

BIDANG DAN GARIS



Oleh:
Drs. Putut Sriwasito

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS DIPONEGORO
TAHUN 2007

UPT-PUSTAK-UNDIP	
No. Daft:	251/KY/FMIPA/C1
Tgl.	5-1-09

Bidang dan Garis

Putut Sriwasito

Jurusan Matematika, Fakultas MIPA, Universitas Diponegoro, Semarang

Abstrak : Pembahasan pada ruang dimensi dua dimulai dengan garis tanpa membahas bidang. Pada tulisan ini dengan domain dimensi tiga pembahasan dimulai dengan bidang, selanjutnya garis disajikan sebagai perpotongan dua buah bidang. Tulisan ini membahas kedudukan antara bidang dan garis, serta algoritma mengkonstruksikan sebuah bidang.

Kata kunci : Bilangan arah, Penyajian simultan dua bidang, sejajar dan tegak lurus.

1. Bidang Datar

1.1. Persamaan Umum Bidang Datar

Definisi 1 :

Sebuah bidang disebut **Bidang Datar** bila dan hanya bila setiap diambil dua titik pada bidang maka garis yang menghubungkan kedua titik tersebut seluruhnya terletak pada bidang, untuk selanjutnya Bidang Datar disebut **Bidang**.^[1]

Dalam analit datar suatu persamaan derajat-1 menyajikan suatu garis lurus, sedang persamaan derajat > 1 menyajikan suatu garis lengkung, analog dengan kriterium tersebut maka suatu persamaan derajat-1 dengan tiga peubah x , y dan z menyatakan suatu bidang datar, sehingga persamaan bidang datar "diduga" disajikan sebagai :

$\mu : Ax + By + Cz + D = 0$, A , B dan C sebarang bilangan riil ... (1).

Untuk memeriksa dugaan tersebut dilakukan dengan cara sebagai berikut :

Ambil 2 titik sebarang $P (x_1, y_1, z_1)$ dan $Q (x_2, y_2, z_2)$ pada bidang μ maka dipenuhi :

$$(1) Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0$$

$$(2) Ax_2 + By_2 + Cz_2 + D = 0,$$

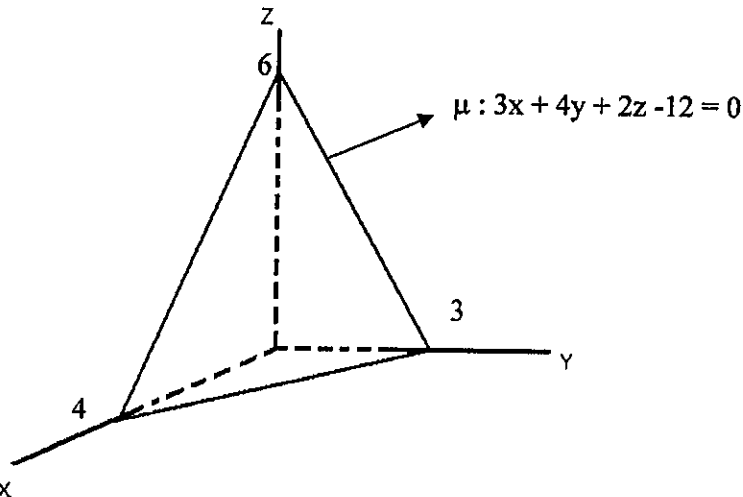
Dilain pihak untuk sebarang titik $R (x, y, z)$ yang terletak pada garis PQ maka nilai x , y dan z dapat disajikan sebagai kombinasi linier dari x_1 dan x_2 , y_1 dan y_2 serta z_1 dan z_2 dengan demikian pasti memenuhi persamaan (1) diatas. Pemeriksaan selesai.

1.2. Penyajian Bidang secara grafis.

Secara grafis bidang dapat disajikan yaitu dengan memotongkan bidang tersebut dengan sumbu-sumbu koordinat, setiap dipotongkan dengan sebarang sumbu dianggap sumbu yang lain samadengan nol (0).

Contoh : $\mu : 3x + 4y + 2z - 12 = 0$

- Titik potong dengan sumbu x , jika $y=z=0$ adalah $3x = 12 \rightarrow x = 4$
- Titik potong dengan sumbu y , jika $x=z=0$ adalah $4y = 12 \rightarrow y = 3$
- Titik potong dengan sumbu z , jika $x=y=0$ adalah $2z = 12 \rightarrow z = 6$



Gambar 1 Gambar bidang datar di oktan I

1.3. Beberapa kedudukan istimewa :

Dengan memperhatikan 1.1. dan 1.2. dapat ditentukan beberapa kedudukan istimewa dari suatu bidang :

- 1.3.1. $\mu : Ax + By + Cz = 0 \rightarrow \mu$ melalui titik pusat sumbu $O (0,0,0)$.
- 1.3.2. $\mu : Ax + By + D = 0 \rightarrow \mu \perp$ bidang XY atau $\mu //$ sumbu Z
- 1.3.3. $\mu : Ax + Cz + D = 0 \rightarrow \mu \perp$ bidang XZ atau $\mu //$ sumbu Y
- 1.3.4. $\mu : By + Cz + D = 0 \rightarrow \mu \perp$ bidang YZ atau $\mu //$ sumbu X
- 1.3.5. $\mu : Ax + D = 0 \rightarrow \mu \perp$ bidang XY dan $\mu //$ bidang YZ
- 1.3.6. $\mu : By + D = 0 \rightarrow \mu \perp$ bidang XY dan $\mu //$ bidang XZ
- 1.3.7. $\mu : Cz + D = 0 \rightarrow \mu \perp$ bidang YZ dan $\mu //$ bidang XY

1.4. Bilangan arah dan cosinus arah :

Sesuai 1.1. maka persamaan bidang disajikan sebagai :

$\mu : Ax + By + Cz + D = 0$, A , B dan C sebarang bilangan riil dan $A^2+B^2+C^2 \neq 0$, para koefisien x , y dan z yaitu A , B dan C disebut **bilangan arah** dari bidang μ .

Analog dengan tangen arah pada garis di ruang dimensi 2 maka pada bidang di ruang dimensi 3 dikenal **Cosinus arah**, yaitu :

$$\text{Cos } \alpha = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \dots (2)$$

$$\text{Cos } \beta = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \dots (3)$$

$$\text{Cos } \delta = \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \dots (4)$$

perhatikan bahwa $\text{Cos}^2 \alpha + \text{Cos}^2 \beta + \text{Cos}^2 \delta = 1$, α , β dan δ adalah sudut-sudut bidang μ dengan bidang-bidang koordinat XY , YZ dan XZ .

1.5. Bidang yang melalui sebuah titik $P (x_1, y_1, z_1)$:

Sesuai 1.1. bidang yang melalui sebuah titik $P (x_1, y_1, z_1)$ disajikan sebagai :

$\mu : A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0 \dots (2)$, terlihat bahwa sebuah titik **tidak cukup** untuk mengkonstruksikan sebuah bidang.

Persamaan (2) diatas memiliki 3 peubah yaitu A, B dan C.

Mudah dipahami bahwa jika syarat diatas ditambah dengan : bidang μ melalui 2 titik yang lain semisal Q (x_2, y_2, z_2) dan R (x_3, y_3, z_3) maka A, B dan C dapat ditentukan dari :

$$\begin{vmatrix} A & B & C \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} A & B \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}, \text{ dengan demikian :}$$

$$A = \{ (y_2 - y_1)(z_3 - z_1) - (y_3 - y_1)(z_2 - z_1) \} \dots (5)$$

$$B = \{ (z_2 - z_1)(x_3 - x_1) - (z_3 - z_1)(x_2 - x_1) \} \dots (6)$$

$$C = \{ (x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1) \} \dots (7)$$

1.6. Kedudukan dua bidang

Pandang bidang $\mu_1 : A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0$ dan $\mu_2 : A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0$ maka sesuai 1.4. kedudukan antara kedua bidang μ_1 dan μ_2 ditentukan oleh para bilangan arahnya^[2] maka jika sudut antara μ_1 dan μ_2 adalah θ maka :

$$1.6.1. \cos \theta = \frac{A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}} \dots (8)$$

$$1.6.2. \text{Sebidang jika dan hanya jika : } \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2} \dots (9)$$

$$1.6.3. \text{Sejajar jika dan hanya jika : } \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \neq \frac{D_1}{D_2} \dots (10)$$

$$1.6.4. \text{Tegak lurus jika dan hanya jika : } A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2 = 0 \dots (11)$$

2. Garis lurus

2.1. Persamaan Umum garis lurus

Definisi 2 :

Garis lurus adalah hasil perpotongan antara dua bidang datar^[1]

Sesuai definisi 2 diatas, jika dikaitkan dengan "jarak" maka garis lurus dapat di definisikan sebagai "jarak terpendek" antara dua titik.

Untuk selanjutnya garis lurus cukup di sebut sebagai garis saja.

2.2. Persamaan Umum Garis

Sesuai definisi 2 maka secara umum persamaan garis dapat disajikan sebagai dua persamaan bidang secara simultan.

Garis g yang merupakan perpotongan antara $\mu_1 : A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0$ dan $\mu_2 : A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0$ disajikan sebagai :

$$g : \begin{cases} A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0 \\ A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0 \end{cases} \dots (12)$$

2.3. Para bilangan arah garis g

Jika garis g disajikan sebagai dua persamaan bidang seperti pada persamaan (12) dan para bilangan arah dari garis g adalah l, m dan n maka :

$$l = \begin{vmatrix} B1 & C1 \\ B2 & C2 \end{vmatrix} \dots (13), m = \begin{vmatrix} C1 & A1 \\ C2 & A2 \end{vmatrix} \dots (14) \text{ dan } n = \begin{vmatrix} A1 & B1 \\ A2 & B2 \end{vmatrix} \dots (15)$$

2.4. Persamaan garis melalui dua titik P (x₁,y₁,z₁) dan Q (x₂,y₂,z₂)

Penggal garis PQ merupakan "jarak" terpendek antara titik P dan titik Q maka persamaan garis PQ dapat disajikan sebagai :

$$PQ : \frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1} \dots (16)$$

Para bilangan arah garis PQ adalah : (x₂ - x₁), (y₂ - y₁) dan (z₂ - z₁).

2.5. Sebuah garis yang melalui sebuah titik P (x₁,y₁,z₁) dengan bilangan arah l, m dan n.

Sesuai persamaan (12) maka garis g tersebut memiliki persamaan :

$$g : \frac{x-x_1}{l} = \frac{y-y_1}{m} = \frac{z-z_1}{n} \dots (17)$$

2.6. Kedudukan antara dua garis

Pandang dua garis yaitu garis g₁ dengan bilangan arah l₁, m₁ dan n₁ serta garis g₂ dengan bilangan arah l₂, m₂ dan n₂. sedang sudut antara g₁ dan g₂ adalah θ maka kedudukan garis g₁ dan g₂ ditentukan oleh hubungan para bilangan arahnya^[2]

$$2.6.1. \cos \theta = \frac{l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2} \sqrt{l_2^2 + m_2^2 + n_2^2}} \dots (18)$$

$$2.6.1. \text{Sejajar jika dan hanya jika : } \frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} \dots (19)$$

$$2.6.2. \text{Tegak lurus jika dan hanya jika : } A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2 = 0 \dots (20a)$$

Perhatikan bahwa bila kedua garis sejajar maka kedua garis tersebut sebidang.

Jika kedua garis tersebut masing-masing melalui titik P (x₁,y₁,z₁) dan Q (x₂,y₂,z₂) maka kedua garis tersebut bersilangan bila dan hanya bila :

$$\begin{vmatrix} (x_2-x_1) & (y_2-y_1) & (z_2-z_1) \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} \neq 0 \dots (20b)$$

3. Garis dan bidang

Sesuai persamaan (1) maka sebuah bidang disajikan sebagai persamaan linier dengan tiga peubah yaitu x, y dan z, sedang sebuah garis dapat disajikan dengan dua persamaan bidang, sehingga untuk menentukan kedudukan antara sebuah bidang dengan sebuah garis tidak lain adalah menentukan himpunan penyelesaian dari sistem persamaan linier yang terdiri atas tiga persamaan dengan tiga peubah x, y dan z. Sistem persamaan linier tersebut dapat disajikan dalam bentuk matriks :

$$A_{3 \times 3} X_{3 \times 1} = B_{3 \times 1} \text{ yang jenis akarnya dapat ditentukan dari rank matriks } A = r(A).$$

3.1. r(A) = r (A | B) = 3 jika dan hanya jika terdapat penyelesaian tunggal garis menembus bidang di satu titik.

3.2. r(A) = r (A | B) < 3 jika dan hanya jika terdapat penyelesaian tidak tunggal garis terletak pada bidang.

3.3. r(A) ≠ r (A | B) jika dan hanya jika tidak terdapat penyelesaian

garis sejajar bidang di satu titik.

Dilain fihak jika bidang $\mu : Ax + By + Cz + D = 0$ sedang -

garis $g : \frac{x-x_1}{l} = \frac{y-y_1}{m} = \frac{z-z_1}{n}$ dan sudut antara μ dan g adalah θ maka sudut antara μ dan g sama dengan sudut antara garis-garis normalnya^[3] maka :

$$\sin \theta = \frac{Al + Bm + Cn}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \sqrt{l^2 + m^2 + n^2}} \dots (21)$$

3.4. μ sejajar g bila dan hanya bila $Al + Bm + Cn = 0$... (22)

3.5. μ tegak lurus g bila dan hanya bila $\frac{A}{l} = \frac{B}{m} = \frac{C}{n}$... (23)

3.6. Melalui garis g dapat dibuat berkas bidang yaitu koleksibidang-bidang yang melalui garis g .^[3]

$$\text{Jika garis } g : \begin{cases} \mu_1 = 0 \\ \mu_2 = 0 \end{cases}, \text{ berkas bidang } \Psi : \mu_1 + \lambda\mu_2 = 0 \dots (24)$$

4. Mengkontruksikan sebuah bidang

4.1. Melalui tiga titik yang tidak segaris.

Algoritma penyelesaian :

- (1). Periksa apakah ketiga titik segaris, bila "TIDAK" lanjutkan kelangkah (2) bila "YA" maka tidak dapat dibuat bidang melalui ketiga titik tersebut
- (2). Gunakan persamaan (2) untuk mengkontruksikan bidang melalui titik P, karena bidang juga melalui titik Q dan R maka akan diperoleh 2 persamaan linier dengan 3 peubah yang tidak bergantung linier, sehingga diperoleh hubungan antara ketiga peubahnya, nilai masing-masing peubah dapat ditentukan maka dapat dikonstruksikan bidang yang dimaksud.

Contoh :

1. Tentukan bidang μ yang melalui titik-titik P (1,1,1), Q (2,2,2) dan R (3,3,3).

Penyelesaian :

Langkah 1 : Pemeriksaan kedudukan titik-titik P, Q dan R

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{b_2-2b_1, b_3-3b_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ terlihat bahwa titik R dapat dinyatakan}$$

sebagai titik P dan Q yaitu : $[3,3,3] = [1,1,1] + [2,2,2]$ maka P, Q dan R segaris

→ Tidak dapat dibuat bidang μ yang melalui titik-titik P, Q dan R

2. Tentukan bidang μ yang melalui titik-titik P (1,1,1), Q (2,2,2) dan R (2,3,4).

Penyelesaian :

Langkah 1 : Pemeriksaan kedudukan titik-titik P, Q dan R

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{b_2-2b_1, b_3-2b_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \text{ terlihat bahwa titik R tidak dapat dinyatakan}$$

sebagai titik P dan Q

→ Dapat dibuat bidang μ yang melalui titik-titik P, Q dan R.

Langkah 2 : mengkontruksikan bidang μ

Bidang μ melalui titik P (1,1,1) maka sesuai persamaan (1)
 bidang μ : $A (x-1) + B (y-1) + C (z-1) = 0 \dots$ (i)
 bidang μ melalui titik Q (2,2,2) berlaku : $A + B + C = 0 \dots$ (ii)
 bidang μ melalui titik R (2,3,4) berlaku : $A + 2B + 3C = 0 \dots$ (iii)
 dari (ii) dan (iii) kita peroleh : $B = -2C$ dan $A = C$ sehingga untuk $C = 1$ maka
 $A = 1$ dan $B = -2$ maka sesuai persamaan (i) bidang μ : $x - 2y + z = 0$
 Langkah 3 : pemeriksaan jawaban
 bidang μ melalui P (1,1,1), ruas kiri = $1 - 2 + 1 = 0$
 bidang μ melalui Q (2,2,2), ruas kiri = $2 - 4 + 2 = 0$
 bidang μ melalui R (2,3,4), ruas kiri = $2 - 6 + 4 = 0$

4.2. Melalui sebuah garis dan sebuah titik diluar garis.

Algoritma penyelesaian :

(1). Periksa apakah titik berada di luar garis, bila "YA" lanjutkan kelangkah (2) bila "TIDAK" maka tidak dapat dibuat bidang melalui garis dan titik tersebut

(2.1.). Algoritma 1 :

(2.1.a.). Ambil 2 titik Q dan R pada garis

(2.1.b.). Kontruksikan bidang melalui titik P (diluar garis g) dan titik-titik Q dan R

(2.2.). Algoritma 2 :

(2.2.a.). Buat berkas bidang melalui garis g, gunakan parameter λ

(2.2.b.). Karena bidang melalui titik P maka parameter λ dapat ditentukan sehingga dapat dikonstruksikan bidang yang dimaksud.

Contoh :

3. Tentukan bidang μ yang melalui garis g : $\begin{cases} x - 2y + z = 2 \\ 4x + 3y - z = -1 \end{cases}$ dan P (0,1,4)

Penyelesaian :

Langkah 1 : Pemeriksaan kedudukan titik P terhadap garis g.

Ruas kiri 1 : $0 - 2 + 4 = 2 =$ ruas kanan 1

Ruas kiri 2 : $0 + 3 - 4 = -1 =$ ruas kanan 2

Jadi titik P (0,1,4) terletak pada garis g

→ Tidak dapat dibuat bidang μ yang melalui garis g dan titik P.

4. Tentukan bidang μ yang melalui g : $\begin{cases} x - 2y + z = 2 \\ 4x + 3y - z = -1 \end{cases}$ dan P (2,3,4)

Penyelesaian :

Langkah 1 : Pemeriksaan kedudukan titik P terhadap garis g.

Ruas kiri 1 : $2 - 6 + 4 = 0 \neq$ ruas kanan 1 = 2

Jadi titik P (2,3,4) terletak diluar garis g

→ Dapat dibuat bidang μ yang melalui garis g dan titik P

Langkah 2 : mengkontruksikan bidang μ

Algoritma 1 :

a. Dicari 2 titik Q dan R pada garis g

b. Dikontruksikan bidang melauai 3 titik P, Q dan R

Penyelesaian sesuai algoritma 1 :

Pandang 2 persamaan : (i) $x - 2y + z = 2$

(ii) $4x + 3y - z = -1,$

Dari (i) dan (ii) diperoleh : $5x + y = 1$ sehingga $y = 1 - 5x$ dan $z = 4 - 11x$

Untuk $x = 0$ maka titik Q (0,1,4)

Untuk $x = 1$ maka titik R (1,-4,-7)

Bidang μ melalui titik P (2,3,4) maka sesuai persamaan (1)

bidang μ : $A(x-2) + B(y-3) + C(z-4) = 0 \dots$ (iv)

bidang μ melalui titik Q (0,1,4) berlaku : $-2A - 2B = 0$ maka $A + B = 0$
atau $B = -A \dots$ (v)

bidang μ melalui titik R (1,-4,-7) berlaku : $-A - 7B - 11C = 0$

$$-A + 7A - 11C = 0$$

$$C = \frac{6A}{11} \dots \text{(vi)}$$

Untuk $A = 11$ maka $B = -11$ dan $C = 6$.

Sesuai persamaan (iv) bidang μ : $11(x-2) - 11(y-3) + 6(z-4) = 0$

bidang μ : $11x - 22 - 11y + 33 + 6z - 24 = 0$

bidang μ : $11x - 11y + 6z - 13 = 0$

Langkah 3 : pemeriksaan jawaban

bidang μ melalui P (2,3,4), ruas kiri = $22 - 33 + 24 - 13 = 0$

bidang μ melalui Q (0,1,4), ruas kiri = $0 - 11 + 24 - 13 = 0$

bidang μ melalui R (1,-4,-7), ruas kiri = $11 + 44 - 42 - 13 = 0$

Algoritma 2 :

a. Digunakan berkas bidang lewat garis g dengan parameter λ

b. Berkas melalui titik P (2,3,4), diperoleh nilai parameter λ , didapat bidang μ .

Penyelesaian sesuai algoritma 2 :

Pandang persamaan berkas : $\Psi : \mu_1 + \lambda\mu_2 = 0$

$\Psi : x - 2y + z - 2 + \lambda(4x + 3y - z + 1) = 0$

$$(1+4\lambda)x + (-2+3\lambda)y + (1-\lambda)z + (-2+\lambda) = 0 \dots \text{(i)}$$

Berkas melalui titik P (2,3,4) maka dipenuhi : $2 + 8\lambda - 6 + 9\lambda + 4 - 4\lambda - 2 + \lambda = 0$

$14\lambda - 2 = 0$ maka $\lambda = \frac{1}{7}$, dengan demikian bidang yang dimaksud adalah :

$$\mu : \left(1 + \frac{4}{7}\right)x + \left(-2 + \frac{3}{7}\right)y + \left(1 - \frac{1}{7}\right)z + \left(-2 + \frac{1}{7}\right) = 0$$

$$\mu : 11x - 11y + 6z - 13 = 0$$

4.3. Melalui dua garis yang sebidang :

Algoritma penyelesaian :

(1). Periksa apakah kedua garis tersebut sebidang, bila "YA" lanjutkan kelangkah (2) bila "TIDAK" maka tidak dapat dibuat bidang melalui kedua garis tersebut

(2). Buat berkas bidang melalui salah satu garis yang ada, gunakan parameter λ

Ambil sebarang titik pada garis yang lain namakan titik P, karena bidang melalui titik P maka parameter λ dapat ditentukan sehingga dapat dikonstruksikan bidang yang dimaksud.

Contoh :

5. Tentukan bidang μ yang melalui garis $g_1 : \frac{x+3}{-4} = \frac{y-6}{3} = \frac{z}{2}$ dan

$$\text{garis } g_2 : \frac{x+2}{-4} = \frac{y}{1} = \frac{z-7}{1}$$

Penyelesaian :

(1) Pemeriksaan apakah garis g_1 dan g_2 sebidang :

Sesuai persamaan (20b) maka :

$$\begin{vmatrix} -1 & -6 & -7 \\ -4 & 3 & 2 \\ -4 & 1 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{b_2-4, b_3-4} \begin{vmatrix} -1 & -6 & -7 \\ 0 & 27 & 30 \\ 0 & 25 & 29 \end{vmatrix} = -1 \begin{vmatrix} 27 & 30 \\ 25 & 29 \end{vmatrix} = -1 (783-750) = -33 \neq 0$$

maka garis g_1 dan g_2 tidak sebidang sehingga tidak dapat dibuat bidang μ

6. Tentukan bidang μ yang melalui garis g_1 : $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{4}$ dan

$$\text{Garis } g_2 : \frac{x-2}{3} = \frac{y-3}{4} = \frac{z-4}{5}$$

Penyelesaian :

(1) Pemeriksaan apakah garis g_1 dan g_2 berpotongan :

Sesuai persamaan (20b) maka :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} \xrightarrow{b_2-2b_1, b_3-3b_1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 (2-2) = 1 (0) = 0$$

Terlihat garis g_1 dan g_2 sebidang

(2) Garis g_1 dapat disajikan sebagai : $3x - 3 = 2y - 4 \rightarrow 3x - 2y + 1 = 0$
 $4x - 4 = 2z - 6 \rightarrow 2x - z + 1 = 0$

Berkas bidang yang melalui garis g_1 : $3x - 2y + 1 + \lambda (2x - z + 1) = 0$

$$\mu : (3+2\lambda)x - 2y - \lambda z + (1+\lambda) = 0$$

Ambil titik P (2,3,4) pada garis g_2 , karena titik P pada bidang μ dipenuhi :

$$(3+2\lambda) \cdot 2 - 2 \cdot 3 - \lambda \cdot 4 + (1+\lambda) = 0$$

$$(4-4+1) \lambda + (6-6+1) = 0$$

$$\lambda = -1$$

Jadi bidang μ : $(3-2)x - 2y - (-1)z + (1-1) = 0$

$$\mu : x - 2y + z = 0$$

Kesimpulan :

1. Kedudukan antara bidang μ : $Ax + By + Cz + D = 0$ dan

garis g : $\frac{x-x_1}{l} = \frac{y-y_1}{m} = \frac{z-z_1}{n}$ ditentukan oleh para bilangan arahnya :

1.1. μ sejajar g bila dan hanya bila $A_l + B_m + C_n = 0$

1.2. μ tegak lurus g bila dan hanya bila $\frac{A}{l} = \frac{B}{m} = \frac{C}{n}$

2. Sebuah bidang dapat dikonstruksikan dengan cara :

2.1. Melalui tiga buah titik yang tidak segaris

2.2. Melalui sebuah garis dan sebuah titik diluar garis

2.3. Melalui dua buah garis yang sebidang atau :

2.3.1. Dua buah garis yang berpotongan

2.3.2. Dua buah garis yang sejajar.

DAFTAR PUSTAKA

1. Izu Vaisman, Analytical Geometri, World Scientific, 3th Edition, 2003
2. Maurice D Weir, Calculus and Analytic Geometry,
Adison-Wesley Pub. Co, 2002
3. Shanti Narayan, Analytical Geometry,
S. Chand & Company LTD, Jam Nagar New Delhi, Reprinted 2003