M-Strong*

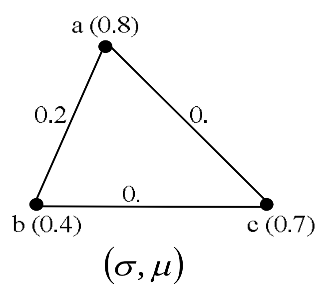
Graf fuzzy *M-strong* adalah graf fuzzy kuat yang pertama kali diperkenalkan oleh Mordeson dan Peng. Berikut akan dipelajari mengenai pengertian dari graf fuzzy *M-strong*.

Definisi 3.1 [1]

Misalkan G = (V, E) adalah suatu graf dengan himpunan titik V dan himpunan sisi $E \subseteq V \times V$. Misalkan σ dan μ adalah berturut-turut dari subset fuzzy V dan E, maka (σ, μ) disebut subgraf fuzzy dari G jika $\mu(x, y) \leq$ min $(\sigma(x), \sigma(y))$ untuk semua $(x, y) \in E$.

Contoh 3.1 :

Diberikan subgraf fuzzy (σ, μ) dengan himpunan titik $\sigma = \{a, b, c\}$ dan himpunan garis $\mu = \{(a,b), (a,c), (b,c)\}$. Jadi, digambarkan subgraf fuzzy tersebut adalah sebagai berikut :



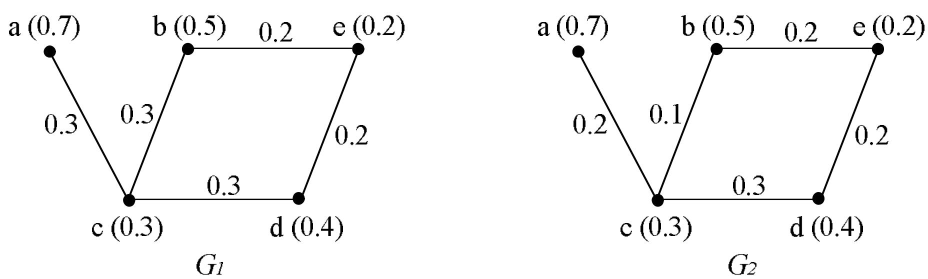
Gambar 3.1 Subgraf fuzzy G

Definisi 3.2 [1]

Misalkan (σ,μ) adalah subgraf fuzzy dari $G = (V,E)$. Maka (σ,μ) disebut subgraf fuzzy *M-strong* dari G jika $\mu(u,v)=\sigma(u)\wedge\sigma(v)$ untuk semua $(u,v)\in E$.

Contoh 3.2 :

Diberikan subgraf fuzzy G_1 dan G_2 seperti berikut



Gambar 3.2 Subgraf fuzzy G_1 dan subgraf fuzzy G_2

Subgraf fuzzy G_1 adalah subgraf fuzzy *M-strong* karena semua derajat keanggotaan garisnya memenuhi minimal dari derajat keanggotaan dua titik yang menghubungkan, yaitu

$$\mu(a,c)=0.3$$

$$=\sigma(a)\wedge\sigma(c)$$

$$=0.7\wedge 0.3$$

$$\mu(b,c)=0.3$$

$$=\sigma(b)\wedge\sigma(c)$$

$$=0.5\wedge 0.3$$

$$\mu(c,d)=0.3$$

$$= \sigma(c) \wedge \sigma(d)$$

$$= 0.3 \wedge 0.4$$

$$\mu(d,e) = 0.2$$

$$= \sigma(d) \wedge \sigma(e)$$

$$= 0.4 \wedge 0.2$$

$$\mu(e,b) = 0.2$$

$$= \sigma(e) \wedge \sigma(b)$$

$$= 0.2 \wedge 0.5$$

Sedangkan subgraf fuzzy G_2 bukan subgraf fuzzy *M-strong* karena terdapat derajat keanggotaan pada himpunan garisnya tidak sama dengan nilai minimal dua titik yang menghubungkan garis tersebut, yaitu

$$\mu(a,c) = 0.2$$

$$\neq \sigma(a) \wedge \sigma(c)$$

$$= 0.7 \wedge 0.3$$

$$\mu(b,c) = 0.1$$

$$\neq \sigma(b) \wedge \sigma(c)$$

$$= 0.5 \wedge 0.3$$

3.2. Join, *Cartesian Product* dan Komposisi Graf Fuzzy *M-Strong*

Berikut akan dipelajari mengenai operasi join, *cartesian product* dan komposisi pada subgraf fuzzy *M-strong*. Sebagai catatan, subgraf fuzzy mempunyai sifat-sifat sebagai graf, sehingga untuk selanjutnya istilah subgraf fuzzy selama tidak mengaburkan permasalahan disingkat sebagai graf fuzzy.

Definisi 3.3 [1]

Union $G = G_1 \cup G_2$ dari dua graf fuzzy $G_1 = (V_1, E_1)$ dan $G_2 = (V_2, E_2)$ didefinisikan sebagai suatu graf fuzzy $(\sigma_1 \cup \sigma_2, \mu_1 \cup \mu_2)$ dari $G = (V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2)$. Himpunan-himpunan fuzzy $\sigma_1 + \sigma_2$ dan $\mu_1 + \mu_2$ didefinisikan sebagai berikut :

(1) $(\sigma_1 \cup \sigma_2)(u) = \sigma_1(u)$ jika $u \in V_1 \setminus V_2$,

$(\sigma_1 \cup \sigma_2)(u) = \sigma_2(u)$ jika $u \in V_2 \setminus V_1$, dan

$(\sigma_1 \cup \sigma_2)(u) = \sigma_1(u) \vee \sigma_2(u)$ jika $u \in V_1 \cap V_2$.

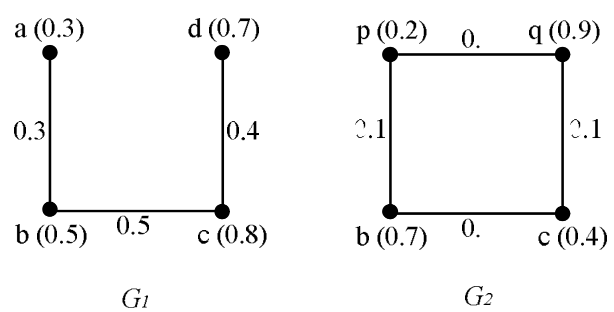
(2) $(\mu_1 \cup \mu_2)(u,v) = \mu_1(u,v)$ jika $(u,v) \in E_1 \setminus E_2$

$(\mu_1 \cup \mu_2)(u,v) = \mu_2(u,v)$ jika $(u,v) \in E_2 \setminus E_1$,

$(\mu_1 \cup \mu_2)(u,v) = \mu_1(u,v) \vee \mu_2(u,v)$ jika $(u,v) \in E_1 \cap E_2$.

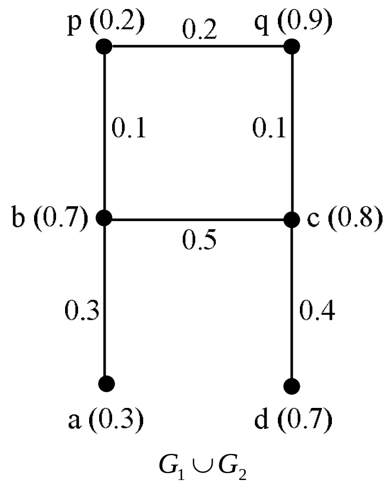
Contoh 3.3 :

Diberikan dua graf fuzzy *G*$_1$ dan *G*$_2$ seperti dibawah ini



Gambar 3.3 Graf fuzzy G$_1$ dan graf fuzzy G$_2$

Dari graf fuzzy G_1 dan G_2 diatas diperoleh unionnya adalah seperti berikut



Gambar 3.4 Union dari graf fuzzy G_1 dan G_2

Definisi 3.4 [1]

Join dari dua graf fuzzy $G_1 = (V_1, E_1)$ dan $G_2 = (V_2, E_2)$ didefinisikan sebagai suatu graf fuzzy $(\sigma_1 + \sigma_2, \mu_1 + \mu_2)$ pada $G = (V, E)$, dimana $V = V_1 \cup V_2$ dan $E = E_1 \cup E_2 \cup E'$. Dan diasumsikan bahwa $V_1 \cap V_2 = \phi$ dan E' adalah himpunan dari semua garis yang menggabungkan titik-titik dari V_1 dengan titik-titik dari V_2. Himpunan-himpunan fuzzy $\sigma_1 \times \sigma_2$ dan $\mu_1 \times \mu_2$ didefinisikan sebagai berikut :

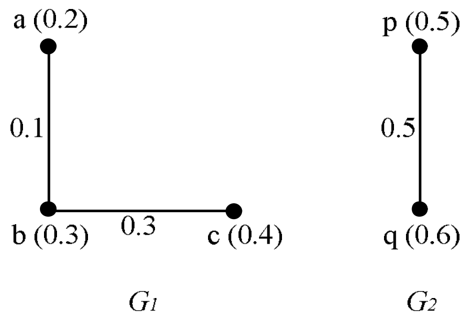
(1) $(\sigma_1 + \sigma_2)(u) = (\sigma_1 \cup \sigma_2)(u)$, $\forall u \in V_1 \cup V_2$;

(2) $(\mu_1 + \mu_2)(u,v) = (\mu_1 \cup \mu_2)(u,v)$ jika $(u,v) \in E_1 \cup E_2$;

$(\mu_1 + \mu_2)(u,v) = \sigma_1(u) \wedge \sigma_2(v)$ jika $(u,v) \in E'$.

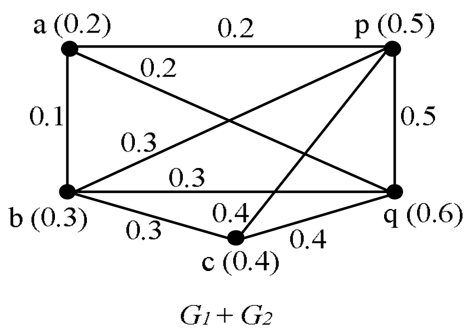
Contoh 3.4 :

Diberikan dua graf fuzzy G_1 dan G_2 seperti berikut



Gambar 3.5 Graf fuzzy G_1 dan Graf Fuzzy G_2

Dari graf fuzzy G_1 dan G_2 diperoleh join dari dua graf tersebut seperti berikut



Gambar 3.6 Join dari graf fuzzy G_1 dan G_2

Proposisi 3.5 [1]

Jika G_1 dan G_2 adalah graf fuzzy *M-strong*, maka $G_1 + G_2$ adalah juga *M-strong*.

Bukti

Misalkan G_1 dan G_2 adalah graf fuzzy *M-strong*.

Akan dibuktikan bahwa $G_1 + G_2$ adalah graf fuzzy *M-strong*.

Karena G_1 dan G_2 adalah graf fuzzy *M-strong*, maka

i. $\mu_1(u,v) = \sigma_1(u) \wedge \sigma_1(v)$

ii. $\mu_2(u,v) = \sigma_2(u) \wedge \sigma_2(v)$

Diasumsikan $\sigma_1(u) < \sigma_1(v)$ dan $\sigma_2(u) < \sigma_2(v)$,

maka $G_1 + G_2$ sesuai definisi join dua graf fuzzy

jika $u \in V_1 \setminus V_2$, maka

$$(\sigma_1 + \sigma_2)(u) = \sigma_1(u)$$

jika $u \in V_2 \setminus V_1$, maka

$$(\sigma_1 + \sigma_2)(u) = \sigma_2(u)$$

jika $u \in V_1 \cup V_2$, maka

$$(\sigma_1 + \sigma_2)(u) = \sigma_1(u) \vee \sigma_2(u).$$

Sehingga diperoleh

jika $(u,v) \in E_1 \setminus E_2$, maka

$$\begin{aligned}(\mu_1 + \mu_2)(u,v) &= \mu_1(u,v) \\ &= \sigma_1(u) \wedge \sigma_1(v) \\ &= (\sigma_1 + \sigma_2)(u) \wedge (\sigma_1 + \sigma_2)(v)\end{aligned}$$

jika $(u,v) \in E_2 \setminus E_1$, maka

$$\begin{aligned}(\mu_1 + \mu_2)(u,v) &= \mu_2(u,v) \\ &= \sigma_2(u) \wedge \sigma_2(v) \\ &= (\sigma_1 + \sigma_2)(u) \wedge (\sigma_1 + \sigma_2)(v)\end{aligned}$$

jika $(u,v) \in E_1 \cup E_2$, maka

$$
\begin{aligned}
(\mu_1+\mu_2)(u,v) &= \mu_1(u,v)\vee\mu_2(u,v) \\
&= (\sigma_1(u)\wedge\sigma_1(v))\vee(\sigma_2(u)\wedge\sigma_2(v)) \\
&= \sigma_1(u)\vee\sigma_2(u) \\
&= (\sigma_1(u)\vee\sigma_2(u))\wedge(\sigma_1(u)\vee\sigma_2(u)) \\
&= (\sigma_1+\sigma_2)(u)\wedge(\sigma_1+\sigma_2)(v)
\end{aligned}
$$

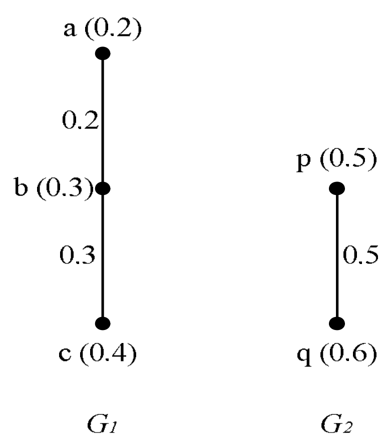
jika $(u,v)\in E'$, maka

$$
\begin{aligned}
(\mu_1+\mu_2)(u,v) &= \sigma_1(u)\wedge\sigma_2(v) \\
&= (\sigma_1+\sigma_2)(u)\wedge(\sigma_1+\sigma_2)(v).
\end{aligned}
$$

Dari pembuktian diatas diperoleh bahwa G_1+G_2 adalah graf fuzzy *M-strong*. Jadi, jika G_1 dan G_2 adalah graf fuzzy *M-strong*, maka G_1+G_2 adalah *M-strong*. ■

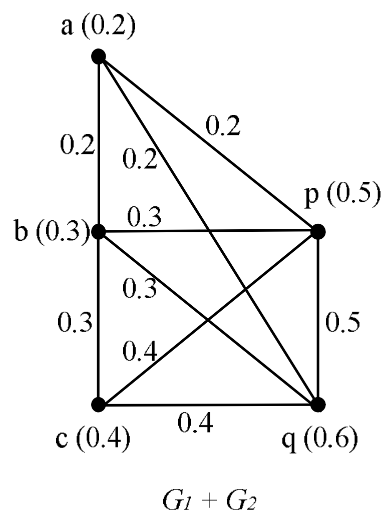
Contoh 3.5 :

Diberikan dua graf fuzzy seperti pada gambar dibawah ini



Gambar 3.7 Graf fuzzy M-strong G_1 dan graf fuzzy M-strong G_2

Join dari graf fuzzy *M-strong* G_1 dan graf fuzzy *M-strong* G_2 diatas adalah



Gambar 3.8 Join dari graf fuzzy M-strong G_1 dan G_2

Dari contoh diatas diperoleh bahwa join dari dua graf fuzzy *M-strong* adalah graf fuzzy *M-strong* karena semua derajat keanggotaan garisnya adalah minimal dari derajat keanggotaan dua titik yang menghubungkan.

Definisi 3.6 [1]

Cartesian product dari dua graf fuzzy $G_1 = (V_1, E_1)$ dan $G_2 = (V_2, E_2)$ didefinisikan sebagai suatu graf fuzzy $(\sigma_1 \times \sigma_2, \mu_1 \times \mu_2)$ pada $G = (V, E)$, dimana $V = V_1 \times V_2$ dan

$$E = \{((u, u_2), (u, v_2)) | u \in V_1, (u_2, v_2) \in E_2 \} \cup \{((u_1, w), (v_1, w)) | (u_1, v_1) \in E_1, w \in V_2\}.$$

Himpunan-himpunan fuzzy $\sigma_1 \times \sigma_2$ dan $\mu_1 \times \mu_2$ didefinisikan sebagai

(1) $(\sigma_1 \times \sigma_2)(u_1, u_2) = \sigma_1(u_1) \wedge \sigma_2(u_2)$

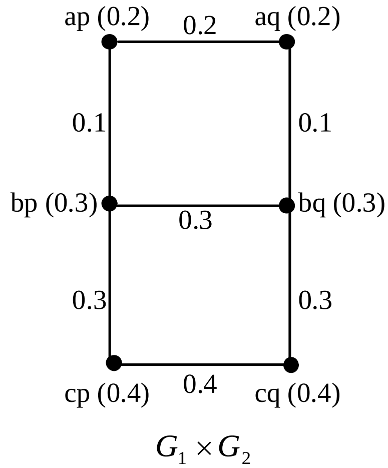
(2) $\left(\mu_1 \times \mu_2\right)\left(\left(u, u_2\right),\left(u, v_2\right)\right)=\sigma_1(u) \wedge \mu_2\left(u_2, v_2\right),\ \forall u \in V_1,\left(u_2, v_2\right) \in E_2$

$\left(\mu_1 \times \mu_2\right)\left(\left(u_1, w\right),\left(v_1, w\right)\right)=\mu_1\left(u_1, v_1\right) \wedge \sigma_2(w),\ \forall\left(u_1, v_1\right) \in E_1.$

Pada (1), $\left(\sigma_1 \times \sigma_2\right)\left(u_1, u_2\right)$ merupakan himpunan titik pada suatu operasi *cartesian product* atau yang seharusnya ditulis $\left(\sigma_1 \times \sigma_2\right)\left(\left(u_1, u_2\right)\right)$, tetapi agar lebih singkat dan jelas selanjutnya kita tulis $\left(\sigma_1 \times \sigma_2\right)\left(u_1, u_2\right)$.

Contoh 3.6 :

Diberikan dua graf fuzzy G_1 dan G_2 seperti pada Contoh 3.4. Maka *cartesian product* nya adalah



Gambar 3.9 Cartesian product graf fuzzy G_1 dan G_2 pada Contoh 3.4

Teorema 3.7 [1]

Jika $G_1 \times G_2$ adalah graf fuzzy *M-strong*, maka G_1 atau G_2 adalah *M-strong.*

Bukti

Misalkan G_1 dan G_2 bukan graf fuzzy *M-strong*, akan dibuktikan $G_1 \times G_2$ adalah bukan *M-strong*.

Karena G_1 dan G_2 bukan graf fuzzy *M-strong*, maka

i. $\mu_1(u_1, v_1) < \sigma_1(u_1) \wedge \sigma_1(v_1)$

ii. $\mu_2(u_2, v_2) < \sigma_2(u_2) \wedge \sigma_2(v_2)$ (3.1)

Tanpa menghilangkan sifat umum kita dapat asumsikan bahwa

$$\mu_2(u_2, v_2) \leq \mu_1(u_1, v_1) < \sigma_1(u_1) \wedge \sigma_1(v_1) \leq \sigma_1(u_1)$$

Untuk $((u_1, u_2)(u_1, v_2)) \in E$, dimana E didefinisikan seperti pada Definisi 3.6, yaitu

$$E = \{((u, u_2), (u, v_2)) | u \in V_1, (u_2, v_2) \in E_2\} \cup \{((u_1, w), (v_1, w)) | (u_1, v_1) \in E_1, w \in V_2\}.$$

Sesuai dengan definisi *cartesian product* dan pertidaksamaan (3.1) diperoleh

$$(\mu_1 \times \mu_2)((u_1, u_2), (u_1, v_2)) = \sigma_1(u_1) \wedge \mu_2(u_2, v_2)$$
$$< \sigma_1(u_1) \wedge \sigma_2(u_2) \wedge \sigma_2(v_2)$$

dan

$$(\sigma_1 \times \sigma_2)(u_1, u_2) = \sigma_1(u_1) \wedge \sigma_2(u_2)$$

$$(\sigma_1 \times \sigma_2)(u_1, v_2) = \sigma_1(u_1) \wedge \sigma_2(v_2)$$

maka

$$(\sigma_1 \times \sigma_2)(u_1, u_2) \wedge (\sigma_1 \times \sigma_2)(u_1, v_2) = \sigma_1(u_1) \wedge \sigma_2(u_2) \wedge \sigma_1(u_1) \wedge \sigma_2(v_2)$$
$$= \sigma_1(u_1) \wedge \sigma_1(u_1) \wedge \sigma_2(u_2) \wedge \sigma_2(v_2)$$

$$= \sigma_1(u_1) \wedge \sigma_2(u_2) \wedge \sigma_2(v_2).$$

Sehingga diperoleh

$$(\mu_1 \times \mu_2)((u_1,u_2),(u_1,v_2)) < \sigma_1(u_1) \wedge \sigma_2(u_2) \wedge \sigma_2(v_2)$$

$$= (\sigma_1 \times \sigma_2)(u_1,u_2) \wedge (\sigma_1 \times \sigma_2)(u_1,v_2).$$

Dari pembuktian diatas diperoleh bahwa $G_1 \times G_2$ bukan graf fuzzy *M-strong*, sehingga diperoleh sebuah kontradiksi.

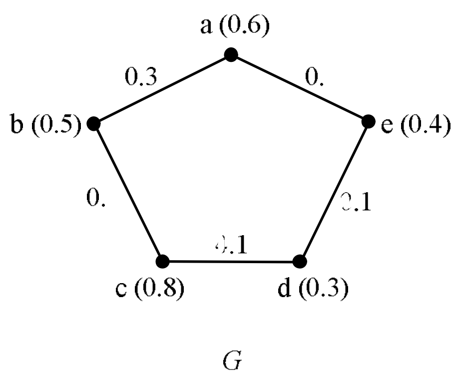
Jadi, jika $G_1 \times G_2$ adalah *M-strong*, maka G_1 atau G_2 adalah *M-strong*. ■

Definisi 3.8 [1]

Misalkan (σ, μ) adalah suatu subgraf fuzzy dari $G = (V, E)$, maka E^* adalah himpunan semua $(u,v) \in E$ dimana sifat *M-strong* tidak berlaku. Dengan kata lain, $(u,v) \in E^*$ jika dan hanya jika $\mu(u,v) < \sigma(u) \wedge \sigma(v)$.

Contoh 3.7 :

Diberikan subgraf fuzzy *G* seperti dibawah ini



Gambar 3.10 Subgraf fuzzy G

Graf G adalah suatu subgraf fuzzy dengan E^* adalah himpunan semua $(u,v)\in E$ dimana sifat *M-strong* tidak berlaku, atau derajat keanggotaan garisnya adalah kurang dari minimal dua titik yang menghubungkan.

Proposisi 3.9 [1]

Misalkan (σ_1,μ_1) adalah suatu subgraf fuzzy *M-strong* dari $G_1=(V_1,E_1)$, dan (σ_2,μ_2) adalah subgraf fuzzy dari $G_2=(V_2,E_2)$, maka $G_1\times G_2$ adalah *M-strong* jika dan hanya jika syarat berikut dipenuhi

$\sigma_1(u_1)\le\mu_2(u_2,v_2)$, untuk semua $u_1\in V_1$ dan $(u_2,v_2)\in E_2^*$.

Bukti

$(\Rightarrow)$ Misalkan $G_1\times G_2$ adalah *M-strong*, akan dibuktikan bahwa $\sigma_1(u_1)\le\mu_2(u_2,v_2)$.

karena $G_1\times G_2$ adalah *M-strong*, dan $u_1\in V_1$, dan $(u_2,v_2)\in E_2^*$, maka

$$\begin{aligned}(\mu_1\times\mu_2)((u_1,u_2),(u_1,v_2)) &= (\sigma_1\times\sigma_2)(u_1,u_2)\wedge(\sigma_1\times\sigma_2)(u_1,v_2)\\ &= \sigma_1(u_1)\wedge\sigma_2(u_2)\wedge\sigma_1(u_1)\wedge\sigma_2(v_2)\\ &= \sigma_1(u_1)\wedge\sigma_1(u_1)\wedge\sigma_2(u_2)\wedge\sigma_2(v_2)\\ &= \sigma_1(u_1)\wedge\sigma_2(u_2)\wedge\sigma_2(v_2)\end{aligned}$$

Sesuai dengan definisi *cartesian product*

$$(\mu_1\times\mu_2)((u_1,u_2)(u_1,v_2))=\sigma_1(u_1)\wedge\mu_2(u_2,v_2)$$

maka diperoleh

$$\sigma_1(u_1) \wedge \sigma_2(u_2) \wedge \sigma_2(v_2) = \sigma_1(u_1) \wedge \mu_2(u_2, v_2) \tag{3.2}$$

Karena $(u_2, v_2) \in E_2^*$ maka dari definisi 3.8 didapat

$$\mu_2(u_2, v_2) < \sigma_2(u_2) \wedge \sigma_2(v_2) \tag{3.3}$$

Dari (3.2), (3.3) dan dari sifat meet ($\wedge$) diperoleh bahwa

$$\sigma_1(u_1) \leq \mu_2(u_2, v_2)$$

Sehingga diperoleh bahwa jika $G_1 \times G_2$ adalah *M-strong* maka $\sigma_1(u_1) \leq \mu_2(u_2, v_2)$.

$(\Leftarrow)$ Diketahui $\sigma_1(u_1) \leq \mu_2(u_2, v_2)$ untuk semua $(u_2, v_2) \in E_2^*$ dan $u_1 \in V_1$, dan G_1 adalah *M-strong*.

Akan dibuktikan bahwa $G_1 \times G_2$ adalah subgraf fuzzy *M-strong*.

Untuk semua $(u_2, v_2) \in E_2^*$,

maka $\mu_2(u_2, v_2) < \sigma_2(u_2) \wedge \sigma_2(v_2)$, dan juga

$$\sigma_1(u_1) \wedge \sigma_2(u_2) \wedge \sigma_2(v_2) = \sigma_1(u_1) \wedge \mu_2(u_2, v_2).$$

Untuk semua $(u_2, v_2) \in E_2$,

maka $\mu_2(u_2, v_2) = \sigma_2(u_2) \wedge \sigma_2(v_2)$, dan juga

$$\begin{aligned}(\mu_1 \times \mu_2)((u_1, u_2)(u_1, v_2)) &= \sigma_1(u_1) \wedge \sigma_2(u_2) \wedge \sigma_2(v_2) \\ &= \sigma_1(u_1) \wedge \sigma_1(u_1) \wedge \sigma_2(u_2) \wedge \sigma_2(v_2) \\ &= \sigma_1(u_1) \wedge \sigma_2(u_2) \wedge \sigma_1(u_1) \wedge \sigma_2(v_2) \\ &= (\sigma_1 \times \sigma_2)(u_1, u_2) \wedge (\sigma_1 \times \sigma_2)(u_1, v_2)\end{aligned}$$

Hal ini menunjukkan bahwa

$$(\mu_1 \times \mu_2)((u_1,u_2)(u_1,v_2)) = (\sigma_1 \times \sigma_2)(u_1,u_2) \wedge (\sigma_1 \times \sigma_2)(u_1,v_2)$$

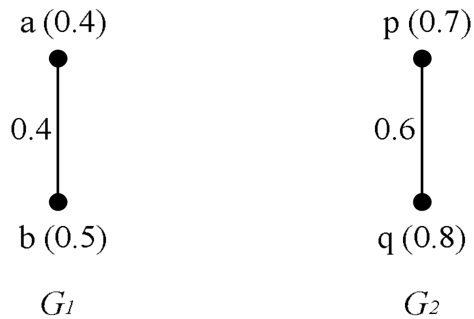
Jika $(u_1,v_1) \in E_1$ dan $u_2 \in V_2$ maka dari kondisi yang didapat bahwa G_1 adalah *M-strong* menunjukkan bahwa

$$\begin{aligned}(\mu_1 \times \mu_2)((u_1,u_2)(v_1,u_2)) &= \mu_1(u_1,v_1) \wedge \sigma_2(u_2) \\ &= \sigma_1(u_1) \wedge \sigma_1(v_1) \wedge \sigma_2(u_2) \\ &= \sigma_1(u_1) \wedge \sigma_1(v_1) \wedge \sigma_2(u_2) \wedge \sigma_2(u_2) \\ &= \sigma_1(u_1) \wedge \sigma_2(u_2) \wedge \sigma_1(v_1) \wedge \sigma_2(u_2) \\ &= (\sigma_1 \times \sigma_2)(u_1,u_2) \wedge (\sigma_1 \times \sigma_2)(v_1,u_2)\end{aligned}$$

Dari pembuktian diatas diperoleh bahwa jika $\sigma_1(u_1) \le \mu_2(u_2,v_2)$ maka $G_1 \times G_2$ adalah subgraf fuzzy *M-strong*. ■

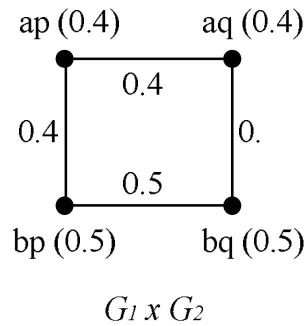
Contoh 3.8 :

Diberikan subgraf fuzzy G_1 dan G_2 seperti berikut



Gambar 3.11 G_1 adalah M-strong dan G_2 bukan M-strong

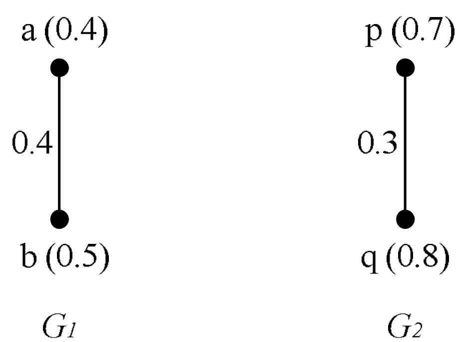
Diperoleh *cartesian product* dari subgraf fuzzy G_1 dan G_2 adalah



Gambar 3.12 Cartesian product dari subgraf fuzzy G_1 dan G_2

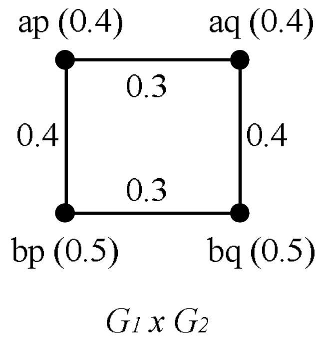
Dari gambar diatas, diperoleh bahwa *cartesian product* $G_1 \times G_2$ adalah subgraf fuzzy *M-strong*.

Untuk contoh lain diberikan subgraf fuzzy G_1 dan G_2 seperti berikut



Gambar 3.13 G_1 adl M-strong dan G_2 bukan M-strong

Diperoleh *cartesian product* dari subgraf fuzzy G_1 dan G_2 adalah



Gambar 3.14 Cartesian product dari subgraf fuzzy G_1 dan G_2

Dari gambar diatas, diperoleh bahwa *cartesian product* $G_1 \times G_2$ adalah bukan subgraf fuzzy *M-strong.*

Dari dua contoh diatas diketahui bahwa subgraf fuzzy G_1 adalah *M-strong* dan subgraf fuzzy G_2 bukan *M-strong* tetapi diperoleh hasil yang berbeda, yaitu pada contoh yang pertama diperoleh subgraf fuzzy *M-strong* sedangkan yang kedua bukan subgraf fuzzy *M-strong*. Hal ini dapat dilihat bahwa jika $\sigma_1(u_1) \leq \mu_2(u_2, v_2)$, maka $G_1 \times G_2$ yang diperoleh adalah subgraf fuzzy *M-strong*. Begitu juga sebaliknya, jika $\sigma_1(u_1) > \mu_2(u_2, v_2)$ maka $G_1 \times G_2$ yang diperoleh bukan subgraf fuzzy *M-strong*.

Definisi 3.10 [1]

Komposisi $G = G_1[G_2]$ dari dua graf fuzzy $G_1 = (V_1, E_1)$ dan $G_2 = (V_2, E_2)$ didefinisikan sebagai sebuah graf fuzzy $(\sigma_1[\sigma_2], \mu_1[\mu_2])$ dalam $G = (V, E^0)$ dimana $V = V_1 \times V_2$, $E^0 = E \cup E'$, dengan

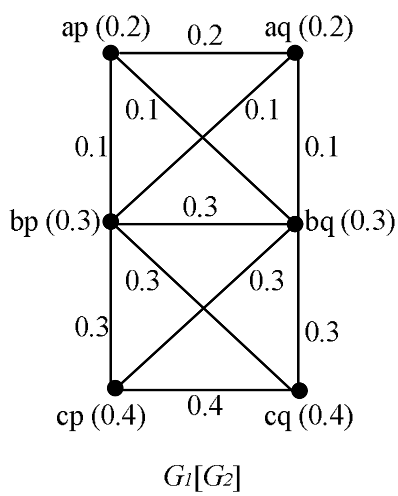
$E = \{((u,u_2),(u,v_2)) | u \in V_1, (u_2,v_2) \in E_2 \} \cup \{((u_1,w),(v_1,w)) | (u_1,v_1) \in E_1, w \in V_2\}$,

$E' = \{((u_1,w_1),(v_1,w_2)) | (u_1,v_1) \in E_1, w_1 \neq w_2\}$.

Himpunan-himpunan fuzzy $\sigma_1[\sigma_2]$ dan $\mu_1[\mu_2]$ didefinisikan sebagai $\sigma_1[\sigma_2]=$ $(\sigma_1 \times \sigma_2)$ pada $V_1 \times V_2$ dan $\mu_1[\mu_2] = \mu_1 \times \mu_2$ pada *E*, dan pada *E'*, $\mu_1[\mu_2]((u_1,w_1),(v_1,w_2)) = \mu_1(u_1,v_1) \wedge \sigma_2(w_1) \wedge \sigma_2(w_2)$.

Contoh 3.9 :

Diberikan dua graf fuzzy seperti pada Contoh 3.4. Komposisi graf fuzzy G_1 dan G_2 adalah



Gambar 3.15 Komposisi dari graf fuzzy G_1 dan G_2 pada Contoh 3.4

Proposisi 3.11 [1]

Jika $G_1[G_2]$ adalah *M-strong* maka G_1 atau G_2 adalah *M-strong*.

Bukti

Misalkan G_1 dan G_2 bukan graf fuzzy *M-strong*, akan dibuktikan bahwa $G_1[G_2]$ adalah bukan *M-strong*.

Karena G_1 dan G_2 bukan graf fuzzy *M-strong*, maka

i. $\mu_1(u_1, v_1) < \sigma_1(u_1) \wedge \sigma_1(v_1)$

ii. $\mu_2(u_2, v_2) < \sigma_2(u_2) \wedge \sigma_2(v_2)$ (3.4)

Untuk $((u_1, u_2)(u_1, v_2)) \in E$ dan $w_1, w_2 \in V_2$, maka $G_1[G_2]$ sesuai definisi komposisi dan pertidaksamaan (3.4), diperoleh

$$\mu_1[\mu_2]((u_1,u_2),(u_1,v_2)) = \sigma_1(u_1) \wedge \mu_2(u_2,v_2)$$

$$\leq \sigma_1(u_1) \wedge \sigma_2(u_2) \wedge \sigma_2(v_2) \quad (3.5)$$

dan

$$\sigma_1[\sigma_2](u_1,u_2) = \sigma_1(u_1) \wedge \sigma_2(u_2) \quad (3.6)$$

$$\sigma_1[\sigma_2](u_1,v_2) = \sigma_1(u_1) \wedge \sigma_2(v_2) \quad (3.7)$$

$$\sigma_1[\sigma_2](u_1,w_1) = \sigma_1(u_1) \wedge \sigma_2(w_1) \quad (3.8)$$

$$\sigma_1[\sigma_2](v_1,w_2) = \sigma_1(v_1) \wedge \sigma_2(w_2) \quad (3.9)$$

Dari persamaan (3.6) dan (3.7) diperoleh

$$\sigma_1[\sigma_2](u_1,u_2) \wedge \sigma_1[\sigma_2](u_1,v_2) = \sigma_1(u_1) \wedge \sigma_2(u_2) \wedge \sigma_1(u_1) \wedge \sigma_2(v_2)$$

$$= \sigma_1(u_1) \wedge \sigma_1(u_1) \wedge \sigma_2(u_2) \wedge \sigma_2(v_2)$$

$$= \sigma_1(u_1) \wedge \sigma_2(u_2) \wedge \sigma_2(v_2) \quad (3.10)$$

Maka dari (3.5) dan (3.10)

$$\mu_1[\mu_2]((u_1,u_2),(u_1,v_2)) \leq \sigma_1(u_1) \wedge \sigma_2(u_2) \wedge \sigma_2(v_2)$$

$$= \sigma_1[\sigma_2](u_1,u_2) \wedge \sigma_1[\sigma_2](u_1,v_2)$$

Untuk $((u_1,w_2)(v_1,w_2)) \in E'$, maka $G_1[G_2]$ sesuai definisi komposisi dan pertidaksamaan (3.4), diperoleh

$$\mu_1[\mu_2]((u_1,w_2),(v_1,w_2)) = \mu_1(u_1,v_1) \wedge \sigma_2(w_1) \wedge \sigma_2(w_2)$$

$$< \sigma_1(u_1) \wedge \sigma_1(v_1) \wedge \sigma_2(w_1) \wedge \sigma_2(w_2) \qquad (3.11)$$

Dari persamaan (3.8) dan (3.9) diperoleh

$$\sigma_1[\sigma_2](u_1,w_1) \wedge \sigma_1[\sigma_2](v_1,w_2) = \sigma_1(u_1) \wedge \sigma_2(w_1) \wedge \sigma_1(v_1) \wedge \sigma_2(w_2)$$

$$= \sigma_1(u_1) \wedge \sigma_1(v_1) \wedge \sigma_2(w_1) \wedge \sigma_2(w_2) \quad (3.12)$$

Sehingga dari (3.11) dan (3.12) diperoleh

$$\mu_1[\mu_2]((u_1,w_2),(v_1,w_2)) < \sigma_1(u_1) \wedge \sigma_1(v_1) \wedge \sigma_2(w_1) \wedge \sigma_2(w_2)$$

$$= \sigma_1[\sigma_2](u_1,w_1) \wedge \sigma_1[\sigma_2](v_1,w_2)$$

Dari pembuktian diatas, graf fuzzy yang diperoleh adalah bukan graf fuzzy *M-strong*, sehingga diperoleh kontradiksi.

Jadi, jika $G_1[G_2]$ *M-strong*, maka sedikitnya G_1 atau G_2 adalah *M-strong*.

■

3.3. Komplemen Graf Fuzzy *M-strong*

Selain operasi join, *cartesian product* dan komposisi, akan dipelajari juga mengenai komplemen graf fuzzy *M-strong*.

Definisi 3.12 [1]

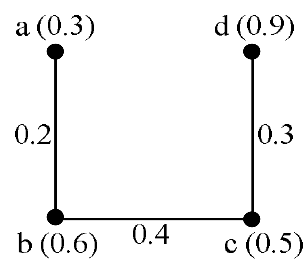
Komplemen dari sebuah subgraf fuzzy (σ, μ) dari $G = (V, E)$ didefinisikan sebagai sebuah subgraf fuzzy (σ^C, μ^C) pada $G^C = (V, V \times V)$ dimana σ^C dan μ^C diberikan oleh

(1) $\sigma^C(v) = \sigma(v)$ untuk semua $v \in V$

(2) $\mu^C(u,v) = \begin{cases} 0 & \text{if} \quad \mu(u,v) \rangle 0 \\ \sigma(u) \wedge \sigma(v) & \text{if} \quad \mu(u,v) = 0 \end{cases}$

Contoh 3.10 :

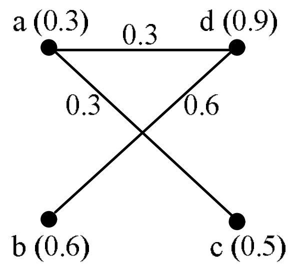
Diberikan subgraf fuzzy G seperti pada gambar dibawah ini



G

Gambar 3.16 Subgraf fuzzy G

Komplemen dari subgraf fuzzy G diatas adalah



Gambar 3.17 Komplemen subgraf fuzzy G^C

Proposisi 3.13 [1]

Graf fuzzy G adalah *M-strong* jika dan hanya jika $G = G^{C^C}$.

Bukti

$(\Leftarrow)$ Diketahui bahwa $G = G^{C^C}$.

Akan dibuktikan G adalah graf fuzzy *M-strong*.

Misalkan $G = (\sigma, \mu)$, sesuai definisi 3.12, maka

i. $\sigma(u) = \sigma^C(u) \Leftrightarrow \sigma^C(u) = \sigma^{C^C}(u)$, sehingga diperoleh

$\sigma(u) = \sigma^{C^C}(u)$

ii. $\mu(u,v) = \mu^C(u,v) \Leftrightarrow \mu^C(u,v) = \mu^{C^C}(u,v)$, sehingga diperoleh

$\mu(u,v) = \mu^{C^C}(u,v)$

Untuk $\mu^C(u,v) = 0$, maka sesuai definisi komplemen graf fuzzy diperoleh

$$\begin{aligned}\mu^{C^C}(u,v) &= \sigma^C(u) \wedge \sigma^C(v) \\ &= \sigma(u) \wedge \sigma(v)\end{aligned}$$

Sehingga

$\mu(u,v) = \mu^{C^C}(u,v)$

$= \sigma(u) \wedge \sigma(v)$ *(graf fuzzy M-strong)*

Untuk $\mu^C(u,v) > 0$, maka sesuai definisi komplemen graf fuzzy diperoleh

$\mu^{C^C}(u,v) = \sigma^C(u) \wedge \sigma^C(v)$

$0 \quad = \sigma^C(u) \wedge \sigma^C(v)$

$0 \quad = \sigma(u) \wedge \sigma(v)$

Dan diketahui bahwa $\mu(u,v) = \mu^{C^C}(u,v)$, maka

$\mu(u,v) = 0$

Sehingga diperoleh

$\mu(u,v) = \sigma(u) \wedge \sigma(v)$ *(graf fuzzy M-strong)*

Dari pembuktian diatas terbukti bahwa jika $G = G^{C^C}$ maka G adalah graf fuzzy *M-strong.*

$(\Rightarrow)$ untuk pembuktian jika G adalah graf fuzzy *M-strong* maka $G = G^{C^C}$ telah dibuktikan pada Tugas Akhir Tina Anggita Novia [7]. ■

Proposisi 3.14 [1]

Misalkan (σ_i, μ_i) adalah subgraf fuzzy dari $G_i = (V_i, E_i)$, $i = 1, 2$, maka berikut ini adalah benar :

(i) $G_i \subseteq G_i^{C^C}$,

(ii) $G_i^C = (G_i^{C^C})^C$,

(iii) Jika $G_1 \subseteq G_2$, maka $G_1^{C^C} \subseteq G_2^{C^C}$.

Bukti

(i) $G_i \subseteq G_i^{C^C}$, sudah dibuktikan pada tugas akhir Tina Anggita Novia [7].

(ii) $G_i^C = \left(G_i^{C^C}\right)^C$

Sudah dibuktikan bahwa $G = G^{C^C}$, maka $G_i = G_i^{C^C}$

Akan dibuktikan bahwa $G_i^C = \left(G_i^{C^C}\right)^C$

(1) $\sigma_i^C = \left(\sigma_i^{C^C}\right)^C$

(2) $\mu_i^C = \left(\mu_i^{C^C}\right)^C$

$\left(\mu_i^{C^C}\right)^C(u,v) = 0$, jika $\mu^{C^C}(u,v) > 0$

$\left(\mu_i^{C^C}\right)^C(u,v) = \sigma_i^{C^C}(u) \wedge \sigma_i^{C^C}(v)$, jika $\mu^{C^C}(u,v) = 0$

$= \sigma_i(u) \wedge \sigma_i(v)$

Oleh karena itu, sesuai dengan definisi komplemen diperoleh

$\mu_i^C(u,v) = 0$, jika $\mu(u,v) > 0$

$\mu_i^C(u,v) = \sigma_i(u) \wedge \sigma_i(v)$, jika $\mu(u,v) = 0$

Sehingga diperoleh

$$\left(\mu_i^{C^C}\right)^C(u,v) = \mu_i^C(u,v)$$

Jadi, terbukti bahwa $G_i^C = \left(G_i^{C^C}\right)^C$.

(iii) Jika $G_1 \subseteq G_2$, maka $G_1^{C^C} \subseteq G_2^{C^C}$.

Karena $G_1 \subseteq G_2$, maka

(1) $\sigma_1(u) \leq \sigma_2(u)$

(2) $\mu_1(u,v) \leq \mu_2(u,v)$

Diketahui bahwa $G_1 = G_1^{C^C}$ dan $G_2 = G_2^{C^C}$, maka G_1 dan G_2 adalah graf fuzzy *M-strong*, sehingga

$$\mu_1(u,v) = \sigma_1(u) \wedge \sigma_1(v)$$

$$\mu_2(u,v) = \sigma_2(u) \wedge \sigma_2(v)$$

dan

$$\sigma_1(u) = \sigma_1^{C^C}(u) \text{ dan } \sigma_2(u) = \sigma_2^{C^C}(u)$$

$$\mu_1(u,v) = \mu_1^{C^C}(u,v) \text{ dan } \mu_2(u,v) = \mu_2^{C^C}(u,v)$$

Dari (1) dan (2) diperoleh

$$\sigma_1^{C^C}(u) \leq \sigma_2^{C^C}(u)$$

$$\mu_1^{C^C}(u,v) \leq \mu_2^{C^C}(u,v)$$

Jadi, terbukti bahwa jika $G_1 \subseteq G_2$, maka $G_1^{C^C} \subseteq G_2^{C^C}$. ■

Proposisi 3.15 [1]

Misalkan G^{C^C} adalah graf fuzzy *M-strong* yang memuat $G = (V, E)$. Dengan kata lain, jika (σ', μ') adalah subgraf fuzzy *M-strong* dari $H = (V', E')$ sedemikian sehingga $G \subseteq H$, maka $G^{C^C} \subseteq H$.

Bukti

Misalkan (σ', μ') subgraf fuzzy *M-strong* dari $H = (V', E')$ dimana $V \subseteq V'$ dan $X \subseteq E'$.

Karena $G \subseteq H$, maka

(1) $\sigma(v) \leq \sigma'(v)$ untuk semua $v \in V$

(2) $\mu(v,u) \leq \mu'(v,u)$ untuk semua $(v,u) \in E$

Karena *H* adalah graf fuzzy *M-strong*, maka

$$\mu'(u,v) = \sigma'(u) \wedge \sigma'(v) \text{ untuk semua } (u,v) \in E'.$$

Karena $\sigma(v) \leq \sigma'(v)$ untuk semua $v \in V$, maka

$$\begin{aligned} \mu^{C^C}(u,v) &= \sigma(u) \wedge \sigma(v) \\ &\leq \sigma'(u) \wedge \sigma'(v) \\ &= \mu'(u,v) \end{aligned}$$

Dari pembuktian diatas diperoleh jika $G \subseteq H$ maka $G^{C^C} \subseteq H$. ■

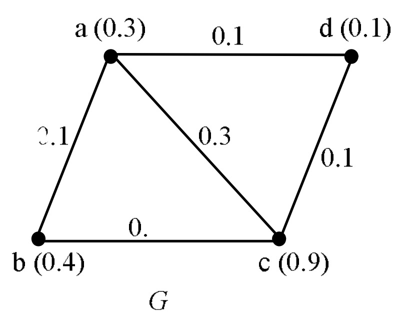
3.4. Subgraf Fuzzy Parsial *M-Strong*

Definisi 3.16 [8]

Graf fuzzy $H=(v,\tau)$ disebut subgraf fuzzy parsial dari graf fuzzy $G=(\sigma,\mu)$ jika $v\subseteq\sigma$ dan $\tau\subseteq\mu$.

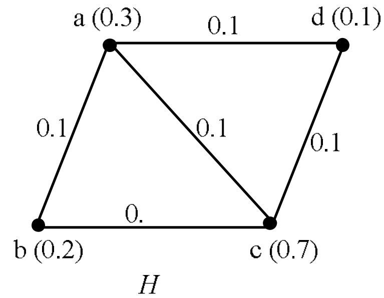
Contoh 3.11 :

Diberikan graf $G=(\sigma,\mu)$ dengan himpunan titik $\sigma=\{a,b,c,d\}$, himpunan garisnya $\mu=\{(a,b),(b,c),(c,d),(d,a),(a,c)\}$, derajat keanggotaan titiknya $\sigma(a)=0.3$, $\sigma(b)=0.4$, $\sigma(c)=0.9$, $\sigma(d)=0.1$, dan derajat keanggotaan garisnya $\mu(a,b)=0.1$, $\mu(b,c)=0.2$, $\mu(c,d)=0.1$, $\mu(d,a)=0.1$, $\mu(a,d)=0.3$.



Gambar 3.18 Graf fuzzy G

Subgraf fuzzy parsial dari graf *G* diatas adalah :



Gambar 3.19 Subgraf fuzzy parsial H dari graf fuzzy G

Proposisi 3.17 [8]

Misalkan G adalah union dari graf G_1 dan G_2, (σ_1, μ_1) dan (σ_2, μ_2) adalah berturut-turut subgraf fuzzy parsial dari G_1 dan G_2, maka $(\sigma_1 \cup \sigma_2, \mu_1 \cup \mu_2)$ adalah suatu subgraf fuzzy parsial dari G.

Bukti

Misalkan $(u,v) \in E_1 \setminus E_2$,

i. jika $u, v \in V_1 \setminus V_2$, maka

$$\begin{aligned}(\mu_1 \cup \mu_2)(u,v) &= \mu_1(u,v) \\ &\leq \sigma_1(u) \wedge \sigma_1(v)\end{aligned}$$

Sesuai dengan definisi union, untuk $u, v \in V_1 \setminus V_2$, maka $\sigma_1(u) = (\sigma_1 \cup \sigma_2)(u)$ dan $\sigma_1(v) = (\sigma_1 \cup \sigma_2)(v)$.

Sehingga diperoleh

$(\mu_1 \cup \mu_2)(u,v) \leq (\sigma_1 \cup \sigma_2)(u) \wedge (\sigma_1 \cup \sigma_2)(v)$.

ii. Jika $u \in V_1 \setminus V_2$ dan $v \in V_1 \cap V_2$, maka

$$\begin{aligned}(\mu_1 \cup \mu_2)(u,v) &= \mu_1(u,v)\\ &\le \sigma_1(u) \wedge \sigma_1(v)\\ &\le \sigma_1(u) \wedge (\sigma_1(v) \vee \sigma_2(v))\end{aligned}$$

Sesuai dengan definisi union, untuk $u \in V_1 \setminus V_2$, maka $\sigma_1(u) = (\sigma_1 \cup \sigma_2)(u)$ dan untuk $v \in V_1 \cap V_2$, maka $\sigma_1(v) \vee \sigma_2(v) = (\sigma_1 \cup \sigma_2)(v)$.

Sehingga diperoleh

$(\mu_1 \cup \mu_2)(u,v) \le (\sigma_1 \cup \sigma_2)(u) \wedge (\sigma_1 \cup \sigma_2)(v)$.

iii. Jika $u, v \in V_1 \cap V_2$, maka

$$\begin{aligned}(\mu_1 \cup \mu_2)(u,v) &= \mu_1(u,v)\\ &\le \sigma_1(u) \wedge \sigma_1(v)\\ &\le (\sigma_1(u) \vee \sigma_2(u)) \wedge (\sigma_1(v) \vee \sigma_2(v))\\ &= (\sigma_1 \cup \sigma_2)(u) \wedge (\sigma_1 \cup \sigma_2)(v)\end{aligned}$$

Misalkan $(u,v) \in E_2 \setminus E_1$,

i. jika $u, v \in V_2 \setminus V_1$, maka

$$\begin{aligned}(\mu_1 \cup \mu_2)(u,v) &= \mu_2(u,v)\\ &\le \sigma_2(u) \wedge \sigma_2(v)\end{aligned}$$

Sesuai dengan definisi union, untuk $u,v \in V_2 \setminus V_1$, maka $\sigma_2(u) = (\sigma_1 \cup \sigma_2)(u)$ dan $\sigma_2(v) = (\sigma_1 \cup \sigma_2)(v)$.

Sehingga diperoleh

$(\mu_1 \cup \mu_2)(u,v) \le (\sigma_1 \cup \sigma_2)(u) \wedge (\sigma_1 \cup \sigma_2)(v)$.

ii. Jika $u \in V_2 \setminus V_1$ dan $v \in V_1 \cap V_2$, maka

$$
\begin{aligned}
(\mu_1 \cup \mu_2)(u,v) &= \mu_2(u,v) \\
&\le \sigma_2(u) \wedge \sigma_2(v) \\
&\le \sigma_2(u) \wedge (\sigma_1(v) \vee \sigma_2(v))
\end{aligned}
$$

Sesuai dengan definisi union, untuk $u \in V_1 \setminus V_2$, maka $\sigma_2(u) = (\sigma_1 \cup \sigma_2)(u)$ dan untuk $v \in V_1 \cap V_2$, maka $\sigma_1(v) \vee \sigma_2(v) = (\sigma_1 \cup \sigma_2)(v)$.

Sehingga diperoleh

$(\mu_1 \cup \mu_2)(u,v) \le (\sigma_1 \cup \sigma_2)(u) \wedge (\sigma_1 \cup \sigma_2)(v)$.

iii. Jika $u,v \in V_1 \cap V_2$, maka

$$
\begin{aligned}
(\mu_1 \cup \mu_2)(u,v) &= \mu_2(u,v) \\
&\le \sigma_2(u) \wedge \sigma_2(v) \\
&\le (\sigma_1(u) \vee \sigma_2(u)) \wedge (\sigma_1(v) \vee \sigma_2(v)) \\
&= (\sigma_1 \cup \sigma_2)(u) \wedge (\sigma_1 \cup \sigma_2)(v)
\end{aligned}
$$

Misalkan $(u,v) \in E_1 \cap E_2$, maka

$$(\mu_1 \cup \mu_2)(u,v) = \mu_1(u,v) \vee \mu_2(u,v)$$

$$\leq (\sigma_1(u) \wedge \sigma_1(v)) \vee (\sigma_2(u) \wedge \sigma_2(v))$$

$$= ((\sigma_1(u) \vee \sigma_2(u)) \wedge (\sigma_1(u) \vee \sigma_2(v))) \wedge ((\sigma_1(v) \vee \sigma_2(u)) \wedge (\sigma_1(v) \vee \sigma_2(v)))$$

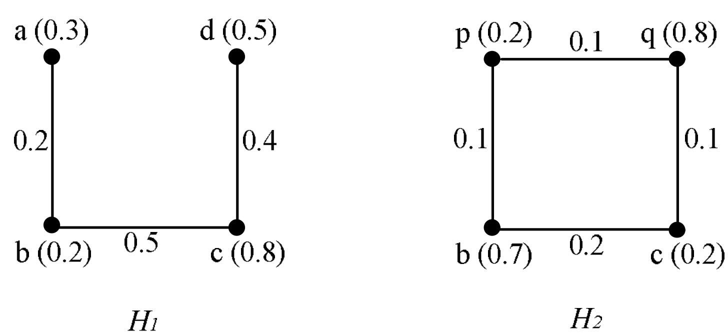
$$\leq (\sigma_1(u) \vee \sigma_2(u)) \wedge (\sigma_1(v) \vee \sigma_2(v))$$

$$= (\sigma_1 \cup \sigma_2)(u) \wedge (\sigma_1 \cup \sigma_2)(v).$$

Sehingga diperoleh bahwa jika (μ_1, ρ_1) dan (μ_2, ρ_2) adalah berturut-turut subgraf fuzzy parsial dari G_1 dan G_2, maka $(\mu_1 \cup \mu_2, \rho_1 \cup \rho_2)$ adalah suatu subgraf fuzzy parsial dari G. ■

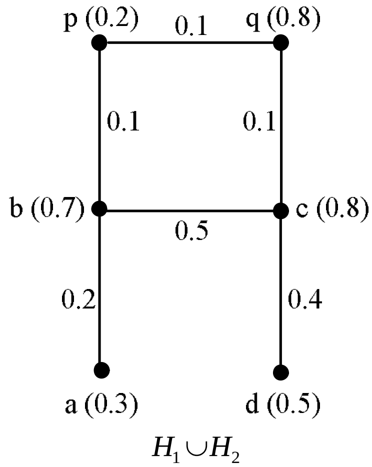
Contoh 3.12 :

Diberikan graf fuzzy G_1 dan G_2 seperti pada Contoh 3.3. Subgraf fuzzy parsial dari G_1 dan G_2 adalah



Gambar 3.20 Subgraf fuzzy parsial H_1 dan H_2 dari graf fuzzy G_1 dan G_2 pada Contoh 3.3

Union dari kedua subgraf fuzzy parsial tersebut adalah



Gambar 3.21 Union dari subgraf fuzzy parsial H_1 dan H_2

Dari contoh diatas diperoleh bahwa union dari dua subgraf fuzzy parsial G_1 dan G_2 adalah subgraf fuzzy parsial dari $G_1 \cup G_2$.

Teorema 3.18 [8]

Jika G adalah suatu union dari dua subgraf fuzzy G_1 dan G_2, maka setiap subgraf fuzzy parsial (σ, μ) dari G adalah union dari suatu subgraf fuzzy parsial dari G_1 dan subgraf fuzzy parsial G_2.

Bukti

Akan dibuktikan bahwa (σ_1, μ_1) dan (σ_2, μ_2) adalah berturut-turut subgraf fuzzy parsial dari G_1 dan G_2.

Didefinisikan himpunan fuzzy σ_1, σ_2, μ_1 dan μ_2 dari V_1, V_2, E_1, E_2 sebagai berikut :

jika $u \in V_1$, maka $\sigma_1(u) = \sigma(u)$

jika $u \in V_2$, maka $\sigma_2(u) = \sigma(u)$

jika $(u,v) \in E_1$, maka $\mu_1(u,v) = \mu(u,v)$

jika $(u,v) \in E_2$, maka $\mu_2(u,v) = \mu(u,v)$

sehingga diperoleh,

jika $(u_1, v_1) \in E_1$, maka

$$\mu_1(u_1, v_1) = \mu(u_1, v_1)$$

$$\leq \sigma(u_1) \wedge \sigma(v_1)$$

$$= \sigma_1(u_1) \wedge \sigma_1(v_1)$$

jika $(u_2, v_2) \in E_2$, maka

$$\mu_2(u_2, v_2) = \mu(u_2, v_2)$$

$$\leq \sigma(u_2) \wedge \sigma(v_2)$$

$$= \sigma_2(u_2) \wedge \sigma_2(v_2)$$

Oleh karena itu, diperoleh bahwa (σ_1, μ_1) dan (σ_2, μ_2) masing-masing adalah subgraf fuzzy parsial dari G_1 dan G_2.

Akan dibuktikan bahwa $\sigma = \sigma_1 \cup \sigma_2$ dan $\mu = \mu_1 \cup \mu_2$. Sesuai definisi union diperoleh

jika $u \in V_1 \setminus V_2$, maka $\sigma(u) = \sigma_1(u)$

$$= (\sigma_1 \cup \sigma_2)(u)$$

jika $u \in V_2 \setminus V_1$, maka $\sigma(u) = \sigma_2(u)$

$$= (\sigma_1 \cup \sigma_2)(u)$$

jika $u \in V_1 \cap V_2$, maka $\sigma(u) = \sigma_1(u) \vee \sigma_2(u)$

$= (\sigma_1 \cup \sigma_2)(u)$

jika $(u,v) \in E_1 \setminus E_2$, maka $\mu(u,v) = \mu_1(u,v)$

$= (\mu_1 \cup \mu_2)(u,v)$

jika $(u,v) \in E_2 \setminus E_1$, maka $\mu(u,v) = \mu_2(u,v)$

$= (\mu_1 \cup \mu_2)(u,v)$

jika $(u,v) \in E_1 \cap E_2$, maka $\mu(u,v) = \mu_1(u,v) \vee \mu_2(u,v)$

$= (\mu_1 \cup \mu_2)(u,v)$

Jadi terbukti bahwa $\sigma = \sigma_1 \cup \sigma_2$ dan $\mu = \mu_1 \cup \mu_2$. ■

Teorema 3.19 [8]

Jika G adalah join dari dua subgraf G_1 dan G_2, maka setiap subgraf fuzzy parsial *M-strong* (σ, μ) dari G adalah suatu join dari subgraf fuzzy parsial *M-strong* dari G_1 dan suatu subgraf fuzzy parsial *M-strong* dari G_2.

Bukti

Akan dibuktikan bahwa (σ_1, μ_1) dan (σ_2, μ_2) adalah subgraf fuzzy parsial *M-strong* dari G_1 dan G_2.

Didefinisikan himpunan fuzzy σ_1, σ_2, μ_1 dan μ_2 dari V_1, V_2, E_1 dan E_2 sebagai berikut :

jika $u \in V_1$, maka $\sigma_1(u) = \sigma(u)$

jika $u \in V_2$, maka $\sigma_2(u) = \sigma(u)$

jika $(u,v)\in E_1$, maka $\mu_1(u,v)=\mu(u,v)$

jika $(u,v)\in E_2$, maka $\mu_2(u,v)=\mu(u,v)$

Sehingga diperoleh

jika $(u_1,v_1)\in E_1$, maka

$$\mu_1(u_1,v_1)=\mu(u_1,v_1)$$
$$=\sigma(u_1)\wedge\sigma(v_1)$$
$$=\sigma_1(u_1)\wedge\sigma_1(v_1)$$

jika $(u_2,v_2)\in E_2$, maka

$$\mu_2(u_2,v_2)=\mu(u_2,v_2)$$
$$=\sigma(u_2)\wedge\sigma(v_2)$$
$$=\sigma_2(u_2)\wedge\sigma_2(v_2)$$

Sehingga diperoleh bahwa (σ_1,μ_1) dan (σ_2,μ_2) masing-masing adalah subgraf fuzzy parsial *M-strong* dari G_1 dan G_2.

jika $(u,v)\in E_1$, maka

$$\mu(u,v)=(\mu_1+\mu_2)(u,v)$$
$$=\mu_1(u,v)$$
$$=\sigma_1(u)\wedge\sigma_1(v)$$

jika $(u,v)\in E_2$, maka

$$\mu(u,v)=(\mu_1+\mu_2)(u,v)$$
$$=\mu_2(u,v)$$

$$= \sigma_2(u) \wedge \sigma_2(v)$$

jika $(u,v) \in E_1 \cup E_2$, maka

$$\mu(u,v) = (\mu_1 + \mu_2)(u,v)$$

$$= \sigma_1(u) \wedge \sigma_2(v)$$

jika $(u,v) \in E'$, dimana $u \in V_1$ dan $u \in V_2$, maka

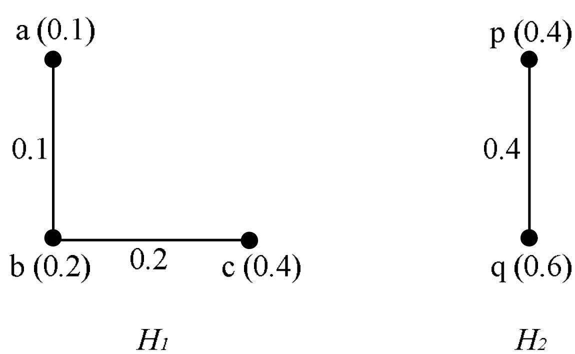
$$\mu(u,v) = (\mu_1 + \mu_2)(u,v)$$

$$= \sigma_1(u) \wedge \sigma_2(v)$$

Jadi, terbukti bahwa (σ, μ) adalah *M-strong* dan (σ, μ) adalah join dari dua subgraf fuzzy parsial *M-strong* (σ_1, μ_1) dan (σ_2, μ_2). ■

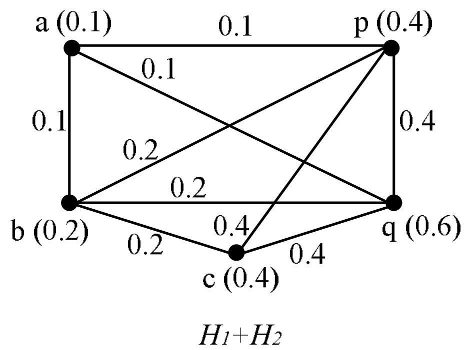
Contoh 3.13 :

Diberikan graf fuzzy G_1 dan G_2 seperti pada Contoh 3.4. Subgraf fuzzy parsial *M-strong* dari G_1 dan G_2 adalah



Gambar 3.22 Subgraf fuzzy parsial M-strong H_1 dan H_2 dari graf fuzzy G_1 dan G_2 pada Contoh 3.4

Join dari kedua subgraf fuzzy parsial *M-strong* tersebut adalah



Gambar 3.23 Join dari subgraf fuzzy parsial M-strong H_1 dan H_2

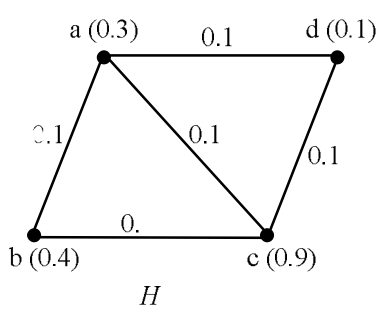
Dari contoh diatas diperoleh bahwa join dari dua subgraf fuzzy parsial *M-strong* G_1 dan G_2 adalah *M-strong*.

Definisi 3.20 [8]

Subgraf fuzzy parsial $H = (v, \tau)$ disebut subgraf fuzzy *spanning* dari $G = (\sigma, \mu)$ jika $v = \sigma$.

Contoh 3.14 :

Diberikan graf fuzzy G seperti pada Contoh 3.11. Maka subgraf fuzzy spanning H dari G adalah



Gambar 3.24 Subgraf fuzzy spanning H dari graf fuzzy G pada Contoh 3.11

Subgraf fuzzy H disebut subgraf fuzzy *spanning* dari G karena mempunyai himpunan titik, himpunan garis dan derajat keanggotaan titiknya sama. Sedangkan yang membedakan adalah terdapat derajat keanggotaan garis yang berbeda $(\tau(a,c) \neq \mu(a,c))$.

Definisi 3.21 [1]

Suatu subgraf fuzzy $H = (\sigma, \tau)$ adalah sebuah subgraf fuzzy *full spanning* dari $G = (\sigma, \mu)$ pada (V, E) jika H adalah sebuah subgraf fuzzy *spanning* dari G dan $\forall u, v \in V$, $\tau(u,v) = 0$ atau $\tau(u,v) = \mu(u,v)$.

Contoh 3.15 :

Diberikan graf fuzzy G seperti pada Contoh 3.11. Diperoleh subgraf fuzzy *full spanning* H dari G sebagai berikut :

$\sigma(u) = \sigma(w)$ dengan $u \in V$ pada G dan $w \in V$ pada H

$\tau(a,b) = \mu(a,b) = 0.1$

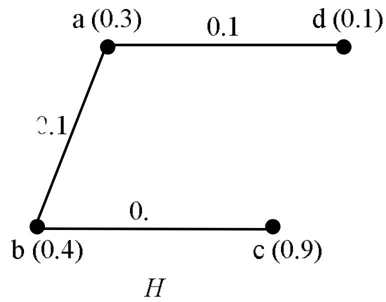
$\tau(b,c) = \mu(b,c) = 0.2$

$\tau(c,d) = 0$

$\tau(d,a) = \mu(d,a) = 0.1$

$\tau(a,c) = 0$

Sehingga H digambarkan seperti dibawah ini :



Gambar 3.25 Subgraf fuzzy Full spanning H dari graf fuzzy G pada Contoh 3.11

Proposisi 3.22 [1]

Suatu subgraf fuzzy *full spanning* dari graf fuzzy *M-strong* adalah juga *M-strong.*

Bukti

Misalkan *H* = (σ,τ) adalah subgraf fuzzy *full spanning* dari graf fuzzy *M-strong G* = (σ,μ). Maka $\mu(u,v) = \sigma(u) \wedge \sigma(v)$.

Diketahui *H* adalah subgraf fuzzy *full spanning* dari *G*, maka

i. *H* adalah subgraf fuzzy *spanning* dari *G*, maka $v = \mu$. Artinya banyaknya himpunan titik pada *H* sama dengan himpunan titik pada *G*

ii. $\tau(u,v) = 0$ atau

$\tau(u,v) = \mu(u,v)$

Akan dibuktikan bahwa jika *G* adalah graf fuzzy *M-strong* maka subgraf fuzzy *full spanning H* dari *G* adalah juga *M-strong*.

a. Jika $\tau(u,v) = 0$, maka tidak terdapat garis *b.* Jika $\tau(u,v)=\mu(u,v)$, maka

$\tau(u,v)=\mu(u,v)$

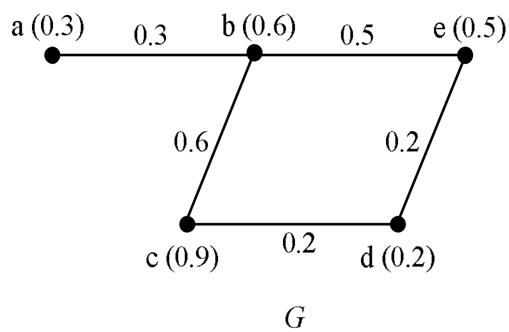
$= \sigma(u)\wedge\sigma(v)$

Sehingga diperoleh $\tau(u,v)=\sigma(u)\wedge\sigma(v)$.

Jadi, terbukti bahwa subgraf fuzzy *full spanning* dari graf fuzzy *M-strong* adalah *M-strong*. ■

Contoh 3.16 :

Diberikan graf fuzzy *M-strong G*, sebagai berikut



Gambar 3.26 Graf fuzzy M-strong G

Berikut akan digambarkan subgraf fuzzy *full spanning H* dari graf fuzzy *M-strong* diatas, dengan

$\sigma(u)=\sigma(w)$, $u\in V$ pada G dan $w\in V$ pada H

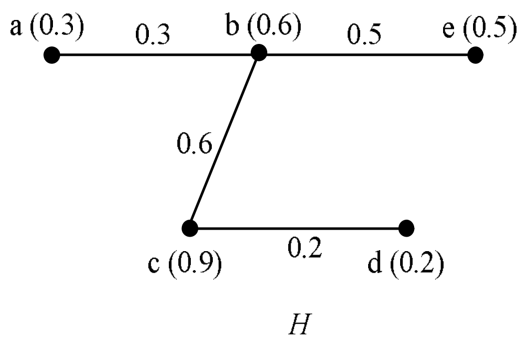
$\tau(a,b)=\mu(a,b)=0.3$

$\tau(b,c)=\mu(b,c)=0.6$

$\tau(c,d)=\mu(c,d)=0.2$

$\tau(d,e) = \mu(d,e) = 0$

$\tau(e,b) = \mu(e,b) = 0.5$



Gambar 3.27 Subgraf fuzzy full spanning H dari G

H adalah *M-strong* karena semua derajat keanggotaan garisnya memenuhi definisi subgraf fuzzy *M-strong*, yaitu $\mu(u,v) = \sigma(u) \wedge \sigma(v)$.

BAB IV

PENUTUP

Berdasarkan pembahasan yang telah dijelaskan dalam Tugas Akhir dengan judul “Graf Fuzzy *M-Strong*” ini diperoleh bahwa jika terdapat dua graf fuzzy *M-strong* maka join dari kedua graf fuzzy tersebut adalah *M-strong*. Untuk operasi *cartesian product* dan komposisi dari dua graf fuzzy akan diperoleh graf fuzzy *M-strong* jika sedikitnya satu dari graf fuzzy tersebut adalah *M-strong*. Jika komplemen dari komplemen suatu graf fuzzy sama dengan graf fuzzy tersebut, maka graf fuzzy tersebut adalah *M-strong*.

Dari definisi subgraf fuzzy parsial dan union graf fuzzy diperoleh bahwa subgraf fuzzy parsial dari union dua graf fuzzy adalah union dari subgraf fuzzy parsial dua graf fuzzy tersebut. Sesuai dengan definisi join, maka setiap subgraf fuzzy parsial *M-strong* dari join dua graf fuzzy adalah suatu join dari subgraf fuzzy parsial *M-strong* dua graf fuzzy tersebut.

Subgraf fuzzy parsial yang mempunyai himpunan titik sama dari suatu graf fuzzy disebut subgraf fuzzy *spanning*, dan subgraf fuzzy *spanning* yang mempunyai derajat keanggotaan sama dengan suatu graf fuzzy tersebut atau sama dengan nol disebut subgraf fuzzy *full spanning*. Jika suatu subgraf fuzzy adalah *M-strong* maka *full spanning* fuzzy subgraf dari graf fuzzy tersebut adalah juga *M-strong*.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Bhutani. K. R. *On M-strong Fuzzy Graphs. Information Sciences*. 155(2) : 103-109, 2003.

[2] Bhutani, K. R and A. Rosenfeld. *Strong arcs in fuzzy graphs. Information Sciences*. 152 (2003), 319-322.

[3] Fletcher, Peter. *Foundations of Discretes Mathematics*. 1990. PWS- Kent Publishing Company : Boston.

[4] Frans Susilo. 2006. *Himpunan dan Logika Kabur serta Aplikasinya*. Graha Ilmu : Yogyakarta.

[5] Harary, Frank. 1994. *Graph Theory*. Addison-Wesley Company.

[6] Lipschutz, Seymour. 1964. *Set Theory and Related Topics*. McGRAW-HILL BOOK COMPANY : New York .

[7] Mordeson, J. N and C. S. Peng. *Operations on fuzzy graphs. Information Sciences*. 79 (1994), 159-170.

[8] Mordeson, J. N and P. S. Nair. 2000. *Fuzzy Graphs and Fuzzy Hypergraphs*. Pyisica-Verlag, Hiedelberg.

[9] Nagoor Gani, A and Malarvizhi. *Properties of μ-Complement a Fuzzy Graph*. *IJACM*. Vol. 2, Number 3, Aug-2009, pp 73-83.

[10] Solichin Zaky dan Farikhin. 2003. *Buku Ajar Analisis Fungsi Riil 1*. Lab Matematika Undip : Semarang.

[11] Theresia MH Tirta Seputro. 1992. *Graf Pengantar*. University Press IKIP: Surabaya.

[12] Tina Anggita Novia. *Komplemen Graf Fuzzy*. 2009. Lab Matematika Undip: Semarang.

[13] Zanen, Adrian C. 1996. *Introduction to Operator Theory in Riesz Space.* Springer : New York.