JURNAL MATEMATIKA DAN KOMPUTER
Vol. 7. No. 1, 11 - 19, April 2004, ISSN : 1410-8518

TAKSIRAN UMUR SISTEM DENGAN UMUR KOMPONEN BERDISTRIBUSI SERAGAM

Sudarno
Jurusan Matematika FMIPA UNDIP

Abstrak

Sistem yang dibentuk oleh beberapa komponen, rangkaiannya dapat secara seri atau paralel. Untuk mengetahui suatu sistem berfungsi atau tidak, dapat dilihat dari fungsi bentuk. Dari fungsi bentuk ini, fungsi reliabilitas sistem akan dapat ditentukan. Selanjutnya berdasarkan fungsi reliabilitas sistem, dapat diketahui umur sistem. Khusus dalam tulisan ini, umur komponennya diasumsikan berdistribusi seragam. Dengan mengetahui umur sistem, maka dapat ditentukan waktu garansi produk.

Kata kunci : Fungsi Bentuk, Fungsi Reliabilitas, Umur Sistem.

1. PENDAHULUAN

Banyak kejadian dalam telekomunikasi, transmisi dan transportasi terjadi sistem yang menghubungkan antara komponen (tempat) yang satu dengan lainnya secara seri atau paralel agar memudahkan cara bekerjanya. Secara seri untuk mempercepat waktu proses yang dibutuhkan dan secara paralel untuk memberi alternatif jalan yang dilalui agar apabila ada gangguan jalan yang satu, masih dapat melalui jalur lain. Sehingga proses yang terjadi pada sistem masih tetap bisa berjalan (Frank and Frisch, 1971).

Dalam Mahjan, 1995, dikatakan bahwa reliabilitas mutu adalah peluang produk masih berfungsi sampai waktu yang telah ditentukan. Reliabilitasnya dipengaruhi oleh desain, proses produksi, perawatan dan pemakaian yang benar. Dengan memperhatikan faktor-faktor yang mempengaruhi reliabilitas, maka produk tersebut dapat dibuat untuk mencapai reliabilitas yang diinginkan, agar konsumen puas. Sedangkan pada Ross, 1997, fungsi reliabilitas merupakan peluang sistem akan berfungsi, yaitu peluang fungsi bentuk hidup. Karena fungsi bentuk menggambarkan sistem tersebut hidup atau mati.

Pada makalah ini menaksir umur sistem baik dihubungkan secara seri atau paralel, dengan umur komponen berditribusi seragam. Dalam menaksir umur sistem memakai dasar fungsi reliabilitas. Selain itu juga memprediksi umur maksimal dari sistem tersebut. Dengan mampu menaksir umur sistem, diharapkan berguna untuk menentukan waktu garansi dari alat ini.

2. FUNGSI BENTUK DAN FUNGSI RELIABILITAS

2.1. FUNGSI BENTUK

Misal terdapat sistem yang terdiri dari n komponen, dan tiap-tiap komponen ada yang berfungsi atau tidak. Untuk menunjukkan apakah komponen ke-i berfungsi atau tidak, didefinisikan variabel indikator x dengan

$$x_i = \begin{cases} 1, \text{ jika komponen ke - i berfungsi} \\ 0, \text{ jika komponen ke - i tidak berfungsi.} \end{cases}$$

Vektor $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ disebut vektor state, yang menunjukkan komponen-komponennya berfungsi atau tidak. Sehingga untuk mengetahui sistem tersebut berfungsi atau tidak dapat dilihat dari vektor **x**.

Misal terdapat fungsi $\phi(\mathbf{x})$ sedemikian hingga

$$\phi(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1, \text{ jika sistem berfungsi} \\ 0, \text{ jika sistem mati.} \end{cases}$$

Fungsi $\phi(\mathbf{x})$ disebut fungsi bentuk dari sistem tersebut.

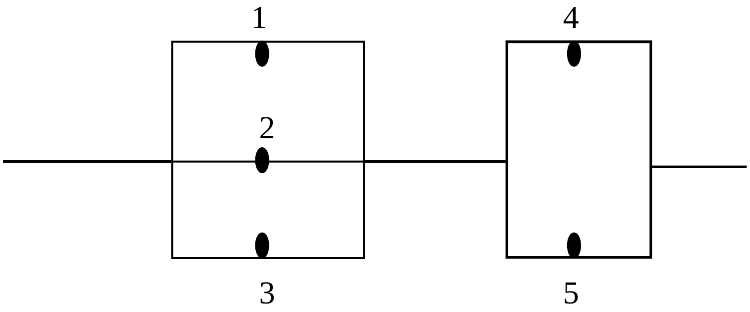
Suatu sistem seri berfungsi jika dan hanya jika semua komponennya berfungsi. Sehingga fungsi bentuknya diberikan dengan

$$\phi(\mathbf{x}) = \min\,(\mathrm{x}_1, \ldots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} x_i\,. \tag{1}$$

Sedangkan suatu sistem paralel berfungsi jika dan hanya jika sekurang-kurangnya satu komponennya berfungsi. Maka, fungsi bentuknya diberikan dengan

$$\phi(\mathbf{x}) = \text{maks}\,(\mathrm{x}_1, \ldots, x_n) = 1 - \prod_{i=1}^{n} (1 - x_i)\,. \tag{2}$$

Suatu contoh sistem seri dari sistem paralel diberikan pada Gambar 1, berikut ini:



Gambar 1. Sistem seri dari sistem paralel dengan 5 komponen.

Untuk sistem seri dari sistem paralel dengan 5 komponen seperti pada Gambar 1, fungsi bentuknya dapat dinyatakan dengan

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{x}) &= \text{maks } (\mathrm{x}_1, x_2, x_3) \quad \text{maks } (\mathrm{x}_4, x_5) \\ &= \{1-(1-x_1)\,(1-x_2)\,(1-x_3)\} \quad \{1-(1-x_4)\,(1-x_5)\}. \end{aligned} \tag{3}$$

2.2. FUNGSI RELIABILITAS

Andaikan X_i menyatakan state komponen ke-i, yang merupakan variabel acak sedemikian hingga $\mathrm{P}\{X_i = 1\} = p_i = 1 - \mathrm{P}\{X_i = 0\}$. Nilai p_i ,yang sama dengan peluang komponen ke-i berfungsi, disebut reliabilitas komponen ke-i. Jika didefinisikan r dengan

$$r = \mathrm{P}\{\phi(\mathbf{X}) = 1\}, \text{dengan } \mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)$$

maka r disebut reliabilitas sistem tersebut. Bila komponennya, yaitu variabel acak $X_i, i = 1, \ldots n$ adalah independen maka r dapat dinyatakan sebagai fungsi reliabilitas dari komponen tersebut, yaitu $r = r(\mathbf{p}), \text{dengan } \mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_n)$. Fungsi $r(\mathbf{p})$ disebut fungsi reliabilitas. Fungsi reliabilitas untuk sistem seri dari n komponen independen adalah

$$r(\mathbf{p}) = \mathrm{P}\{\phi(\mathbf{X}) = 1\} = \mathrm{P}\{X_i = 1, \forall i = 1, \ldots, n\} = \prod_{i=1}^{n} p_i \,. \tag{4}$$

Sedangkan fungsi reliabilitas untuk sistem paralel dari n komponen independen diberikan dengan

$$r(\mathbf{p}) = \mathrm{P}\{\phi(\mathbf{X}) = 1\} = \mathrm{P}\{X_i = 1, \exists i = 1,\dots,n\}$$
$$= 1 - \mathrm{P}\{X_i = 0, \forall i = 1,\dots,n\} = 1 - \prod_{i=1}^{n}(1 - p_i). \tag{5}$$

Berdasarkan sistem seperti pada Gambar 1, fungsi reliabilitasnya dinyatakan dengan

$$r(\mathbf{p}) = \mathrm{P}\{\phi(\mathbf{X}) = 1\}$$
$$= \{1-(1-p_1)(1-p_2)(1-p_3)\}\{1-(1-p_4)(1-p_5)\}. \tag{6}$$

3. TAKSIRAN UMUR SISTEM DAN BATAS MAKSIMAL RATAAN UMUR SISTEM PARALEL

3.1. TAKSIRAN UMUR SISTEM

Untuk variabel acak berdistribusi G, didefinisikan bahwa $\overline{G}(a) \equiv 1 - G(a)$, yang menyatakan peluang variabel acak lebih besar dari a. Pandang sistem yang komponen ke-i berfungsi untuk umur acak berdistribusi F_i dan selanjutnya tidak berfungsi. Maksudnya, komponen sekali tidak berfungsi, maka dianggap tidak akan berfungsi lagi. Jadi perbaikan sistem tidak diberlakukan. Dengan menganggap umur komponen tiap-tiap individu adalah independen. Maka distribusi umur sistem sebagai fungsi dari fungsi reliabilitas sistem r(**p**) dan distribusi umur komponen individu $F_i,\ i = 1,\dots,n$.

Sekarang perhatikan bahwa sistem akan berfungsi untuk umur t atau lebih besar jika dan hanya jika sistem masih berfungsi pada waktu t. Artinya, dengan mengambil F menyatakan distribusi umur sistem, didapat

$$\overline{\mathbf{F}}(t) = \mathrm{P}\{\text{Umur sistem} > \mathrm{t}\}$$
$$= \mathrm{P}\{\text{Sistem berfungsi pada waktu t}\}.$$

Karena menurut definisi r(**p**),

$$\mathrm{P}\{\text{Sistem berfungsi pada waktu t}\} = r(p_1(t),\dots,p_n(t))$$

dengan $p_i(t) = \mathrm{P}\{\text{Komponen i berfungsi pada waktu t}\} = \mathrm{P}\{\text{Umur i} > \mathrm{t}\} = \overline{F}_i(t)$.

Sehingga $\overline{\mathbf{F}}(t) = r(\overline{F}_1(t),\dots,\overline{F}_n(t))$. Akibatnya untuk sistem seri berlaku

$$\overline{\mathbf{F}}(t) = \prod_{i=1}^{n}\overline{F}_i(t). \tag{7}$$

Umur sistem seri berlaku umur minimal komponen. Dengan kata lain, umur sistem seri lebih besar t jika dan hanya jika umur semua komponennya lebih besar t. Sedangkan dalam sistem paralel berlaku

$$\overline{\mathbf{F}}(t) = 1 - \prod_{i=1}^{n} F_i(t)\,. \tag{8}$$

Umur sistem paralel berlaku umur maksimal komponen. Dengan kata lain, umur sistem paralel lebih besar t jika dan hanya jika terdapat umur komponen yang lebih besar t.

Selanjutnya disajikan rataan umur sistem dapat ditentukan dari fungsi reliabilitas r(**p**) dan distribusi umur komponen $F_i,\ i = 1,\ldots,n$. Karena umur sistem akan berumur t atau lebih jika dan hanya jika sistem masih berfungsi pada waktu t, diperoleh

$$P\{\text{Umur sistem} \geq \text{t}\} = r(\overline{\mathbf{F}}(t))$$

dengan $\overline{\mathbf{F}}(t) = (\overline{F}_1(t),\ldots,\overline{F}_n(t))$. Maka untuk sembarang variabel acak tak negatif X, berlaku $E[X] = \int_0^\infty \mathrm{P}\{X \geq x\}\, dx$. Dalam hal ini berarti bahwa

$$E[\text{Umur sistem}] = \int_0^\infty r(\overline{\mathbf{F}}(t))\, dt. \tag{9}$$

Misal sistem seperti pada Gambar 1, diasumsikan setiap komponennya adalah independen dan berdistribusi seragam atas (α,β). Maka

$$\overline{F}_i(t) = \begin{cases} 1 - \dfrac{t}{\beta}, & \alpha \leq t < \beta \\ 0, & t > \beta. \end{cases} \tag{10}$$

Berdasarkan Persamaan (6) dan (10), didapat

$$r(\overline{\mathbf{F}}(t)) = \left\{1 - \frac{t^3}{\beta^3}\right\}\left\{1 - \frac{t^2}{\beta^2}\right\} \tag{11}$$

dan menurut Persamaan (9) dan (11), diperoleh bahwa rataan umur sistem adalah

$$E[\text{Umur sistem}] = \int_\alpha^\beta \left\{1 - \frac{t^3}{\beta^3}\right\}\left\{1 - \frac{t^2}{\beta^2}\right\} dt\,. \tag{12}$$

Jika sistem seperti pada Gambar 1, diasumsikan setiap komponen independen dan berdistribusi seragam atas (0,10) bulan. Maka

$$\overline{F}_i(t) = \begin{cases} 1 - \dfrac{t}{10}, & 0 \le t < 10 \\ 0, & t > 10 \end{cases}$$

dan rataan umur sistem ini adalah

$$\text{E[Umur sistem]} = \int_0^{10} \left(1 - \frac{t^2}{100} - \frac{t^3}{1000} + \frac{t^5}{100000} \right) dt = 5{,}833 \text{ bulan.}$$

3.2. BATAS MAKSIMAL RATAAN UMUR SISTEM PARALEL

Misal terdapat sistem paralel n komponen, yang mempunyai umur tidak harus independen. Umur sistem parallel dapat dinyatakan dengan $\text{maks}_i\ X_i$ dengan X_i adalah umur komponen i, $i = 1, \ldots, n$. Batas maksimal umur sistem, untuk sembarang konstanta c adalah $\text{maks}_i\ X_i \le c + \sum_{i=1}^{n} (X_i - c)^+$ dengan x^+ adalah bagian positif dari x, yaitu sama dengan x jika $x > 0$ dan sama dengan 0 jika $x \le 0$. Pertidaksamaan ini valid karena jika $\text{maks}\ X_i < c$ maka ruas kiri sama dengan $\text{maks}\ X_i$ dan ruas kanan sama dengan c. Sebaliknya, jika $X_{(n)} = \text{maks}\ X_i > c$ maka ruas kanan sekurang-kurangnya sebesar $c + (X_{(n)} - c) = X_{(n)}$. Dengan mengambil ekspektasinya didapat batas maksimal nilai harapan umur sistem $E\left[\text{maks}_i\ X_i\right] \le c + \sum_{i=1}^{n} E[(X_i - c)^+]$. Karena $(X_i - c)^+$ adalah variabel acak tak negatif, maka

$$\begin{aligned} E[(X_i - c)^+] &= \int_0^\infty P\{(X_i - c)^+ > x\}\, dx = \int_0^\infty P\{X_i - c > x\}\, dx \\ &= \int_c^\infty P\{X_i > y\}\, dy. \end{aligned}$$

Dengan demikian didapat

$$E\left[\text{maks}_i\ X_i\right] \le c + \sum_{i=1}^{n} \int_c^\infty P\{X_i > y\}\, dy. \qquad (13)$$

Karena ini benar untuk semua c, maka berarti diperoleh batas terbaik dengan mengambil c* sama dengan nilai yang meminimalkan ruas kanan di atas. Untuk menentukan nilai tersebut, diferensialkan ruas kanan terhadap c dan ambil hasil sama dengan 0, diperoleh

$$1-\sum_{i=i}^{n} P\{X_i > c\} = 0.$$

Akhirnya didapat nilai minimal c yaitu c^* sedemikian hingga $\sum_{i=i}^{n} P\{X_i > c^*\} = 1$.

Misal umur komponen ke-i berdistribusi seragam atas (α, β). Nilai minimal c yaitu c^* sedemikian hingga $1 = \sum_{i=1}^{n} P\{X_i > c^*\} = \sum_{i=1}^{n} \left(1-\frac{c^*}{\beta}\right)$, didapat

$$c^* = \beta - \frac{\beta}{n}. \tag{14}$$

dan menurut Persamaan (13), batas maksimal rataan umur sistem adalah

$$E\left[\max_i X_i\right] \le c^* + \sum_{i=1}^{n} \int_{c^*}^{\beta} \left(1-\frac{t}{\beta}\right) dt. \tag{15}$$

Untuk sistem seperti Gambar 1, misal umur komponen ke-i berdistribusi seragam atas (0,10) bulan. Pada sistem bagian I, nilai c^* = 20/3 dan batas maksimal rataan umur sistem adalah 20/3 + 3 $\int_{20/3}^{10} \left(1-\frac{t}{10}\right) dt$ = 8,333 bulan. Sedangkan pada sistem bagian II, nilai c^* = 5 dan batas maksimal rataan umur sistem adalah 5 + 2 $\int_{5}^{10} \left(1-\frac{t}{10}\right) dt$ = 7,5 bulan. Dengan demikian taksiran umur maksimal rataan sistem ini adalah 7,5 bulan, karena berupa sistem seri dari sistem paralel.

4. KESIMPULAN

Sistem dibentuk dari beberapa komponen. Rangkaiannya dapat secara seri atau paralel. Umur sistem dipengaruhi oleh umur komponen dan jenis rangkaiannya. Umur sistem seri berlaku umur minimal komponen. Sedangkan umur sistem paralel berlaku umur maksimal komponen. Taksiran umur sistem merupakan fungsi dari fungsi reliabilitasnya. Taksiran umur maksimal sistem seri dari sistem paralel sesuai dengan taksiran umur minimal sistem paralel. Dengan mengetahui taksiran umur sistem, maka dapat ditentukan waktu garansi dari produk tersebut.

DAFTAR PUSTAKA

Barlow, R.E., and Proschan, F., *Statistical Theory of Reliability and Life Testing*, Holt, New York, 1975.

Frank, H., and Frisch, I., *Communication, Transmission, and Transportation Network*, Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1971.

Gertsbakh, I.B., *Statistical Reliability Theory*, Marcel Dekker, New York and Basel, 1989.

Mahjan, M., *Statistical Quality Control*, Revised Edition, Dhanpart Rai & Sons, New Delhi, 1995.

Ross, S.M., *Introduction to Probability Models*, Sixth Edition, Academic Press, New York, 1997.

Ross, S.M., *Stochastic Processes*, Second Edition, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1996.