REFORMULASI DARI SOLUSI 3-SOLITON
UNTUK PERSAMAAN KORTEWEG-de VRIES

Dian Mustikaningsih dan Sutimin
Jurusan Matematika FMIPA Universitas Diponegoro

Abstract

The solution of 3-soliton for Korteweg-de Vries (KdV) equation can be obtained by the Hirota Method. The reformulation of the 3-soliton solution was represented as the superposition of the solution of each individual soliton. Moreover, the asymptotic form of 3-soliton solution was obtained by limiting of the t parameter. The phase shift of each individual soliton are analysed in detail based its asymptotic form. The results of the analysis shown that the first soliton always have a phase shift called forward, the second soliton have some possibility (there is no phase shift, have a forward phase shift, or have a backward phase shift), and for the third soliton always have a phase shift called backward.

Kata kunci : Soliton, fase, soliter.

1. PENDAHULUAN

Berbagai fenomena alam yang terdapat di sekitar kita, salah satu fenomena yang terjadi adalah gelombang. Meskipun mekanisme fisik untuk masing-masing proses dari gelombang-gelombang dapat berbeda, tetapi semuanya mempunyai gejala umum bahwa gelombang-gelombang tersebut disebabkan adanya gangguan fisik yang tidak putus-putus dan merambat melalui suatu medium. Gelombang merambat dengan kecepatan yang bergantung pada sifat medium.

Dalam tulisan ini dibahas sifat interaksi gelombang soliter yang dari persamaan Korteweg-deVries (KdV). Solusi soliter dan solusi multi soliton (solusi 3-soliton) dari persamaan KdV digunakan metode hirota (operator bilinier hirota). Solusi 3-soliton ini selanjutnya akan dinyatakan sebagai reformulasi dari superposisi individu soliton dan akan dianalisis pergeseran fase untuk masing –masing soliton.

2. GELOMBANG SOLITER UNTUK PERSAMAAN KORTEWEG-DE VRIES

Gelombang soliter merupakan gelombang tunggal yang merambat dengan satu puncak gelombang, tanpa mengalami perubahan bentuk dan kecepatan baik sebelum maupun sesudah tumbukan. Profil dari gelombang soliter merupakan fungsi sech.

Untuk menjelaskan gelombang soliter ini, diberikan suatu persamaan Korteweg-deVries (KdV). Dalam bentuk normal, persamaan KdV adalah

$$u_t – 6uux + uxxx = 0 . \qquad (1)$$

Selanjutnya, untuk menyelesaikan persamaan KdV didefinisikan transformasi koordinat bergantung,

u(x,t) = ((x – ct) = ((() (2)

dengan (= x – ct, c konstanta sebarang. Jika persamaan (2) didifferensialkan ke-t diperoleh dan ke-x, kemudian disubstitusikan ke persamaan KdV (1) maka diperoleh

. (3)

Dengan mengintegralkan persamaan (3) sebanyak 2 kali dan menggunakan syarat untuk (((((syarat batas untuk gelombang soliter) diperoleh

(4)

atau

(5)

Solusi akan diperoleh jika (0, dan (2(+ c) (0 . Dengan menyelesaikan persamaan (5) diperoleh

. (6)

Sehingga solusi gelombang soliter dari persamaan KdV adalah

. (7)

Profil gelombang dari persamaan (7) untuk u positif diperlihatkan pada gambar 1, dengan c = ¼.

Gambar 1. Profil gelombang soliter pada
t = – 50 dan t = 50, yang merambat dalam arah x

3. SOLUSI 3-SOLITON DARI PERSAMAAN KDV DENGAN METODE HIROTA

Misalkan solusi gelombang soliter $u = w_x$, maka persamaan KdV dapat ditulis menjadi

$$w_{xt} – 6w_x w_{xx} + w_{xxxx} = 0, \qquad (8)$$

kemudian apabila diintegralkan terhadap x dan menggunakan syarat w_t , w_x , w_{xx} , …(0 untuk x (((maka persamaan (12) dapat ditulis menjadi

$$w_t – 3w_x^2 + w_{xxx} = 0. \qquad (9)$$

Dengan mengambil dan didifferensialkan terhadap x dan t, maka diperoleh persamaan KdV hirota

(10)

Dengan menggunakan operator bilinier

(11)

maka persamaan (10) menjadi

$$B\ ((.(\ )\ = D_x\ (\ D_t + D_x^3\ )\ ((.(\ ) = 2.\ 0 = 0 \qquad (12)$$

yang merupakan bentuk bilinear dari persamaan KdV.

Solusi gelombang soliter dapat digeneralisasi ke solusi N-soliton, yang lebih mudah diselesaikan dengan mengambil parameter sebarang (, misalkan solusi N-soliton secara umum dapat ditulis

(13)

dengan (14)

dan (15)

dimana , n = 1, 2, 3, …. apabila persamaan (15) disubstitusikan ke persamaan (16) maka diperoleh

(16)

dimana

Jika diasumsikan dan karena (sebarang parameter maka (^{r} (r = 1,2,…) tidak identik dengan nol sehingga persamaan (16) dapat dinyatakan oleh

B (1.1) = 0, (17)

B (($_1$.1 + 1.($_1$) = 0, (18)

B(($_2$.1 + ($_1$.($_1$ + 1.($_2$) = 0, (19)

B(($_3$.1 + ($_2$.($_1$ + ($_1$.($_2$ + 1.($_3$) = 0, (20)

begitu seterusnya.

Karena , maka B (($_n$.1) =

B (1.($_n$), dan B(($_n$.($_{n+1}$) = B(($_{n+1}$.($_n$), untuk n = 1, 2, 3,… sehingga dari persamaan (17) – (20) dapat ditulis menjadi

D($_1$ = 0, (21)

2 D($_2$ = - B(($_1$.($_1$), (22)

D($_3$ = - B(($_1$.($_2$). (23)

Menurut persamaan (15), dimisalkan

(24)

dengan variabel fase Substitusi ($_1$ ke persamaan (21), diperoleh

(25)

Persamaan (25) akan menentukan relasi dispersi non linier untuk solusi 3-soliton sehingga variabel fase dapat ditulis menjadi

Apabila ($_1$ disubstitusikan ke persamaan (22) maka

(26)

Kemudian apabila persamaan (26) diintegralkan terhadap x dan t untuk menghilangkan operator D maka diperoleh

(27)

(28)

Dengan cara yang sama untuk memperoleh ($_3$

(36)

(37)

Substitusi ($_1$, ($_2$, dan ($_3$ ke persamaan (14) dengan mengambil (= 1 dan ($_n$ = 0, n = 4, 5, …, diperoleh

(38)

Dengan mengambil sehingga persamaan (38) dapat ditulis menjadi

(39)

dimana A_{12}, A_{13}, A_{23}, dan A_{123} dinyatakan pada persamaan (29) dan (37). Menurut persamaan (18), maka solusi 3-soliton dari persamaan KdV adalah

(40)

dengan (dinyatakan pada persamaan (40) dan

(41)

Profil gelombang untuk solusi 3-soliton dari persamaan KdV diperlihatkan pada gambar 2 – 4, dengan mengambil

Gambar 2. Profil gelombang dari solusi 3-soliton pada t=–30 (sebelum tumbukan)

Gambar 3. Profil gelombang dari solusi 3-soliton pada t = 0 (saat tumbukan)

Gambar 4. Profil gelombang dari solusi 3-soliton pada t = 30 (setelah tumbukan)

4. REFORMULASI SOLUSI 3-SOLITON

Solusi 3-soliton dari persamaan KdV pada persamaan 3.48 dapat dinyatakan sebagai superposisi soliton individu.

Proposisi :

Solusi N-soliton (N = 3) dari persamaan KdV ditulis dalam bentuk

(42)

(43)

(44)

(45)

Bukti :
Dari persamaan (39), persamaan (45) dapat ditulis menjadi

kemudian jika diatas disubstitusikan ke persamaan (44) diperoleh

,

, (47)

.

Perhatikan bahwa,

(48)

Apabila persamaan (48) dikalikan dengan dua dan didiferensialkan terhadap x, maka

(49)

diperoleh

. (51)

5. BENTUK ASYMPTOTIK SOLUSI 3-SOLITON

Dalam pembahasan bentuk asymptotik dari solusi 3-soliton akan ditinjau perambatan gelombang pada transformasi koordinat bergerak dengan mengambil parameter t (((.

. (52)

Untuk konstan, , maka diperoleh

(53)

yang ekuivalen dengan solusi soliton pertama tanpa mengalami pergeseran fase.

Untuk konstan maka diperoleh

(54)

yang ekuivalen dengan solusi soliton kedua yang mengalami perubahan fase sebesar .

Untuk konstan maka diperoleh

(55)

yang ekuivalen dengan solusi soliton ketiga yang mengalami pergeseran fase sebesar .

Dengan cara yang sama, diperoleh

(56)

6. PERGESERAN FASE SOLUSI 3-SOLITON

Pergeseran fase merupakan perubahan arah fase masing-masing soliton sebelum dan sesudah tumbukan terhadap soliton yang lain. Pergeseran fase ini dijelaskan terhadap arah sumbu x karena gelombang soliton berjalan sepanjang sumbu x. Misal ($_n$ menyatakan pergeseran fase soliton ke-n (n=1, 2, 3) antara t = (((sebelum tumbukan) dan t = ((setelah tumbukan), maka pergeseran fase dapat dihitung melalui bentuk asymptotik atau limit-limit asymptotik.

Menurut persamaan (53) maka pada t = ((soliton ke pertama tidak mengalami pergeseran fase (($_{(t (-()}$ = 0) sedangkan menurut persamaan (56) maka pada t = (soliton pertama mengalami pergeseran fase (($_{(t (()}$) sebesar

sehingga diperoleh

(57)

Dengan cara yang sama akan diperoleh pergeseran fase soliton kedua dan ketiga masing – masing adalah sebagai berikut:

(58)

Jika $0 < A_{ij} < 1$ dengan i = 1, 2, 3 dan j = 1, 2, 3 maka $(_1 > 0$, mengakibatkan u_1 selalu mengalami pergeseran fase maju sepanjang sumbu x dan $(_3 < 0$, mengakibatkan u_3 selalu mengalami pergeseran fase mundur, $(_2$ mempunyai beberapa kemungkinan, sebagai berikut :

1) $(_2$ bernilai nol, jika $\ln A_{12} = \ln A_{23}$ atau yaitu u_2 tidak mengalami pergeseran fase .

2) $(_2$ bernilai positif, jika $\ln A_{12} > \ln A_{23}$ atau , yang mengakibatkan u_2 mengalami pergeseran fase maju.

3) $(_2$ bernilai negatif, jika $\ln A_{12} < \ln A_{23}$ atau , yang mengakibatkan u_2 mengalami pergeseran fase mundur.

7. KESIMPULAN

Solusi 3-soliton dari persamaan Korteweg-de Vries (KdV) dapat diperoleh dengan Metode Hirota. Reformulasi solusi 3-soliton dinyatakan sebagai superposisi solusi masing-masing individu soliton. Sedangkan bentuk asymptotik solusi 3-soliton diperoleh melalui proses pelimitan terhadap parameter t. Pergeseran fase dari masing-masing individu soliton dibahas secara detail berdasarkan bentuk asymptotiknya. Soliton pertama dan ketiga selalu mengalami pergeseran fase karena selisih antara pergeseran fase sebelum dan setelah tumbukan tidak pernah nol, dimana soliton pertama mengalami pergeseran fase maju dan soliton ketiga mengalami pergeseran fase mundur. Soliton kedua tidak selalu mengalami pergeseran fase karena selisih antara pergeseran fase sebelum dan setelah tumbukan dapat bernilai nol, tergantung pada bilangan gelombang individu soliton, dimana apabila kuadrat bilangan gelombang soliton kedua sama dengan hasil kali bilangan gelombang soliton pertama dan ketiga maka soliton kedua tidak mengalami pergeseran fase, apabila kuadrat bilangan gelombang soliton kedua lebih kecil dari hasil kali bilangan gelombang soliton pertama dan ketiga maka soliton kedua mengalami pergeseran fase maju, dan apabila kuadrat bilangan gelombang soliton kedua lebih besar dari hasil kali bilangan gelombang soliton pertama dan ketiga maka soliton kedua mengalami pergeseran fase mundur.

DAFTAR PUSTAKA

1. Alonso, Marcelo, *Fundamental University Physic*, 2nd Editions, Addison-Werlag Publishing Com Inc, Washington D. C, 1980, 232-241, 253-255..
2. Ayres F. Jr, *Teori dan Soal-Soal Diferensial dan Integral Kalkulus*, Erlangga, Jakarta, 1998, Edisi 2, 264-265, 269-270
3. Baisuri H. M, *Kalkulus*, Universitas Indonesia Press, Jakarta, 1986, 431-441, 459-461.
4. Bullough R. K, Laudrey P. J, *Solitons*, Springer-Verlag Berlin, Heidelberg, New York, 1980, 1-13, 65-67, 157-167, 373-375.
5. Drazin P. G, Johnson R. S, *Solitons : Analisis Introduction*, Cambridge University Press, New York, 1990.1-16, 21-22, 73-81, 102-109.
6. Haeussler E. F, Jr, Paul R, *Introductory Mathematical Analysis*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1983, 959-961,
7. Heck, Andre, *Introduction of Maple with 84 Illustrations*, Springe-Verlag, New York, 1993.
8. Humi, Mayer, and Miller W. B, *Boundary Value Problems And Partial Differential Equations*, PWS-KENT Publishing Co, Boston, 1991, 36-40.
9. Logan J. D, *An Introduction to Nonlinear Partial Differential Equations*, A Wiley-Interscience Publication, John Wiley & Sons Inc, New York, 1981, 1-9, 36-47, 116-121.
10. Toda, Morikazi, *Mathematic and Its Aplications Non Linear Waves and Solitons*, Kluwer Akademic Publishers, Norwell, 1983, 47-70, 143-147, 163-172.