SUBRUANG MARKED

Suryoto
Jurusan Matematika, FMIPA-UNDIP Semarang

Abstrak

Misalkan V suatu ruang vektor berdimensi hingga atas lapangan kompleks **C**, T operator linier nilpoten pada V dan W subruang T-invariant dari V. W dikatakan *marked* jika terdapat basis Jordan untuk W yang dapat diperluas menjadi basis Jordan untuk V. Dalam tulisan ini ditunjukkan bahwa suatu basis Jordan untuk W dapat diperluas menjadi basis Jordan untuk V jika dan hanya jika basis tersebut mempunyai sifat ketetapan dan sifat kedalaman. Syarat perlu dan cukup suatu subruang T-invariant adalah *marked* juga diberikan secara geometri dengan memanfaatkan Inti dan Peta dari T.

PENDAHULUAN

Misalkan V suatu ruang vektor berdimensi hingga atas lapangan kompleks C, T operator linier nilpoten pada V dan W subruang T-invariant dari V. W dikatakan invariant terhadap T atau disingkat T-invariant, jika T(x) (W, (x (W. Suatu rantai (untuk T) adalah himpunan vektor-vektor tak nol :

$$\{ x, (T - (I)(x), \ldots\ldots, (T - (I)^{h-1}(x) \}$$

sedemikian hingga $(T - (I)^h (x) = 0$. Dimana (adalah nilai eigen dari T dan $(T - (I)^{h-1}(x)$ adalah vektor eigen dari T yang berpadanan dengan nilai eigen (. Basis Jordan untuk subruang T-invariant W adalah basis untuk W yang merupakan gabungan dari rantai-rantai. Sedangkan basis Jordan untuk V (disebut juga basis Jordan untuk T) adalah basis yang berbentuk :

$$\{ x_{ij}, (T - (_iI) (x_{ij}), \ldots\ldots, (T - (_iI) (x_{ij}), i = 1, \ldots\ldots, t ; j = 1, \ldots\ldots, s_i \}$$

dimana x_{ij} (V dan $(T - (_iI)(x_{ij}) = 0$.

Gohberg dkk [6], memperkenalkan salah satu kelas dari subruang invariant yang mereka namakan subruang *marked*. Pada umumnya, tidak setiap subruang invariant adalah *marked*. Suatu subruang invariant dikatakan *marked* jika terdapat basis Jordan untuk subruang tersebut yang dapat diperluas menjadi menjadi basis Jordan untuk ruang vektor keseluruhan. Permasalahan yang muncul disini : bilamana basis Jordan untuk suatu subruang invariant dapat diperluas menjadi basis Jordan untuk ruang vektor keseluruhan ? Untuk mengkaji permasalahan ini akan ditinjau dari segi ketinggian dan kedalaman suatu vektor dan sifat–sifat yang terkait. Karakterisasi subruang *marked* juga diberikan dalam keluarga subruang V= Ker (T^h) (Im (T^d). Dalam pembahasan subruang *marked* ini hanya akan ditinjau untuk kasus operator linier T yang nilpoten.

Karakterisasi Basis Jordan yang Dapat Diperluas

Untuk selanjutnya misalkan T : V (V, suatu pemetaan linier nilpoten dengan indeks (. Maka 0 adalah satu-satunya nilai eigen dari T. Untuk x (V, *ketinggian* dari x, dinotasikan dengan ht (x), adalah bilangan bulat tak negatif terkecil h sedemikian hingga $T^h(x) = 0$. Untuk x (0, *kedalaman* dari x, notasi dp (x), didefinisikan sebagai bilangan bulat tak negatif terbesar d sedemikian hingga $x = T^d(y)$, untuk suatu y (V. Selanjutnya, suatu vektor tak nol x dikatakan mempunyai sifat ketetapan (*constancy property* = CP) jika berlaku salah satu : T(x) = 0 atau T(x) (0 dan dp (T(x)) = dp (x) + 1.

Sedangkan suatu rantai S = { x, T(x), ……, $T^{h-1}(x)$ } dikatakan mempunyai CP jika dan hanya jika berlaku dp $(T^{i-1}(x))$ = dp (x) + i – 1, i = 1, ……, h. Selanjutnya pandang himpunan bagian tak hampa B dari V yang bebas linier dengan B = { x_1, ……, x_r }. B dikatakan mempunyai sifat kedalaman (*depth property* = DP), jika (x (span (B), x (0 dengan x = $(_1x_1$ + …… + $(_rx_r$, berlaku :

$$dp\ (x) = \min \{\ dp\ (x_i) : (_i\ (\ 0,\ i = 1,\ldots\ldots, r\ \}.$$

Catat bahwa sifat ketetapan (CP) dan sifat kedalaman (DP) ini tidak mengakibatkan satu terhadap yang lain.. Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa sifat ketetapan dan sifat kedalaman ini akan mengkarakterisasi subruang *marked*. Namun sebelumnya akan diberikan terlebih dahulu beberapa lema berikut ini :

Lema 1

Misalkan V suatu ruang vektor atas lapangan kompleks C. Jika C basis Jordan untuk V maka C mempunyai CP dan DP.

Lema 2

Misalkan S = { x, T(x), ….., $T^{h-1}(x)$ } suatu rantai. Maka S maksimal jika dan hanya jika dp (x) = 0.

Lema 3

Misalkan A, B (V, adalah himpunan dari vektor-vektor yang bebas linier dengan A (B = (dan A, B masing-masing mempunyai DP. Misalkan juga A (B bebas linier. Jika A (B tidak mempunyai DP maka terdapat x (span (A) dan y(span (B) dengan dp (x) = dp (y) sedemikian hingga :

$$dp\ (x+y)\ (\ dp\ (x) = dp\ (y).$$

Teorema 1

Misalkan W subruang T-invariant dari V dan B basis Jordan untuk W. Maka B dapat diperluas menjadi basis Jordan untuk V jika dan hanya jika B mempunyai CP dan DP.

Bukti : (( ) Misalkan C basis Jordan untuk V, perluasan dari B. Maka berdasarkan lema 1, C mempunyai CP dan DP. Akibatnya, karena B (C, maka B juga mempunyai CP dan DP.
□

(( ) Misalkan W subruang T-invariant dari V dan B = { x_i, $T(x_i)$, ……, $T(x_i)$, i = 1, ……, t } adalah basis Jordan dari W, mempunyai CP dan DP.

a) Jika W = V, pilih C = B basis Jordan untuk V, perluasan dari B.

b) Jika W (V. Akan dikontruksi subruang T-invariant W‘ yang memuat sejati W dan basis

Jordan B‘ untuk W‘, perluasan dari B, yang mempunyai CP dan DP.

Kasus 1 : Terdapat rantai di B yang tidak maksimal.

Misalkan S = { x_i, $T(x_i)$, ……, $T(x_i)$ } rantai di B yang tidak maksimal, untuk suatu i ({ 1, ……, t }. Misalkan juga dp (x_i) = d (0. Maka terdapat z (Vdan x_i = $T^d(z)$, dengan dp (z) = 0 dan

diperoleh rantai maksimal S‘ = { z, ……, $T^d(z) = x_i$, $T^{d+1}(x_i)$, ……, $T(x_i)$ }. Tulis B‘ = B (S‘ dan W‘ = span (B‘). Jelas bahwa W‘ subruang T-invariant dari V.

Klaim 1 : S‘ mempunyai CP.

Karena S‘ suatu rantai maka $T^j(z)$ (0, (j = 0, ……, d + h_i – 1. Akan ditunjukkan dp ($T^j(z)$) = j, (j = 0, ……, d + h_i – 1. Ambil sebarang j ({ 0, ……, d + h_i – 1 }. Jika j (d, maka $T^j(z)$ (S. Tulis $T^j(z) = T^{j-d+d}(z) = T^{j-d}(x_i)$. Karena S mempunyai CP, maka dp ($T^j(z)$) = dp ($T^{j-d}(x_i)$) = dp (x_i) + j – d = d + j – d = j. Sebaliknya jika j (d, dAn karena dp (x_i) = d dengan $x_i = T^d(z)$, maka d = dp (x_i) = dp ($T^d(z)$) = dp ($T^{d-j}(T^j(z))$) (dp ($T^j(z)$) + d – j. Jadi dp ($T^j(z)$) (j. Akan tetapi dp ($T^j(z)$) (j, dengan demikian diperoleh dp ($T^j(z)$) = j. Ini memperlihatkan bahwa S‘ mempunyai CP.

Klaim 2 : B‘ = B (S‘ bebas linier.

Andaikan B‘ bergantung linier, maka terdapat kombinasi linier :

= 0,

dengan ($_{kj}$, ($_{il}$ (C, k = 1, ……, t; k (i; j = 0, ……, d + h_i – 1, yang dipenuhi oleh ($_{kj}$, ($_{il}$ yang tidak semuanya nol. Khususnya terdapat r dengan 0 (r (d, sedemikian hingga ($_{ir}$ (0. Karena 0 (r (d, maka r mempunyai nilai minimum, misalkan s = min { r : ($_{ir}$ (0, dengan 0 (r (d }. Dengan demikian,

= 0 atau diperoleh :

= 0,

suatu kombinasi linier dari unsur-unsur di B yang dipenuhi oleh ($_{is}$ (0. Akibatnya B bergantung linier, ini bertentangan dengan B yang bebas linier. Jadi haruslah B‘ bebas linier.

Klaim 3 : B‘ mempunyai DP.

Andaikan B‘ tidak mempunyai DP. Maka menurut lema 3, terdapat w (W dan x (span (S‘ - S) dengan dp (w) = dp (x) dan dp (w + x) (dp (w) = dp (x).

Karena x (span (S‘ - S) = span ({ z, ……, T^{d-1}(z) }), tulis x = , dengan ($_k$ (C, k = 0, ……, d – 1. Misalkan dp (x) = r, dengan 0 (r (d, maka

x = , dengan ($_r$ (0. Tulis v = w + x, jelas bahwa v (span (B‘) = W‘ dan dp (v) (r.

Dengan demikian dp (T^{d-r}(v)) (dp (v) + d – r (r + d – r = d (1)

Akan tetapi T^{d-r}(v) = T^{d-r}(w) + (W = span (B) dan T^{d-r}(v) (0, maka

dp (T^{d-r}(v)) = min { dp (T^{d-r}(w)), dp () } = d.

Ini bertentangan dengan (1), jadi haruslah B‘ mempunyai DP.

Kasus 2 : Setiap rantai di B adalah rantai maksimal.

Klaim : Terdapat v (V, v (W = span (B) dengan ht (v) = 1.

Misalkan u (V, u (W dengan ht (u) = h. Maka T^h(u) = 0 dan T^{h-1}(u) (0.

Jika T^{h-1}(u) (W, pilih v = T^{h-1}(u). Sebaliknya jika T^{h-1}(u) (W. Akan ditunjukkan bahwa terdapat bilangan bulat terkecil r dengan 0 (r (h – 1 sedemikian hingga T^r(u) (W.

Karena , u (W dan T^{h-1}(u) (W, pandang himpunan N = { j : T^j(u) (W, j = 1, ……, h – 1 } ((. Karena N ({ 1, ……, h – 1 }, maka N mempunyai unsur terkecil, misalkan r. Dengan demikian

dp (T^r(u)) (r (0 atau dp (T^r(u)) (1. T^r(u) (W = span (B), tulis T^r(u) = , untuk suatu ($_{ij}$ (C. Karena dp (T^r(u)) (1, maka untuk j = 0, ($_{ij}$ = 0, (i = 1, ……, t dan diperoleh

T^r(u) = T(),

dimana (W. Jadi terdapat z (W dan berlaku T^r(u) = T(z).

Tulis x = z – T^{r-1}(z). Jelas bahwa x (W dan x (0, serta T(x) = T(z – T^{r-1}(z)) = T(z) – T^r(u) = 0. Jadi x adalah vektor eigen dari T (yang berpadanan dengan nilai eigen 0).

Dengan demikian klaim telah terbukti.

Pilih S = { u, T(u), ……, T^{h-1}(u) } rantai dengan panjang terbesar dengan v = T^{h-1}(u) (W.

Misalkan B‘ = B (S. Dengan cara yang serupa seperti pada kasus 1 dapat diperlihatkan bahwa B‘ bebas linier. Karena B (S = (dan W = span (B), maka B‘ basis untuk W‘ = W (span (S) dan jelas bahwa W‘ adalah subruang T-invariant dari V. Lagi dengan cara yang serupa seperti pada kasus 1 dapat ditunjukkan bahwa S mempunyai CP dan B‘ mempunyai DP.

Sehingga dengan mengulang prosedur di atas diperoleh basis Jordan untuk V, yang merupakan perluasan dari B.

Karakterisasi Subruang Marked

Misalkan B himpunan bagian tak hampa dari V yang bebas linier, didefinisikan :

B= { x (B : ht (x) = h }

B= { x (B : dp (x) = d }

B= { x (B : ht (x) = h, dp (x) = d }.

Selanjutnya untuk h, d (0, misalkan

K= Ker (T^h) = { x (V : ht (x) (h }

I= Im (T^d) = { x (V : dp (x) (d }

V= K(I= Ker (T^h) (Im (T^d).

Karena V= I, untuk d + h ((, dengan (= indeks nilpoten dari pemetaan linier T, pada tulisan ini hanya ditekankan pada kasus d + h ((. Dengan pendefinisian di atas diperoleh barisan subruang :

{ 0 } = K_0 (K_1 (…… ($K_($ = …… = K_n = V

{ 0 } = I^n = …… = $I^($ ($I^{(-1}$ (…… (I^0= V

dan dipunyai diagram berikut ini :

Dari diagram diperoleh V+ V (V, dimana vektor-vektor di ruas kanan yang tidak berada di ruas kiri akan memegang peranan penting di dalam karakterisasi subruang *marked* ini.

Misalkan W subruang T-invariant dari V, jelas bahwa dipenuhi

W(V+ W (V (W ((V+ V).   (2)

Jika inklusi balikan dari (2) juga berlaku, hal ini akan mengkarakterisasi subruang *marked,* seperti diberikan oleh teorema berikut ini :

Teorema 2

Misalkan W subruang T-invariant dari V. Maka W dikatakan marked jika dan hanya jika

W(V+ W (V = W ((V+ V),

(h (1, d (0, d + h ((.

Namun sebelum membuktikan teorema di atas akan diberikan terlebih dahulu beberapa lema berikut ini :

Lema 4

Misalkan B basis Jordan untuk V, maka berlaku V= [B] ((V+ V),

(h (1, d (0, d + h ((.

Lema 5

Misalkan W subruang T-invariant dari V dan B basis Jordan untuk W. Jika B dapat diperluas menjadi basis Jordan untuk V, maka berlaku

[*B*] *((V+ V) = { 0 },*

(h (1, d (0, d + h ((.

Lema 6

Misalkan K, K‘, L dan L‘ adalah sub-sub ruang dari V, dengan K‘ (K, L‘ (L sedemikian hingga

V = K (L = K‘ (L‘, maka K‘ = K dan L‘ = L.

Lema 7

Misalkan W subruang T-invariant dari V dan F subruang dari W sedemikian hingga

$$W (V(F ((W ((V+ V)),$$

dengan *h (1, d (0, d + h ((, maka T menginduksi suatu isomorfisma F   T(F) dan W (V(T(F) (*

*(*W (*(V+ V)).*

Lema 8

Misalkan W subruang T-invariant dari V dan B keluarga dari vektor-vektor di V yang bebas linier sedemikian hingga :

$$W (V= [B] ((W (V+ W (V),$$

(h (1, d (0, d + h ((. Maka W = [*B*] *dan pada khususnya B basis untuk W.*

Lema 9

Misalkan x (0, dengan ht (x) = h (1dan dp (x) = d ((- h. Maka x mempunyai FCP jika dan hanya jika x (V+ V.

Sekarang akan dibuktikan teorema 2 di atas.
(( ) Misalkan W *marked* dan B basis Jordan untuk W yang dapat diperluas menjadi basis Jordan untuk V. Ambil sebarang h (1, d (0, dengan d + h ((. Karena W subruang dari V maka

W (V+ W (V (W ((V+ V) (W (V. (3)

Karena B basis Jordan untuk W yang dapat diperluas menjadi basis Jordan untuk V, maka menurut lema 5 diperoleh [B] ((V+ V) = { 0 }, dan akibatnya

[B] ((W ((V+ V)) = { 0 }. (4)

Karena [B] (W (V serta mengingat (3) dan (4) diperoleh

[B] ((W ((V+ V)) (W (V. (5)

Sebaliknya, ambil sebarang x (W (V, dengan x (0, dengan melihat bentuk kombinasi linier x atas B diperoleh x = x_1 + x_2 + x_3, dengan x_1 ([B], x_2 (V dan x_3 (V.

Karena x_2, x_3 (W, maka x_2 + x_3 (W ((V+ V) dan akibatnya diperoleh

x ([B] + (W ((V+ V)) atau

W (V ([B] + (W ((V+ V)). (6)

Sehingga dengan mengingat (5) diperoleh :

W (V = [B] ((W ((V+ V)). (7)

Jelas bahwa [B] + (W (V+ W (V)) (W (V.

Sebaliknya, ambil sebarang x (W (V, dengan x (0, maka x = x_1 + x_2 + x_3, dengan x_1 ([B],

x_2 (V dan x_3 (V. Karena x_2, x_3 (W, jadi x_2 (W (V dan x_3 (W (V, maka x ([B] + (W (V+ W (

V) atau W (V ([B] + (W (V+ W (V).

Dengan demikian diperoleh W (V ([B] + (W (V+ W (V).

Klaim : [B] ((W (V+ W (V) = { 0 }.

Misalkan x = y + z, dengan x ([B], y (W (V dan z (W (V, dan andaikan x (0. Maka dipunyai $T^{h-1}(x) = T^{h-1}(y + z) = T^{h-1}(y)$ (0. Akibatnya dp ($T^{h-1}(x)$) (d + h.

Akan tetapi $T^{h-1}(x)$ (W = span (B), dengan B mempunyai DP, jadi dp ($T^{h-1}(x)$) = d + h – 1.

Ini bertentangan dengan hasil sebelumnya. Jadi haruslah x = 0 dan terbukti bahwa

[B] ((W (V+ W (V) = { 0 }. Dengan demikian diperoleh

W (V = [B] ((W (V+ W (V). (8)

Sehingga dari (7) dan (8) serta dengan mengingat lema 6 diperoleh

W (V+ W (V = W ((V+ V).

(( ) Untuk membuktikan bahwa W *marked*, cukup apabila dapat dikontruksi suatu basis Jordan untuk W, yang mempunyai CP dan DP. Ambil sebarang (({ 1, ……, (}. Akan dikontruksi basis Jordan untuk W berturut-turut sebagai berikut :

W (V= (W (V+ W (V) ([B]

W (V= (W (V+ W (V) ([T(B)] ([B]

$W \cap V = (W \cap V) \oplus [T^{\ell-1}(B)] \oplus [T^{\ell-2}(B)] \oplus \ldots\ldots \oplus \oplus [T(B)] \oplus [B]$,

dan proses ini well defined karena lema 7.

Tulis B*= , i = 0, ……, (- 1. Maka B* basis untuk . Dengan demikian = [B*], dan diperoleh

W (V= (W (V+ W (V) ([B*], i = 0, ……, (- 1.

Sedangkan lema 8 menjamin bahwa gabungan B* = adalah basis untuk W.

Tinggal diperlihatkan bahwa B* mempunyai CP dan DP.

Ambil sebarang b (B*, maka b (B*, untuk suatu i ({ 0, ……, (- 1 } dan (({ 1, ……, (}.

Akibatnya b (W (V. Karena W (V= [B*] ((W (V+ W (V) atau

[B*] ((W (V+ W (V) = { 0 } dan mengingat b ([B*] serta b (0, maka diperoleh b (W (V+ W (V. Karena W (V+ W (V = W ((V+ V) dan b (W, maka b (V+ V. Maka berdasarkan lema 9, b mempunyai FCP atau rantai { b, T(b), ……, $T^{(-i-1}$(b) } mempunyai CP. Dengan demikian B* mempunyai CP.

Selanjutnya dengan menggunakan induksi matematika dan menerapkan lema 3 dapat dibuktikan bahwa B* mempunyai DP. Dengan demikian karena B* basis Jordan untuk W mempunyai CP dan DP, maka terbukti bahwa W *marked*.

KESIMPULAN

Dari pembahasan sebelumnya dapat disimpulkan :

1. Salah satu ciri yang mengkarakterisasi subruang *marked* adalah eksistensi dari basis Jordan dari subruang yang bersangkutan yang mempunyai CP dan DP.
2. Karakterisasi yang lain untuk suatu subruang *marked* W dari V adalah dipenuhinya hubungan :

W (V+ W (V = W ((V+ V), (h (1, d (0, d + h ((,

dimana (adalah indeks nilpoten dari pemetaan linier T.

DAFTAR PUSTAKA

1. Arifin, A., *Aljabar Linier*, Penerbit ITB, Bandung, 1995.

2. Bru, R., L. Rodman and H. Scheneider, *Extensions of Jordan Bases for Invariant Subspace of a Matrix*, *Linear Algebra and Its Applications*, 1991, 150 : 209 – 225.

3. Burton, D. M., *Abstract and Linear Algebra*, Addison-Wesley, Massachusetts, 1972.

4. Ferrer, J., F. Puerta and X. Puerta, *Geometric Characterization and Classification of Marked Subspaces*, *Linear Algebra and Its Applications*, 1996, 235 : 35 – 46.

5. Friedberg, S., A. J. Insel and L. E. Spence, *Linear Algebra*, Prentice Hall, New York, 1992.

6. Gohberg, I., P. Lancaster and L. Rodman, *Invariant Subspaces of Matrices with Applications*, John Willey & Sons, New York, 1986.

7. Jacob, B., *Linear Algebra*, W. H. Freeman and Company, New York, 1990.

8. Roman, S., *Advanced Linear Algebra*, Springer-Verlag, New York, 1992.