

ANALISIS RAGAM MULTIVARIAT UNTUK RANCANGAN ACAK LENGKAP DENGAN PENGAMATAN BERULANG

Tatik Widiharih
Jurusan Matematika FMIPA UNDIP

Abstrak

Rancangan satu faktor dengan satuan percobaan yang dipergunakan relatif homogen dan pengamatan dilakukan secara berulang dalam waktu yang berbeda selama periode percobaan dikenal dengan RAL in Time. Waktu pengamatan dipandang sebagai faktor tambahan yang dialokasikan kedalam anak petak, sehingga RAL in time seolah olah dipandang sebagai rancangan split plot. Analisis ragam multivariat digunakan bila respon yang diamati dalam suatu penelitian lebih dari satu. Setiap model rancangan mempunyai analisis ragam multivariat yang bersesuaian. Statistik hitung yang digunakan salah satunya Wilk's Lamda, yang dibandingkan dengan statistik tabel U. Dengan suatu transformasi statistik Wilk's Lamda dapat didekati dengan statistik F yang berdistribusi F Fisher. Asumsi dalam manova adalah galat menyebar multinormal dengan vektor rata rata vektor nol dan matriks peragam (varian-kovarian) homogen. Penyelidikan asumsi multinormal dilakukan dengan plot quantil-quantil didekati dengan quantil chi-kuadrat, sedangkan asumsi kehomogenan matriks peragam dilakukan dengan uji Box's M. Uji lanjut dari faktor yang berpengaruh nyata terhadap respon yang diamati digunakan uji pembandingan ortogonal.

Kata kunci : RAL in time, split plot, manova, peragam.

1. PENDAHULUAN.

Percobaan yang hanya melibatkan satu faktor dan satuan percobaan yang digunakan relatif homogen, maka rancangan yang sesuai untuk percobaan tersebut adalah rancangan acak lengkap (RAL) (Gaspersz, 1991; Montgomery, 1991). Dalam beberapa kasus, respon yang diamati tidak hanya dilakukan sekali, melainkan pengamatan dilakukan secara berulang pada waktu yang berbeda selama masa percobaan. Rancangan yang sesuai untuk kasus ini adalah RAL in Time. Waktu pengamatan seolah olah dipandang sebagai faktor tambahan, sehingga dalam RAL in Time dipandang sebagai rancangan dua faktor dengan pola split-plot. Faktor yang dicobakan dialokasikan sebagai petak utama dan waktu pengamatan dialokasikan sebagai anak petak (Gomez & Gomez, 1984; Haslet, *et al*, 1997; SAS Institute Inc, 1990).

Respon yang diamati dalam suatu percobaan kadang kadang tidak tunggal, melainkan sebanyak p buah ($p > 2$), sehingga diperlukan analisis dalam bentuk multivariat. Bila dalam suatu penelitian percobaan dikaji pengaruh dari berbagai perlakuan terhadap lebih dari satu respon, maka metode analisis yang tepat adalah analisis ragam multivariat (Multivariate Analysis of Variance = MANOVA) (Gasperz, 1992; Johnson & Wichern, 1982; Anderson, 1988; Rencher, 1998).

Analisis ragam multivariat ini dapat diterapkan pada rancangan faktor tunggal maupun rancangan multifaktor. Setiap bentuk rancangan akan mempunyai analisis ragam multivariat yang bersesuaian. Manova untuk RAL in Time dapat dipandang sebagai manova split-plot. Semua perhitungan dalam manova berupa matriks, seyogyanya dikerjakan dengan komputer. Dalam

contoh kasus pada tulisan ini perhitungan dilakukan dengan paket program SPSS 10, minitab 13.20 dan SAS 6.12

Pembahasan dalam tulisan ini meliputi model linier , asumsi dan cara pembuktiannya, hipotesis yang dapat diambil, kriteria uji, uji lanjut untuk faktor yang berpengaruh nyata terhadap respon yang diamati. Model yang digunakan dibatasi pada model tetap (fixed model), dengan ulangan sama dan untuk memperjelas pembahasan diberikan contoh kasus percobaan dibidang peternakan.

2. DISKRIPSI TEORITIS

Suatu percobaan faktor tunggal (misalnya A) dengan a buah taraf faktor, waktu pengamatan dilakukan b kali, satuan percobaan relatif homogen masing masing perlakuan diulang n kali, respon yang diamati sebanyak p buah (p(2)), mempunyai model linier setiap pengamatan :

$$Y_{ijkl} = (\mu + (\mu_i + (\mu_{ik} + (\mu_{jl} + (\mu_{ijl} + (\mu_{ijkl}))))))$$

$i=1,2,\dots,a ; j=1,2,\dots,b ; k=1,2,\dots,n ; l=1,2,\dots,p \quad \dots\dots(2.1)$

Dengan : Y_{ijkl} : pengamatan respon ke l dari satuan percobaan ke k yang memperoleh taraf ke i faktor A dan waktu pengamatan ke j.

\bar{y}_l : rata rata dari respon ke l

α_i : pengaruh taraf ke i faktor A terhadap respon ke l

ϵ_{ikl} : komponen galat(a)

β_j : pengaruh waktu pengamatan ke j terhadap respon ke l

$\alpha\beta_{ijl}$: pengaruh interaksi taraf ke i faktor A dan waktu pengamatan ke j terhadap respon ke l.

ϵ_{ijkl} : komponen galat(b)

Layout data pengamatan :

| Faktor A | Waktu | Ulangan | | | | | |
|----------|-------|---------|-----|-------|--------|-----|-------|
| | | 1 | | | n | | |
| | | Respon | | | Respon | | |
| | | 1 | ... | p | 1 | ... | p |
| 1 | 1 | Y1111 | | Y111p | Y11n1 | | Y11np |
| | ... | | | | | | |
| | b | | | ... | ... | | ... |
| | | Y1B11 | | Y1b1p | Y1bn1 | | Y1bnp |
| ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... |
| a | 1 | Ya111 | | Ya11p | Ya1n1 | | Ya1np |
| | ... | | | | | | |
| | b | ... | | ... | ... | | ... |
| | | Yab11 | | Yab1p | Yabn1 | | Yabnp |

Asumsi :

- Vektor galat menyebar multinormal dengan vektor rata rata vektor nol dan mempunyai matriks peragam (varian-kovarian) (matriks peragam dari setiap perlakuan) sama / homogen.

Asumsi multinormal dari vektor galat (\mathbf{e}) digunakan plot quantil-quantil didekati dengan quantil chi-kuadrat (Johnson dan Wichern, 1982). Langkah langkahnya sebagai berikut :

1. Hitung $d_i^2 = (\mathbf{e} - E(\mathbf{e}))^T \mathbf{S}^{-1} (\mathbf{e} - E(\mathbf{e}))$ dengan \mathbf{e} vektor galat dan \mathbf{S} matriks peragam dari galat.
2. Urutkan d_i^2 dari yang terkecil sampai dengan terbesar.
3. Carilah nilai chi-kuadrat dari $(i-1/2)/n$ dengan derajat bebas p , dinotasikan dengan $\chi^2_p((i-1/2)/n)$ dengan n =banyaknya data dan p =banyaknya respon yang diamati.
4. Buat plot d_i^2 dengan $\chi^2_p((i-1/2)/n)$, bila hubungannya mengikuti pola garis lurus maka galat tersebut dapat dikatakan menyebar multinormal.

Untuk lebih meyakinkan bahwa memang hubungannya linier dapat dilakukan dengan menghitung korelasi Pearson antara $\chi^2_p((i-1/2)/n)$ dengan d_i^2 . Apabila nilai nilai korelasi tersebut nyata secara statistik berarti memang hubungan antara $\chi^2_p((i-1/2)/n)$ dengan d_i^2 adalah linier (grafik berupa garis lurus). Sehingga asumsi multinormal dipenuhi.

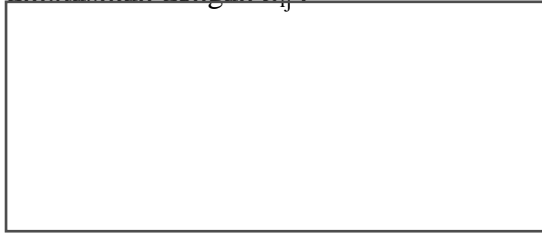
Sedangkan untuk menunjukkan vektor rata-rata dari vektor galat adalah vektor nol cukup dengan menunjukkan bahwa rata-rata dari galat masing masing respon adalah nol.

Asumsi kehomogenan matriks peragam dilakukan sebagai berikut (dengan Uji Box'M)(Rencer, 1998) :

$H_0 : (c_{11} = c_{12} = \dots = c_{ab} = ($

$H_1 : \text{paling sedikit sepasang tidak sama}$

Karena harga (c_{ij}) (i & j) tidak diketahui, maka diduga dengan matriks peragam data pengamatan dinotasikan dengan S_{ij} .



M dapat didekati dengan distribusi χ^2 atau F dengan aturan sebagai berikut :

$$C^{-1} = 1 - (2p^2 + 3p - 1)(a.b + 1) / (6(p+1).a.b(n-1)).$$

Tolak H_0 jika $MC^{-1} > \chi^2$ tabel dengan derajat bebas : $\frac{1}{2}.a.b.p(p+1)$.

$F_h = b_1.M$ jika $c_2 > c_1^2$ atau $F_h = (a_2.b_2.M) / (a_1(1+b_2.M))$ jika $c_2 < c_1^2$ dengan :

$$c_1 = (2p^2 + 3p - 1)(a.b + 1) / (6(p+1).a.b(n-1))$$

$$c_2 = (p-1)(p+2)((1/(n_{ij}^2) - 1/((n_{ij})^2)) / (6(a.b - 1))$$

$$a_1 = \frac{1}{2}(a.b - 1).p.(p+1) ; a_2 = (a_1 + 2) / |c_2 - c_1^2|$$

$$b_1 = (1 - c_1 - a_1/a_2)/a_1 ; b_2 = (1 - c_1 - 2/a_2)/a_2$$

Tolak H_0 jika $F_h > F_{tabel}$ dengan derajat bebas (a_1, a_2) .

Hipotesis yang dapat diambil dari rancangan ini adalah :

- $H_0 : [(c_{11} \ c_{12} \ \dots \ c_{1p})^T = \dots \dots \dots = [(a_1 \ a_2 \ \dots \ a_p)^T = [0 \ 0 \ \dots \ 0]^T$
(tidak ada pengaruh faktor A terhadap respon yang diamati)

$H_1 : \text{paling sedikit ada satu } (c_{il} \neq 0 ; i=1,2,\dots,a ; l=1,2,\dots,p$
(ada pengaruh faktor A terhadap respon yang diamati)
- $H_0 : [(c_{11} \ c_{12} \ \dots \ c_{1p})^T = \dots \dots \dots = [(b_1 \ b_2 \ \dots \ b_p)^T = [0 \ 0 \ \dots \ 0]^T$
(tidak ada pengaruh waktu pengamatan terhadap respon yang diamati)

$H_1 : \text{paling sedikit ada satu } (c_{jl} \neq 0 ; j=1,2,\dots,b ; l=1,2,\dots,p$
(ada pengaruh waktu pengamatan terhadap respon yang diamati)
- $H_0 : [((c_{111} \ (c_{112} \ \dots \ (c_{11p})^T = \dots = [((c_{ab1} \ ((c_{ab2} \ \dots \ ((c_{abp})^T = [0 \ 0 \ 0]^T$
(tidak ada pengaruh interaksi faktor A dan waktu terhadap respon yang diamati)

$H_1 : \text{paling sedikit ada satu } ((c_{ijl} \neq 0 ; i=1,2,\dots,a ; j=1,2,\dots,b ; l=1,2,\dots,p$
(ada pengaruh interaksi faktor A dan waktu terhadap respon yang diamati)

Perhitungan-perhitungan :

Faktor koreksi respon ke h : $FK_h = ((\sum_{i,j,k} Y_{ijkh})^2 / (a.b.n)$

Faktor koreksi respon ke h dan m : $FK_{hm} = ((\sum_{i,j,k} Y_{ijkh})(\sum_{i,j,k} Y_{ijkm}) / (a.b.n)$ dengan h (m

Matriks jumlah kuadrat dan jumlah hasil kali total (JKT & JHKT), dinotasikan dengan $T = [t_{hm}]$ merupakan matriks simetri $p \times p$ dengan elemen diagonal merupakan JKT dan selain itu JHKT.

$$t_{hh} = (\sum_{i,j,k} Y_{ijkh})^2 - FK_h \text{ dan } t_{hm} = (\sum_{i,j,k} (Y_{ijkh})(Y_{ijkm})) - FK_{hm}$$

Matriks jumlah kuadrat dan jumlah hasil kali perlakuan (JKP & JHKP), dinotasikan dengan $P=[p_{hm}]$ merupakan matriks simetri $p \times p$ dengan elemen diagonal merupakan JKP dan selain itu

JHKP.

$$p_{hh} = (\sum_j Y_{ij.h}^2 / n) - FK_h \text{ dan } p_{hm} = (\sum_j (Y_{ij.h})(Y_{ij.m}) / n) - FK_{hm}$$

Matriks jumlah kuadrat dan jumlah hasil kali petak utama (JKPU & JHKPU), dinotasikan dengan $U=[u_{hm}]$ merupakan matriks simetri pxp dengan elemen diagonal merupakan JKPU dan selain itu JHKPU.

$$u_{hh} = (\sum_k Y_{i.kh}^2 / b) - FK_h \text{ dan } u_{hm} = (\sum_k (Y_{i.kh})(Y_{i.km}) / b) - FK_{hm}$$

Matriks jumlah kuadrat dan jumlah hasil kali faktor A (JKA & JHKA), dinotasikan dengan $A=[a_{hm}]$ merupakan matriks simetri pxp dengan elemen diagonal merupakan JKA dan selain itu JHKA.

$$a_{hh} = (\sum_i Y_{i.h}^2 / (b.n)) - FK_h \text{ dan } a_{hm} = (\sum_i (Y_{i.h})(Y_{i.m}) / (b.n)) - FK_{hm}$$

Matriks galat(a) dinotasikan E_1 dengan $E_1 = U - A$

Matriks jumlah kuadrat dan jumlah hasil kali waktu pengamatan (JKW & JHKW), dinotasikan dengan $W = [w_{hm}]$ merupakan matriks simetri pxp dengan elemen diagonal merupakan JKW dan selain itu JHKW.

$$w_{hh} = (\sum_j Y_{.jh}^2 / (axn)) - FK_h \text{ dan } w_{hm} = (\sum_j (Y_{.jh})(Y_{.jm}) / (axn)) - FK_{hm}$$

Matriks jumlah kuadrat dan jumlah hasil kali untuk interaksi faktor A dan Waktu (JKAW & JHKAW) dinotasikan B dengan $B = P - A - W$. Matriks galat(b) dinotasikan E_2 dengan $E_2 = T - P - E_1$. Diperoleh tabel analisis ragam multivariat sebagai berikut :

Tabel 1 : Tabel Analisis Ragam Multivariat :

| Sumber keragam | db | JK & JHK | Statistik hitung (Wilk's lamda) | Statistik tabel (Tabel U) |
|----------------------|-------------|----------|---------------------------------|---------------------------|
| Petak utama faktor A | a - 1 | A | $ E1 / E1 + A $ | $U_p; (a-1); a(n-1)(($ |
| Galat(a) | a(n-1) | E1 | |) |
| Anak petak Waktu | b - 1 | W | | |
| Faktor A* waktu | (a-1)(b-1) | B | $ E2 / E2 + W $ | $U_p; (b-1); a(b-1)(n$ |
| Galat(b) | a(b-1)(n-1) | E2 | | -1)((|
| Total | abn - 1 | T | $ E2 / E2 + B $ | $U_p; (a-1)(b-1); a(b$ |
| | | | | -1)(n-1)((|

Tolak H_0 jika statistik hitung (statistik tabel.

Statistik Wilk's lamda dapat didekati dengan statistik F yang berdistribusi F Fisher dengan aturan sebagai berikut :

Tabel 2 : Transformasi Wilk's lamda ke distribusi F .

| Parameter | Pendekatan F | Db Ftabel |
|---------------------|---|---------------------------|
| p Db.perlakuan (vh) | | |
| (1 1 | $(1 - () / (. (ve + vh - p) / p$ | $P ; ve + vh - p$ |
| (1 2 | $(1 - (1/2) / (1/2 . (ve + vh - p - 1) / p$ | $2p ; 2(ve + vh - p - 1)$ |
| 1 (1 | $(1 - () / (. ve / vh$ | $Vh ; ve$ |
| 2 (1 | $(1 - (1/2) / (1/2 . (ve - 1) / vh$ | $2 Vh ; 2(ve - 1)$ |

V_h : db. perlakuan yang dihitung Wilk's lamdanya dan v_e : db. galat yang bersesuaian. p dan v_h selain pada tabel tersebut, didekati dengan distribusi F melalui transformasi :

$$F = (1 - (1/t)^{1/t} . (r.t - 2u) / (p.q) \text{ dibandingkan dengan F tabel dengan derajat bebas : } (p.q ; r.t - 2u)$$

Dengan p = banyaknya respon yang diamati

q = db. perlakuan yang dihitung Wilk's lamdanya

r = db. galat - (p-q+1)/2

u = (p.q - 2)/4

$t = ((p^2.q^2 - u) / (p^2 + q^2 - 5))^{1/2}$ jika $(p^2 + q^2 - 5) > 0$ dan selain itu $t=1$.

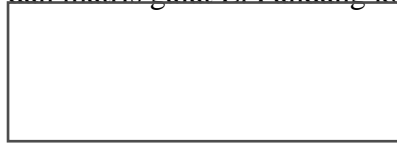
Dengan transformasi tersebut maka kriteria uji menjadi :

tolah H_0 jika $F_{hitung} > F_{tabel}$.

Seperti pada kasus univariat, maka bila ada hipotesis nol yang ditolak diperlukan uji lanjut. Pada rancangan ini pertama kali dilihat untuk pengaruh interaksi, bila pengaruh interaksi nyata maka uji lanjut dilakukan pada interaksi, bila tidak ada pengaruh interaksi baru dilihat

pengaruh faktor A dan pengaruh waktu pengamatan.

Uji lanjut dilakukan dengan menggunakan metode pembandingan linier orthogonal (kontras orthogonal). Secara umum bila banyaknya perlakuan yang akan diperbandingkan adalah t buah, maka dapat dibentuk (t-1) buah kontras saling orthogonal, masing masing perlakuan diulang n kali dan matriks galat E. Pandang kontras :



(dan (masing masing disebut kontras bila : $\sum c_i = 0$ dan $\sum b_i = 0$ dan kedua kontras disebut saling orthogonal bila : $\sum c_i b_i = 0$.

Matriks jumlah kuadrat dan jumlah hasil kali kontras ke n (JKK dan JHKK) dinotasikan $K_n = [k_{hm}]$ merupakan matriks simetri $p \times p$ dengan elemen diagonal merupakan JKK dan selain itu JHKK dengan :

$k_{hh} = (\sum c_i Y_{i,h})^2 / (n \cdot \sum c_i^2)$ dan $k_{hm} = (\sum c_i Y_{i,h}) (\sum c_i Y_{i,m}) / (n \cdot \sum c_i^2)$
 Statistik hitung : $F = |E| / |E + K_n|$ dibandingkan dengan statistik tabel $U_{p;a; (t-1)}(\alpha)$
 Hipotesa yang diambil : $H_0 : \mu = 0$ vs $H_1 : \mu \neq 0$,
 tolak H_0 jika statistik hitung > statistik tabel.

3. CONTOH KASUS

Suatu penelitian dibidang peternakan dengan faktor yang dicobakan adalah komposisi ransum (T_0, T_1, T_2), satuan percobaan yang digunakan adalah 9 sapi Angola yang relatif homogen, pengamatan dilakukan setiap 2 minggu sebanyak 4 kali, respon yang diamati adalah konsentrasi Hb ([Hb]) dan hematokrit (PCV). Diperoleh data pengamatan sebagai berikut :

Tabel 3 : Data [Hb] dan PCV dari 9 Ekor Sapi Angola yang Memperoleh Berbagai Ransum dan Pengamatan Masing-masing Sapi Dilakukan Sebanyak 4 Kali Selama Waktu Penelitian .

| Ransum | Waktu | Ulang | [Hb] | PCV |
|--------------|--------|--------|---------|--------|
| Ransum | 0.9606 | 0.0507 | 4; 10 | 0.9944 |
| Waktu | 0.5100 | 2.2681 | 6; 34 | 0.0600 |
| Ransum*Waktu | 0.6867 | 0.5859 | 12 ; 34 | 0.8380 |

Dapat disimpulkan bahwa :

- Tidak ada pengaruh ransum terhadap konsentrasi Hb dan PCV.
- Tidak ada pengaruh waktu pengamatan terhadap konsentrasi Hb dan PCV.
- Tidak ada pengaruh interaksi ransum dan waktu pengamatan terhadap konsentrasi Hb dan PCV.

Karena tidak ada faktor yang berpengaruh terhadap respon ([Hb] dan PCV) maka tidak diperlukan uji lanjut.

Analisis ragam multivariat ini hanya bisa digunakan bila asumsi vektor galat menyebar multinormal dengan vektor rata-rata vektor nol dan kehomogenan dari matriks peragam. Dalam beberapa kasus terapan sering tidak dipenuhinya asumsi tersebut sehingga diperlukan suatu transformasi sehingga asumsi dipenuhi atau digunakan analisis lain yang sesuai dengan kasus yang dihadapi.

DAFTAR PUSTAKA

1. Anderson T. W, *An Introduction to Multivariate Statistical Analysis*, John Wiley & Sons Inc, New York, 1988.
 2. Gasperzs V, *Teknik Analisis Dalam Penelitian Percobaan 1*, Tarsito Bandung, 1991.
 3. Gasperzs V, *Teknik Analisis Dalam Penelitian Percobaan 2*, Tarsito Bandung, 1992.
 4. Gomez K.A & Gomez A. A, *Statistical Procedures for Agricultural Research*, 2nd Edition, John Wiley & Sons Inc, Singapore, 1984.
 5. Haslet, et al 61771, *Experimental design for Researchers*, Departement of Statistics, Faculty of Information and Mathematical Science, Massey University, 1997.
 6. Johnson R. A & Wichern D. W, *Applied Multivariate Statistical Analysis*, Prentice Hall Inc, New York, 1982.
 7. Montgomery D. C, *Design and Analysis of Experiment*, Third Edition, John Wiley & Sons Inc, New York, 1991.
 8. Rencer A. C, *Multivariate Statistical Inference and Applications*, John Wiley & Sons Inc, New York, 1998.
 9. SAS Institute Inc, *SAS / STAT User's Guide*, Version 6, Fourth Edition, SAS Campus Drive, Cary, NC 27513, 1990.
-



