

SUBRUANG MARKED

Suryoto

Jurusan Matematika, FMIPA-UNDIP Semarang

Abstrak

Misalkan V suatu ruang vektor berdimensi hingga atas lapangan kompleks \mathbb{C} , T operator linier nilpoten pada V dan W subruang T -invariant dari V . W dikatakan *marked* jika terdapat basis Jordan untuk W yang dapat diperluas menjadi basis Jordan untuk V . Dalam tulisan ini ditunjukkan bahwa suatu basis Jordan untuk W dapat diperluas menjadi basis Jordan untuk V jika dan hanya jika basis tersebut mempunyai sifat ketetapan dan sifat kedalaman. Syarat perlu dan cukup suatu subruang T -invariant adalah *marked* juga diberikan secara geometri dengan memanfaatkan Inti dan Peta dari T .

PENDAHULUAN

Misalkan V suatu ruang vektor berdimensi hingga atas lapangan kompleks \mathbb{C} , T operator linier nilpoten pada V dan W subruang T -invariant dari V . W dikatakan invariant terhadap T atau disingkat T -invariant, jika $T(x) \in W, (x \in W$. Suatu rantai (untuk T) adalah himpunan vektor-vektor tak nol :

$$\{ x, (T - (I)(x), \dots, (T - (I)^{h-1}(x) \}$$

sedemikian hingga $(T - (I)^h(x) = 0$. Dimana $($ adalah nilai eigen dari T dan $(T - (I)^{h-1}(x)$ adalah vektor eigen dari T yang berpadanan dengan nilai eigen $($. Basis Jordan untuk subruang T -invariant W adalah basis untuk W yang merupakan gabungan dari rantai-rantai. Sedangkan basis Jordan untuk V (disebut juga basis Jordan untuk T) adalah basis yang berbentuk :

□

$$\{ x_{ij}, (T - (iI)(x_{ij}), \dots, (T - (iI)(x_{ij}), i = 1, \dots, t ; j = 1, \dots, s_i \}$$

□

dimana $x_{ij} \in V$ dan $(T - (iI)(x_{ij}) = 0$.

Gohberg dkk [6], memperkenalkan salah satu kelas dari subruang invariant yang mereka namakan subruang *marked*. Pada umumnya, tidak setiap subruang invariant adalah *marked*. Suatu subruang invariant dikatakan *marked* jika terdapat basis Jordan untuk subruang tersebut yang dapat diperluas menjadi menjadi basis Jordan untuk ruang vektor keseluruhan. Permasalahan yang muncul disini : bilamana basis Jordan untuk suatu subruang invariant dapat diperluas menjadi basis Jordan untuk ruang vektor keseluruhan ? Untuk mengkaji permasalahan ini akan ditinjau dari segi ketinggian dan kedalaman suatu vektor dan sifat-sifat yang terkait. Karakterisasi

□

subruang *marked* juga diberikan dalam keluarga subruang $V = \text{Ker}(T^h) \cap \text{Im}(T^d)$. Dalam pembahasan subruang *marked* ini hanya akan ditinjau untuk kasus operator linier T yang nilpoten.

Karakterisasi Basis Jordan yang Dapat Diperluas

Untuk selanjutnya misalkan $T : V \rightarrow V$, suatu pemetaan linier nilpoten dengan indeks $($. Maka 0 adalah satu-satunya nilai eigen dari T . Untuk $x \in V$, ketinggian dari x , dinotasikan dengan $ht(x)$,

adalah bilangan bulat tak negatif terkecil h sedemikian hingga $T^h(x) = 0$. Untuk $x \neq 0$, kedalaman dari x , notasi $dp(x)$, didefinisikan sebagai bilangan bulat tak negatif terbesar d sedemikian hingga $x = T^d(y)$, untuk suatu $y \in V$. Selanjutnya, suatu vektor tak nol x dikatakan mempunyai sifat ketetapan (*constancy property* = CP) jika berlaku salah satu : $T(x) = 0$ atau $T(x) \neq 0$ dan $dp(T(x)) = dp(x) + 1$.

Sedangkan suatu rantai $S = \{ x, T(x), \dots, T^{h-1}(x) \}$ dikatakan mempunyai CP jika dan hanya jika berlaku $dp(T^{i-1}(x)) = dp(x) + i - 1, i = 1, \dots, h$. Selanjutnya pandang himpunan bagian tak hampa B dari V yang bebas linier dengan $B = \{ x_1, \dots, x_r \}$. B dikatakan mempunyai sifat kedalaman (*depth property* = DP), jika $x \in \text{span}(B), x \neq 0$ dengan $x = \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_r x_r$, berlaku :

$$dp(x) = \min \{ dp(x_i) : \alpha_i \neq 0, i = 1, \dots, r \}.$$

Catat bahwa sifat ketetapan (CP) dan sifat kedalaman (DP) ini tidak mengakibatkan satu terhadap yang lain.. Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa sifat ketetapan dan sifat kedalaman ini akan mengkarakterisasi subruang *marked*. Namun sebelumnya akan diberikan terlebih dahulu beberapa lema berikut ini :

Lema 1

Misalkan V suatu ruang vektor atas lapangan kompleks C . Jika C basis Jordan untuk V maka C mempunyai CP dan DP.

Lema 2

Misalkan $S = \{ x, T(x), \dots, T^{h-1}(x) \}$ suatu rantai. Maka S maksimal jika dan hanya jika $dp(x) = 0$.

Lema 3

Misalkan $A, B \subseteq V$, adalah himpunan dari vektor-vektor yang bebas linier dengan $A \cap B = \{ \}$ dan A, B masing-masing mempunyai DP. Misalkan juga $A \cup B$ bebas linier. Jika $A \cup B$ tidak mempunyai DP maka terdapat $x \in \text{span}(A)$ dan $y \in \text{span}(B)$ dengan $dp(x) = dp(y)$ sedemikian hingga :

$$dp(x+y) \neq dp(x) = dp(y).$$

Teorema 1

Misalkan W subruang T -invariant dari V dan B basis Jordan untuk W . Maka B dapat diperluas menjadi basis Jordan untuk V jika dan hanya jika B mempunyai CP dan DP.

Bukti : () Misalkan C basis Jordan untuk V , perluasan dari B . Maka berdasarkan lema 1, C mempunyai CP dan DP. Akibatnya, karena $B \subseteq C$, maka B juga mempunyai CP dan DP.



() Misalkan W subruang T -invariant dari V dan $B = \{ x_i, T(x_i), \dots, T^{t-1}(x_i), i = 1, \dots, t \}$ adalah basis Jordan dari W , mempunyai CP dan DP.

a) Jika $W = V$, pilih $C = B$ basis Jordan untuk V , perluasan dari B .

b) Jika $W \subsetneq V$. Akan dikonstruksi subruang T -invariant W' yang memuat sejati W dan basis

Jordan B' untuk W' , perluasan dari B , yang mempunyai CP dan DP.

Kasus 1 : Terdapat rantai di B yang tidak maksimal.



Misalkan $S = \{ x_i, T(x_i), \dots, T(x_i) \}$ rantai di B yang tidak maksimal, untuk suatu i ($\{ 1, \dots, t \}$). Misalkan juga $\text{dp}(x_i) = d < 0$. Maka terdapat z ($\forall x_i = T^d(z)$), dengan $\text{dp}(z) = 0$ dan



diperoleh rantai maksimal $S' = \{ z, \dots, T^d(z) = x_i, T^{d+1}(x_i), \dots, T(x_i) \}$. Tulis $B' = B(S')$ dan $W' = \text{span}(B')$. Jelas bahwa W' subruang T -invariant dari V .

Klaim 1 : S' mempunyai CP.

Karena S' suatu rantai maka $T^j(z) \neq 0$, ($j = 0, \dots, d + h_i - 1$). Akan ditunjukkan $\text{dp}(T^j(z)) = j$, ($j = 0, \dots, d + h_i - 1$). Ambil sebarang j ($\{ 0, \dots, d + h_i - 1 \}$). Jika $j < d$, maka $T^j(z) \in S$.

Tulis $T^j(z) = T^{j-d+d}(z) = T^{j-d}(x_i)$. Karena S mempunyai CP, maka $\text{dp}(T^j(z)) = \text{dp}(T^{j-d}(x_i)) = \text{dp}(x_i) + j - d = d + j - d = j$. Sebaliknya jika $j \geq d$, dan karena $\text{dp}(x_i) = d$ dengan $x_i = T^d(z)$, maka $d = \text{dp}(x_i) = \text{dp}(T^d(z)) = \text{dp}(T^{d-j}(T^j(z))) = \text{dp}(T^j(z)) + d - j$. Jadi $\text{dp}(T^j(z)) = j$. Akan tetapi $\text{dp}(T^j(z)) = j$, dengan demikian diperoleh $\text{dp}(T^j(z)) = j$. Ini memperlihatkan bahwa S' mempunyai CP.

Klaim 2 : $B' = B(S')$ bebas linier.

Andaikan B' bergantung linier, maka terdapat kombinasi linier :



$$= 0,$$

dengan $(c_{kj}, \alpha_{il}) \in \mathbb{C}$, $k = 1, \dots, t$; $k \leq i$; $j = 0, \dots, d + h_i - 1$, yang dipenuhi oleh (c_{kj}, α_{il}) yang tidak semuanya nol. Khususnya terdapat r dengan $0 < r < d$, sedemikian hingga $\alpha_{ir} \neq 0$. Karena $0 < r < d$, maka r mempunyai nilai minimum, misalkan $s = \min \{ r : \alpha_{ir} \neq 0, \text{ dengan } 0 < r < d \}$.

Dengan demikian,



$= 0$ atau diperoleh :

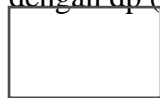


$$= 0,$$

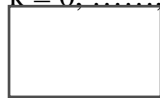
suatu kombinasi linier dari unsur-unsur di B yang dipenuhi oleh $\alpha_{is} \neq 0$. Akibatnya B bergantung linier, ini bertentangan dengan B yang bebas linier. Jadi haruslah B' bebas linier.

Klaim 3 : B' mempunyai DP.

Andaikan B' tidak mempunyai DP. Maka menurut lema 3, terdapat $w \in W$ dan $x \in \text{span}(S' - S)$ dengan $\text{dp}(w) = \text{dp}(x)$ dan $\text{dp}(w+x) < \text{dp}(w) = \text{dp}(x)$.



Karena $x \in \text{span}(S' - S) = \text{span}(\{z, \dots, T^{d-1}(z)\})$, tulis $x = \sum_{k=0}^{d-1} c_k T^k(z)$, dengan $c_k \in C$, $k = 0, \dots, d-1$. Misalkan $\text{dp}(x) = r$, dengan $0 \leq r < d$, maka

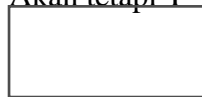


$x = \sum_{k=0}^{d-1} c_k T^k(z)$, dengan $c_r \neq 0$. Tulis $v = w + x$, jelas bahwa $v \in \text{span}(B') = W'$ dan $\text{dp}(v) < r$.

Dengan demikian $\text{dp}(T^{d-r}(v)) < \text{dp}(v) + d - r < r + d - r = d$ (1)



Akan tetapi $T^{d-r}(v) = T^{d-r}(w) + \sum_{k=0}^{d-1} c_k T^{d-r+k}(z)$, dengan $T^{d-r}(w) \in W = \text{span}(B)$ dan $T^{d-r+k}(z) \in W$, maka



$$\text{dp}(T^{d-r}(v)) = \min \{ \text{dp}(T^{d-r}(w)), \text{dp}(\sum_{k=0}^{d-1} c_k T^{d-r+k}(z)) \} = d.$$

Ini bertentangan dengan (1), jadi haruslah B' mempunyai DP.

Kasus 2 : Setiap rantai di B adalah rantai maksimal.

Klaim : Terdapat $v \in V$, $v \in W = \text{span}(B)$ dengan $\text{ht}(v) = 1$.

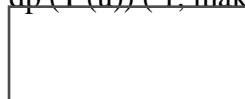
Misalkan $u \in V$, $u \in W$ dengan $\text{ht}(u) = h$. Maka $T^h(u) = 0$ dan $T^{h-1}(u) \neq 0$.

Jika $T^{h-1}(u) \in W$, pilih $v = T^{h-1}(u)$. Sebaliknya jika $T^{h-1}(u) \notin W$. Akan ditunjukkan bahwa terdapat bilangan bulat terkecil r dengan $0 \leq r < h-1$ sedemikian hingga $T^r(u) \in W$.

Karena $u \in W$ dan $T^{h-1}(u) \notin W$, pandang himpunan $N = \{j : T^j(u) \in W, j = 1, \dots, h-1\} \subseteq \{1, \dots, h-1\}$. Karena $N \subseteq \{1, \dots, h-1\}$, maka N mempunyai unsur terkecil, misalkan r . Dengan demikian



$\text{dp}(T^r(u)) < r < 0$ atau $\text{dp}(T^r(u)) < 1$. $T^r(u) \in W = \text{span}(B)$, tulis $T^r(u) = \sum_{i=1}^t c_i T^i(z)$, untuk suatu $(c_i) \in C$. Karena $\text{dp}(T^r(u)) < 1$, maka untuk $j = 0, (c_j = 0, (i = 1, \dots, t$ dan diperoleh



$$T^r(u) = T^0(u),$$



dimana $u \in W$. Jadi terdapat $z \in W$ dan berlaku $T^r(u) = T(z)$.

Tulis $x = z - T^{r-1}(z)$. Jelas bahwa $x \in W$ dan $x \neq 0$, serta $T(x) = T(z - T^{r-1}(z)) = T(z) - T^r(u) = 0$. Jadi x adalah vektor eigen dari T (yang berpadanan dengan nilai eigen 0).

Dengan demikian klaim telah terbukti.

Pilih $S = \{u, T(u), \dots, T^{h-1}(u)\}$ rantai dengan panjang terbesar dengan $v = T^{h-1}(u) \in W$.

Misalkan $B' = B(S)$. Dengan cara yang serupa seperti pada kasus 1 dapat diperlihatkan bahwa B' bebas linier. Karena $B(S) \subseteq W$ dan $W = \text{span}(B)$, maka B' basis untuk $W' = W \cap \text{span}(S)$ dan jelas bahwa W' adalah subruang T -invariant dari V . Lagi dengan cara yang serupa seperti pada kasus 1 dapat ditunjukkan bahwa S mempunyai CP dan B' mempunyai DP.

Sehingga dengan mengulang prosedur di atas diperoleh basis Jordan untuk V , yang merupakan perluasan dari B .

Karakterisasi Subruang Marked

Misalkan B himpunan bagian tak hampa dari V yang bebas linier, didefinisikan :

$$B = \{ x \in B : ht(x) = h \}$$

$$B = \{ x \in B : dp(x) = d \}$$

$$B = \{ x \in B : ht(x) = h, dp(x) = d \}.$$

Selanjutnya untuk $h, d \in \mathbb{N}$, misalkan

$$K = \text{Ker}(T^h) = \{ x \in V : ht(x) \leq h \}$$

$$I = \text{Im}(T^d) = \{ x \in V : dp(x) \geq d \}$$

$$V = K \cup I = \text{Ker}(T^h) \cup \text{Im}(T^d).$$

Karena $V = K \cup I$, untuk $d + h \leq n$ (dengan n = indeks nilpoten dari pemetaan linier T , pada tulisan ini hanya ditekankan pada kasus $d + h \leq n$). Dengan pendefinisian di atas diperoleh barisan subruang :

$$\{0\} = K_0 \subset K_1 \subset \dots \subset K_r = \dots = K_n = V$$

$$\{0\} = I^n \supset \dots \supset I^1 \supset I^0 = V$$

dan dipunyai diagram berikut ini :



Dari diagram diperoleh $V = V_0 \cup V_1 \cup \dots \cup V_r$, dimana vektor-vektor di ruas kanan yang tidak berada di ruas kiri akan memegang peranan penting di dalam karakterisasi subruang *marked* ini.

Misalkan W subruang T -invariant dari V , jelas bahwa dipenuhi

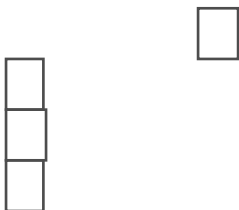


$$W(V+W) \subseteq W(V) \quad (2)$$

Jika inklusi balikan dari (2) juga berlaku, hal ini akan mengkarakterisasi subruang *marked*, seperti diberikan oleh teorema berikut ini :

Teorema 2

Misalkan W subruang T -invariant dari V . Maka W dikatakan *marked* jika dan hanya jika



$$W(V+W) = W(V),$$

$$(h(1, d(0, d+h($$

Namun sebelum membuktikan teorema di atas akan diberikan terlebih dahulu beberapa lema berikut ini :

Lema 4



Misalkan B basis Jordan untuk V , maka berlaku $V = [B](V+W)$,

$$(h(1, d(0, d+h($$

Lema 5

Misalkan W subruang T -invariant dari V dan B basis Jordan untuk W . Jika B dapat diperluas menjadi basis Jordan untuk V , maka berlaku



$$[B](V+W) = \{0\},$$

$$(h(1, d(0, d+h($$

Lema 6

Misalkan K, K', L dan L' adalah sub-sub ruang dari V , dengan $K' \subseteq K, L' \subseteq L$ sedemikian hingga

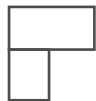
$V = K(L = K'(L', \text{ maka } K' = K \text{ dan } L' = L.$

Lema 7

Misalkan W subruang T -invariant dari V dan F subruang dari W sedemikian hingga



$$W(V(F(W(V+V))),$$



dengan $h(1, d(0, d+h($, maka T menginduksi suatu isomorfisma $F \rightarrow T(F)$ dan $W(V \rightarrow T(F)$



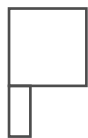
$(W(V+V)).$

Lema 8

Misalkan W subruang T -invariant dari V dan B keluarga dari vektor-vektor di V yang bebas linier sedemikian hingga :



$$W(V = [B](W(V+W(V),$$



$(h(1, d(0, d+h($. Maka $W = [B]$ dan pada khususnya B basis untuk W .

Lema 9

Misalkan $x(0$, dengan $ht(x) = h(1$ dan $dp(x) = d(0 - h$. Maka x mempunyai FCP jika dan



hanya jika $x(V+V$.

Sekarang akan dibuktikan teorema 2 di atas.

() Misalkan W marked dan B basis Jordan untuk W yang dapat diperluas menjadi basis Jordan untuk V . Ambil sebarang $h(1, d(0$, dengan $d+h($. Karena W subruang dari V maka





$$W(V + W(V)) = W(V) \quad (3)$$

Karena B basis Jordan untuk W yang dapat diperluas menjadi basis Jordan untuk V, maka



menurut lema 5 diperoleh $[B](W(V)) = \{0\}$, dan akibatnya



$$[B](W(V)) = \{0\}. \quad (4)$$



Karena $[B](W(V))$ serta mengingat (3) dan (4) diperoleh



$$[B](W(V)) = W(V). \quad (5)$$



Sebaliknya, ambil sebarang $x \in W(V)$, dengan $x \neq 0$, dengan melihat bentuk kombinasi linier x



atas B diperoleh $x = x_1 + x_2 + x_3$, dengan $x_1 \in [B]$, $x_2 \in V$ dan $x_3 \in W(V)$.



Karena $x_2, x_3 \in W(V)$, maka $x_2 + x_3 \in W(V)$ dan akibatnya diperoleh



$x \in ([B] + W(V))$ atau



$$W(V) \in ([B] + W(V)). \quad (6)$$

Sehingga dengan mengingat (5) diperoleh :



$$W(V) = [B] ((W(V+V))). \quad (7)$$



Jelas bahwa $[B] + (W(V+W(V))) (W(V)$.



Sebaliknya, ambil sebarang $x \in W(V)$, dengan $x \neq 0$, maka $x = x_1 + x_2 + x_3$, dengan $x_1 \in [B]$,



$x_2 \in V$ dan $x_3 \in V$. Karena $x_2, x_3 \in W$, jadi $x_2 \in W(V)$ dan $x_3 \in W(V)$, maka $x \in ([B] + (W(V+W(V))) (W(V)$



$V)$ atau $W(V) ([B] + (W(V+W(V))) (W(V)$.



Dengan demikian diperoleh $W(V) ([B] + (W(V+W(V))) (W(V)$.



Klaim : $[B] ((W(V+W(V))) = \{ 0 \}$.



Misalkan $x = y + z$, dengan $x \in [B]$, $y \in W \subset V$ dan $z \in W \subset V$, dan andaikan $x \neq 0$. Maka dipunyai $T^{h-1}(x) = T^{h-1}(y + z) = T^{h-1}(y) \neq 0$. Akibatnya $\dim(T^{h-1}(x)) \geq d + h$.

Akan tetapi $T^{h-1}(x) \in W = \text{span}(B)$, dengan B mempunyai DP, jadi $\dim(T^{h-1}(x)) = d + h - 1$.

Ini bertentangan dengan hasil sebelumnya. Jadi haruslah $x = 0$ dan terbukti bahwa

$[B] \cap (W \subset V + W \subset V) = \{0\}$. Dengan demikian diperoleh

$$W \subset V = [B] \cap (W \subset V + W \subset V). \quad (8)$$

Sehingga dari (7) dan (8) serta dengan mengingat lemma 6 diperoleh

$$W \subset V + W \subset V = W \subset (V + V).$$

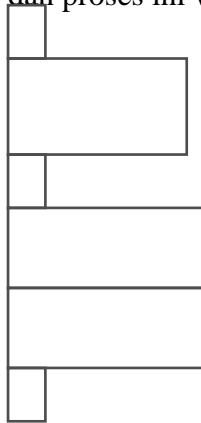
(*) Untuk membuktikan bahwa W *marked*, cukup apabila dapat dikonstruksi suatu basis Jordan untuk W , yang mempunyai CP dan DP. Ambil sebarang $(\{1, \dots, k\})$. Akan dikonstruksi basis Jordan untuk W berturut-turut sebagai berikut :

$$W \subset V = (W \subset V + W \subset V) \cap [B]$$

$$W \subset V = (W \subset V + W \subset V) \cap [T(B)] \cap [B]$$



$W(V) = (W(V) \circ [T^{-1}(B)] \circ [T^{-2}(B)] \circ \dots \circ ([T(B)] \circ [B])$,
 dan proses ini well defined karena lema 7.



Tulis $B^* = \{b_i, i = 0, \dots, (-1\}$. Maka B^* basis untuk $W(V)$. Dengan demikian $W(V) = [B^*]$, dan diperoleh



$$W(V) = (W(V) + W(V) \circ [B^*], i = 0, \dots, (-1.$$



Sedangkan lema 8 menjamin bahwa gabungan $B^* = \{b_i, i = 0, \dots, (-1\}$ adalah basis untuk $W(V)$.

Tinggal diperlihatkan bahwa B^* mempunyai CP dan DP.



Ambil sebarang $b_i \in B^*$, maka $b_i \in W(V)$, untuk suatu $i \in \{0, \dots, (-1\}$ dan $b_i \in W(V) \circ [B^*]$.



Akibatnya $b_i \in W(V)$. Karena $W(V) = [B^*] \circ (W(V) + W(V) \circ [B^*])$ atau



□

$[B^*] (W(V) + W(V)) = \{0\}$ dan mengingat $b \in [B^*]$ serta $b \neq 0$, maka diperoleh $b \in W(V)$

□
□
□
□
□
□
□

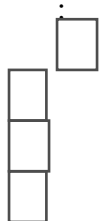
$W(V)$. Karena $W(V) + W(V) = W(V)$ dan $b \in W(V)$, maka $b \in W(V)$. Maka berdasarkan lema 9, b mempunyai FCP atau rantai $\{b, T(b), \dots, T^{(i-1)}(b)\}$ mempunyai CP. Dengan demikian B^* mempunyai CP.

Selanjutnya dengan menggunakan induksi matematika dan menerapkan lema 3 dapat dibuktikan bahwa B^* mempunyai DP. Dengan demikian karena B^* basis Jordan untuk W mempunyai CP dan DP, maka terbukti bahwa W *marked*.

KESIMPULAN

Dari pembahasan sebelumnya dapat disimpulkan :

1. Salah satu ciri yang mengkarakterisasi subruang *marked* adalah eksistensi dari basis Jordan dari subruang yang bersangkutan yang mempunyai CP dan DP.
2. Karakterisasi yang lain untuk suatu subruang *marked* W dari V adalah dipenuhinya hubungan



$W \cap (V + W) \cap (V + W + W) = W \cap (V + V)$, $(h(1), d(0), d+h(1), \dots)$,
dimana $($ adalah indeks nilpoten dari pemetaan linier T .

DAFTAR PUSTAKA

1. Arifin, A., *Aljabar Linier*, Penerbit ITB, Bandung, 1995.
2. Bru, R., L. Rodman and H. Scheneider, *Extensions of Jordan Bases for Invariant Subspace of a Matrix, Linear Algebra and Its Applications*, 1991, 150 : 209 – 225.
3. Burton, D. M., *Abstract and Linear Algebra*, Addison-Wesley, Massachusetts, 1972.
4. Ferrer, J., F. Puerta and X. Puerta, *Geometric Characterization and Classification of Marked Subspaces, Linear Algebra and Its Applications*, 1996, 235 : 35 – 46.
5. Friedberg, S., A. J. Insel and L. E. Spence, *Linear Algebra*, Prentice Hall, New York, 1992.
6. Gohberg, I., P. Lancaster and L. Rodman, *Invariant Subspaces of Matrices with Applications*, John Willey & Sons, New York, 1986.
7. Jacob, B., *Linear Algebra*, W. H. Freeman and Company, New York, 1990.
8. Roman, S., *Advanced Linear Algebra*, Springer-Verlag, New York, 1992.