

PERBANDINGAN ESTIMATOR REGRESI NONPARAMETRIK MENGGUNAKAN METODE FOURIER DAN METODE WAVELET

Suparti

Jurusan Matematika FMIPA UNDIP
Jl. Prof. H. Soedarto, S.H, Semarang 50275

Abstract. Let $\{(X_i, Y_i)\}_{i=1}^n$ be independent observation data and follows a model $Y_i = f(X_i) + \varepsilon_i$, $i = 1, 2, \dots, n$ with f is an unknown regression function and ε_i are independent random variables with mean 0 and variance σ^2 . The function f could be estimated by parametric and nonparametric approaches. In nonparametric approach, the function f is assumed to be a smooth function or quadratic integrable function. If f belongs to the Hilbert space $L^2(R)$ then the function f could be estimated by estimator of orthogonal series, especially by Fourier series estimator. Another estimator of orthogonal series which could be used to estimate f is wavelet estimator. Wavelet estimator is an extension of Fourier series estimator but it is more effective than the Fourier series estimator because its IMSE converges to zero quicker than the Fourier series estimator.

Keywords: Nonparametric regression estimation, Fourier series estimator, wavelet estimator.

1. PENDAHULUAN

Sebelum dikembangkan wavelet para ilmuwan menggunakan barisan dan transformasi Fourier untuk menganalisa kelakuan fungsi gelombang dan menganalisa fungsi-fungsi tersebut. Karena tuntutan dunia terapan antara lain penganalisaan gelombang bunyi, elektromagnetik dan lain-lain yang umumnya bukan gelombang periodik sederhana tetapi gelombang-gelombang lokal sehingga tidak mudah di-hampiri dengan deret Fourier, walaupun bisa, membutuhkan banyak koefisien Fourier sehingga tidak efektif. Metode wavelet merupakan suatu metode yang relatif lebih baru dan lebih efektif dari deret Fourier karena basis dalam wavelet mampu menangani masalah-masalah lokal yang tidak dapat dilakukan oleh Fourier, karena basis wavelet ditentukan oleh letak dan skalanya.

Misalkan ada sejumlah n data pengamatan independen $\{(X_i, Y_i)\}_{i=1}^n$ dan akan dicari hubungan antara X dan Y yang memenuhi model

$$Y_i = f(X_i) + \varepsilon_i, \quad i=1, 2, \dots, n, \quad (1.1)$$

dengan f fungsi regresi yang tidak diketahui dan ε_i variabel galat random indepen-

den dengan mean 0 dan varian σ^2 . Jika bentuk fungsi f diketahui maka untuk mengestimasi fungsi f digunakan pendekatan parametrik, akan tetapi jika bentuk fungsi f tidak diketahui maka digunakan pendekatan nonparametrik.

Untuk mencari estimator dari fungsi f dengan pendekatan nonparametrik, telah diperkenalkan oleh Eubank [2] estimator Fourier yang merupakan deret dengan basis fungsi konstan, sinus, dan cosinus. Kemudian beberapa peneliti ([3],[4] serta [6]) mengembangkan estimator deret Fourier menjadi estimator wavelet yang mempunyai basis fungsi wavelet.

Suatu ukuran kebaikan estimator dari f dapat dilihat dari tingkat kesalahannya. Semakin kecil tingkat kesalahannya semakin baik estimasinya. Salah satu ukuran kesalahan dapat dilihat dari IMSE (integral rata-rata kesalahan kuadrat) atau MSE (Rata-rata kesalahan kuadrat). Dalam penelitian ini dibandingkan kebaikan antara estimator regresi nonparametrik menggunakan metode Fourier dan metode wavelet khususnya wavelet linier berdasarkan besarnya IMSE asimtotis.

2. METODE PENELITIAN

Penelitian ini merupakan kajian literatur yang kemudian dikembangkan dengan simulasi menggunakan software S+ Wavelets. Dalam penelitian ini dilakukan perbandingan estimator deret Fourier dan deret wavelet secara teoritik maupun secara visualisasi. Secara teoritik kebaikan estimator dilihat dari besar kecilnya laju konvergensi IMSE dan secara visualisasi kebaikan estimator dilihat dari kedekatan antara fungsi estimasi dan fungsi aslinya. Semakin besar laju konvergensi semakin baik estimasinya. Secara visualisasi dilakukan simulasi pada data yang dibangkitkan dari suatu fungsi yang diberi error (*noise*). Dari data yang telah diberi error ini kemudian diestimasi fungsinya menggunakan pendekatan deret Fourier dan deret wavelet. Hasil estimasi fungsi selanjutnya dibandingkan dengan fungsi aslinya. Semakin cepat mendekati fungsi aslinya semakin baik estimasinya.

3. HASIL DAN PEMBAHASAN

Sebelum dibahas tentang deret Fourier dan deret wavelet perlu dijelaskan terlebih dahulu pengertian $L^2(R)$. $L^2(R)$ adalah ruang fungsi yang kuadratnya terintegralkan, dengan kata lain $L^2(R) = \{f: \int_{-\infty}^{\infty} f(x)^2 dx < \infty\}$. Menurut [7], $L^2(R)$ merupakan ruang Hilbert dengan perkalian skalar dan norma yang didefinisikan sebagai $\langle f, g \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x)dx$ dan

$$\|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle} = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} f(x)^2 dx}.$$

Dengan cara yang sama,

$$L^2[0, 2\pi] = \{f: \int_0^{2\pi} f(x)^2 dx < \infty\}.$$

Deret Fourier

Jika $f \in L^2[0, 2\pi]$, maka f dapat didekati dengan deret Fourier,

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{j=1}^{\infty} (a_j \cos(jx) + b_j \sin(jx)), \quad (3.1)$$

dengan koefisien Fourier [2]

$$a_j = 1/\pi \langle f, \cos(j \cdot) \rangle, \quad j = 0, 1, 2, \dots \text{ dan}$$

$$b_j = 1/\pi \langle f, \sin(j \cdot) \rangle, \quad j = 1, 2, 3, \dots$$

Deret Fourier (2) dapat didekati oleh

$$f_J(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{j=1}^J (a_j \cos(jx) + b_j \sin(jx)), \quad (3.2)$$

dengan

$$a_j = 1/\pi \langle f, \cos(j \cdot) \rangle$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(jx) dx \quad \frac{1}{\pi},$$

$$j = 0, 1, 2, \dots, J,$$

$$b_j = 1/\pi \langle f, \sin(j \cdot) \rangle$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(jx) dx,$$

$$j = 1, 2, 3, \dots, J \text{ untuk } J \text{ besar.}$$

Deret Wavelet

Fungsi wavelet pertama kali diperkenalkan oleh Haar tahun 1910. Jenis wavelet dibedakan menjadi 2 yaitu wavelet induk Ψ dan wavelet bapak ϕ yang keduanya melahirkan seluruh keluarga wavelet $\Psi_{j,k}(x) = (p2^j)^{1/2} \Psi(p2^j x - k)$ dan $\phi_{j,k}(x) = (p2^j)^{1/2} \phi(p2^j x - k)$ untuk suatu skalar $p > 0$, dan tanpa mengurangi keumuman dapat diambil $p = 1$, sehingga

$$\Psi_{j,k}(x) = 2^{j/2} \Psi(2^j x - k) \text{ dan}$$

$$\phi_{j,k}(x) = 2^{j/2} \phi(2^j x - k).$$

Kemudian [1] mengembangkan wavelet Haar menjadi wavelet Daubechies, wavelet simetris dan coiflet. Pendekomposisian sembarang fungsi $f \in L^2(R)$ ke dalam basis wavelet ortonormal ([3],[4],[6]),

$$f(x) = \sum_k c_{j_0,k} \phi_{j_0,k} + \sum_{j \geq j_0} \sum_k d_{j,k} \Psi_{j,k}, \quad (3.3)$$

dengan

$$c_{j_0,k} = \langle f, \phi_{j_0,k} \rangle = \int_R f(x) \phi_{j_0,k}(x) dx \text{ dan}$$

$$d_{j,k} = \langle f, \Psi_{j,k} \rangle = \int_R f(x) \Psi_{j,k}(x) dx.$$

Deret wavelet (4) dapat didekati oleh

$$f_J(x) = \sum_k c_{j_0,k} \phi_{j_0,k} + \sum_{j=j_0}^{J-1} \sum_k d_{j,k} \Psi_{j,k}, \quad (3.4)$$

dengan $c_{j0,k} = \langle f, \phi_{j0,k} \rangle$, $d_{j,k} = \langle f, \psi_{j,k} \rangle$ dan J besar.

Deret wavelet (5) ekuivalen dengan

$$f_J(x) = \sum_k c_{J,k} \phi_{J,k} \text{ dengan } c_{J,k} = \langle f, \phi_{J,k} \rangle. \quad (3.5)$$

J merupakan parameter pemulus dan dinamakan level resolusi.

Estimator deret Fourier

Jika $\{(X_i, Y_i)\}_{i=1}^n$, data observasi independen mempunyai model (3.1), $X_i \in [0, 2\pi]$, dan f fungsi regresi tidak diketahui, maka estimator deret Fourier dari f adalah

$$\hat{f}_J(x) = \frac{1}{2} \hat{a}_0 + \sum_{j=1}^J (\hat{a}_j \cos(jx) + \hat{b}_j \sin(jx)),$$

dengan estimator koefisien Fourier:

$$\hat{a}_j = \frac{1}{\pi} \langle \tilde{f}, \cos(j \cdot) \rangle = \frac{1}{\pi} \sum_{i=1}^n Y_i \int_{A_i} \cos(jx) dx,$$

$$j = 0, 1, 2, \dots, J,$$

$$\hat{b}_j = \frac{1}{\pi} \langle \tilde{f}, \sin(j \cdot) \rangle = \frac{1}{\pi} \sum_{i=1}^n \int_{A_i} Y_i \sin(jx) dx,$$

$$j = 1, 2, 3, \dots, J,$$

$A_i, i = 1, 2, \dots, n$ adalah interval saling asing

sehingga $\bigcup_{i=1}^n A_i = [0, 2\pi]$ dan $X_i \in A_i$.

Khususnya jika $X_i = 2\pi i/n$, maka

$$\hat{a}_j = \frac{2}{n} \sum_{i=1}^n Y_i \cos(jX_i) dx, \quad j = 0, 1, 2, \dots, J,$$

$$\hat{b}_j = \frac{2}{n} \sum_{i=1}^n Y_i \sin(jX_i), \quad j = 1, 2, 3, \dots, J.$$

Tingkat kemulusan estimator deret Fourier \hat{f}_J ditentukan oleh pemilihan parameter pemulus J . Semakin kecil parameter pemulus J , semakin mulus estimasinya dan semakin besar parameter pemulus J , semakin kurang mulus estimasi dari f . Oleh karena itu, perlu dipilih J yang optimal. Pemilihan J optimal didasarkan pada IMSE asimtotis minimal dari \hat{f}_J .

Sifat asimtotis estimator deret Fourier

Estimator koefisien deret Fourier \hat{a}_j dan \hat{b}_j merupakan estimator tak bias [5] dari a_j dan b_j , sebab $E(\hat{a}_j) = a_j$ dan $E(\hat{b}_j) = b_j$.

$$\begin{aligned} \text{IMSE}(\hat{f}) &= \int_0^{2\pi} E(f - \hat{f})^2 dx \\ &= E \int_0^{2\pi} (f - \hat{f})^2 dx \\ &= E \left(\left(\frac{\pi}{2} (a_0 - \hat{a}_0)^2 + \pi \sum_{j=1}^J ((a_j - \hat{a}_j)^2 + (b_j - \hat{b}_j)^2) + \pi \sum_{j=J+1}^{\infty} (a_j^2 + b_j^2) \right) \right) \\ &= \left(\frac{\pi}{2} \text{var}(\hat{a}_0) + \pi \sum_{j=1}^J (\text{var}(\hat{a}_j) + \text{var}(\hat{b}_j)) + \pi \sum_{j=J+1}^{\infty} (a_j^2 + b_j^2) \right). \end{aligned}$$

$$\text{var}(\hat{a}_0) = \frac{4}{n} \sigma^2, \quad \text{var}(\hat{a}_j) = \frac{2\sigma^2}{n}, \quad j = 1, 2, \dots, J \text{ dan } \text{var}(\hat{b}_j) = \frac{2\sigma^2}{n}, \quad j = 1, 2, \dots, J.$$

Selanjutnya jika $f \in C^2[0, 2\pi]$ maka

$$\begin{aligned} a_j &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(jx) dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} (g(\pi) + (x - \pi)g'(\pi) + \frac{(x - \pi)^2}{2!} f^{(2)}(\pi)) \cos(jx) dx. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_j &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(jx) dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} (f(\pi) + (x - \pi)f'(\pi) + \frac{(x - \pi)^2}{2!} f^{(2)}(\pi)) \sin(jx) dx \end{aligned}$$

$$\text{Padahal } \int_0^{2\pi} \cos(jx) dx = 0,$$

$$\int_0^{2\pi} (x - \pi) \cos(jx) dx = 0,$$

$$\int_0^{2\pi} (x - \pi)^2 \cos(jx) dx = \frac{4\pi}{j^2},$$

$$\int_0^{2\pi} \sin(jx) dx = 0,$$

$$\int_0^{2\pi} (x - \pi) \sin(jx) dx = -\frac{2\pi}{j} \text{ dan}$$

$$\int_0^{2\pi} (x - \pi)^2 \sin(jx) dx = 0.$$

Jadi $a_j^2 = \frac{16}{j^4} [f'(\pi)]^2$,

$$b_j^2 = \frac{4}{j^2} [f''(\pi)]^2.$$

$$\sum_{j=J+1}^{\infty} (a_j^2 + b_j^2) = \sum_{j=J+1}^{\infty} \left(\frac{16}{j^4} [f'(\pi)]^2 + \frac{4}{j^2} [f''(\pi)]^2 \right)$$

$$= \int_{x=J+1}^{\infty} \frac{A_1}{x^4} + \frac{A_2}{x^2} dx,$$

$$= \left[-\frac{A_1}{3x^3} - \frac{A_2}{x} \right]_{x=J+1}^{\infty},$$

$$= \left[\frac{A_1}{(J+1)^3} + \frac{A_2}{(J+1)} \right],$$

$$= \frac{A_2}{J+1} + o((J+1)^{-1}), \text{ untuk } J \rightarrow \infty.$$

Jadi $IMSE(\hat{f}) =$

$$\frac{2\pi\sigma^2}{n} + \pi \sum_{j=1}^J \left(\frac{2\sigma^2}{n} + \frac{2\sigma^2}{n} \right) + \frac{A_2}{J+1}$$

$$= \frac{2\pi\sigma^2}{n} (2J+1) + \frac{A_2}{J+1}$$

$$\approx \frac{A_1 J}{n} + \frac{A_2}{J}, \text{ untuk } n, J \rightarrow \infty.$$

J optimal adalah nilai J yang meminimumkan $IMSE(\hat{f})$, yaitu harga J sehingga

$$\frac{\partial IMSE(\hat{f})}{\partial J} = 0, \text{ dan diperoleh}$$

$$\frac{2A_1}{n} - \frac{A_2}{J^2} = 0 \text{ sehingga } J \text{ opt} =$$

$$\left(\frac{A_2 n}{2A_1} \right)^{1/2} \propto n^{1/2}. \text{ Pada } J \text{ opt} \propto n^{1/2} \text{ didapatkan } IMSE \text{ opt} \propto n^{-1/2}.$$

Estimator wavelet

Jika ada sekumpulan data independen $\{(X_i, Y_i)\}_{i=1}^n$, dengan $n = 2^m$, m bilangan bulat positif dan mempunyai model (3.1) dan X_i rancangan titik reguler pada

ruang $[0,1]$ dengan $X_i = i/n$, maka estimator regresi wavelet pada level resolusi J

adalah $\hat{f}_J(x) = \sum_k \hat{c}_{j_0,k} \phi_{j_0,k}(x) +$

$$\sum_{j=j_0}^{J-1} \sum_k \hat{d}_{j,k} \Psi_{j,k}(x), \quad (3.6)$$

dengan

$$\hat{c}_{j_0,k} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i \phi_{j_0,k}(X_i),$$

$$\hat{d}_{j,k} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i \Psi_{j,k}(X_i) \text{ atau}$$

$$\hat{f}_J(x) = \sum_k \hat{c}_{J,k} \phi_{J,k}(x),$$

dengan $\hat{c}_{J,k} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i \phi_{J,k}(X_i) \quad (3.7)$

Estimator (3.6) atau (3.7) dinamakan estimator wavelet linier. Tingkat kemulusan estimator wavelet ditentukan oleh level resolusi J . Semakin kecil J semakin mulus estimasinya [6].

Sifat asimtotis estimator wavelet linier

Estimator koefisien wavelet $\hat{c}_{j,k}$ dan $\hat{d}_{j,k}$ merupakan estimator tak bias dari $c_{j,k}$ dan $d_{j,k}$ [5].

Teorema 3.1. [4] misalkan f mempunyai derivatif yang kontinu dan terbatas tingkat 2 sehingga

$$\int_0^1 x^r \Psi(x) dx = \begin{cases} 0, & \text{jika } 0 \leq k \leq l \\ 0 \neq K < \infty, & \text{jika } k = 2 \end{cases}.$$

Jika $n, p \rightarrow \infty$ dan \hat{f} estimator regresi wavelet pada level nol maka

$$IMSE(\hat{f}) = \int_0^1 E(\hat{f} - f)^2 dx$$

$$= (1 + o(1))(A_1 n^{-1} p + A_2 p^{-4}),$$

dengan $A_1 = \sigma^2, \quad A_2 = \kappa^2 (1 - 2^{-4})^{-1}$

$$\int_0^1 (f^{(2)}(x))^2 dx \text{ dan } \kappa = \frac{1}{2!} \int_0^1 x^2 \Psi(x) dx.$$

Bukti.

Estimator regresi wavelet pada level nol

adalah $\hat{f} = \sum_k \hat{c}_{0,k} \phi_{0,k}$ dengan

$$\hat{c}_{0,k} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i \phi_{0,k}(X_i) \text{ dan IMSE } (\hat{f}) = \int_0^1 E(f - \hat{f})^2 dx = E \int_0^1 (f - \hat{f})^2 dx.$$

$$\begin{aligned} \text{IMSE } (\hat{f}) &= E \int_0^1 \left(\sum_k (\hat{c}_{0,k} \phi_{0,k}) - \sum_k (c_{0,k} \phi_{0,k}) - \sum_{j \geq 0} \sum_k (d_{j,k} \psi_{j,k}) \right)^2 dx \\ &= E \int_0^1 \left(\sum_k ((\hat{c}_{0,k} - c_{0,k}) \phi_{0,k}) - \sum_{j \geq 0} \sum_k (d_{j,k} \psi_{j,k}) \right)^2 dx. \end{aligned}$$

Karena keortonormalan ϕ dan Ψ diperoleh

$$\int_0^1 E(\hat{f} - f)^2 dx = \sum_k (\hat{c}_{0,k} - c_{0,k})^2 + \sum_{j \geq 0} \sum_k d_{j,k}^2 = S_1 + S_2.$$

Selanjutnya

$$\begin{aligned} E(S_1) &= E \left(\sum_k (\hat{c}_{0,k} - c_{0,k})^2 \right) \\ &= \sum_k n^{-2} \sigma^2 \sum_{i=1}^n (\phi_{0,k}(X_i))^2 \\ &= n^{-1} p \sigma^2 + o(n^{-1} p), \text{ untuk } n, p \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Selanjutnya $S_2 = \sum_{j \geq 0} \sum_k d_{j,k}^2$ dan

$$\begin{aligned} E(S_2) &= \sum_{j \geq 0} \sum_k d_{j,k}^2. \\ d_{j,k} &= p_j^{-1/2} \int_0^1 f(x) \phi(p_j x - k) dx \\ &= p_j^{-1/2} \int_0^1 f\left(\frac{k+y}{p_j}\right) \psi(y) dy. \end{aligned}$$

Deret Taylor $d_{j,k}$ di sekitar k/p_j adalah

$$\begin{aligned} d_{j,k} &= p_j^{-1/2} \int_0^1 \psi(y) \left(f(k/p_j) + \frac{y}{p_j} f'(k/p_j) + \frac{y^2}{2! p_j^2} f^{(2)}(k/p_j) + o(y^2) \right) dy \end{aligned}$$

$$= p_j^{-(2+1/2)} f^{(2)}(k/p_j) \kappa, \text{ dengan}$$

$$\kappa = \frac{1}{2!} \int_0^1 \psi(x)^2 dx.$$

$$\begin{aligned} \text{Jadi } S_2 &= \sum_{j \geq 0} \sum_k \left(p_j^{-(2+1/2)} f^{(2)}\left(\frac{k}{p_j}\right) \kappa \right)^2 \\ &= p^{-4} (1 - 2^{-4})^{-1} \kappa^2 \int_0^1 (f^{(2)}(x))^2 dx, \end{aligned}$$

sehingga

$$\text{IMSE } (\hat{f}) = (1 + o(1))(A_1 n^{-1} p + A_2 p^{-4}),$$

dengan $A_1 = \sigma^2$,

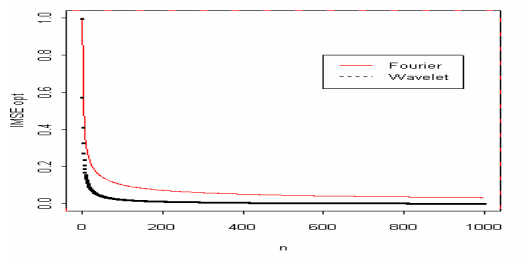
$$A_2 = \kappa^2 (1 - 2^{-4})^{-1} \int_0^1 (f^{(2)}(x))^2 dx \text{ dan}$$

$$\kappa = \frac{1}{2!} \int_0^1 \psi(x)^2 dx. \quad \blacksquare$$

Dari teorema di atas terlihat bahwa untuk $n, p \rightarrow \infty$ maka $\text{IMSE } (\hat{f}) \rightarrow 0$.

Tingkat kemulusan estimator wavelet (\hat{f}) ditentukan oleh parameter pemulus p (jika j tetap). Nilai p kecil memberikan estimasi fungsi yang sangat mulus dan p besar memberikan estimasi fungsi yang kurang mulus, sehingga dengan meminimalkan $\text{IMSE } (\hat{f})$ akan didapatkan p yang optimal. Dengan kriteria meminimalkan $\text{IMSE } (\hat{f})$ maka diperoleh $p \text{ opt} \propto n^{1/5}$ dan $\text{IMSE opt} \propto n^{-4/5}$. Sebaliknya jika p tetap ($p=1$), maka parameter pemulus j optimal dapat dicari dengan mengganti $n^{1/5} \propto 2^j$, sehingga $j \text{ opt} \propto \frac{1}{5} \log n$ dan $\text{IMSE opt} \propto n^{-4/5}$.

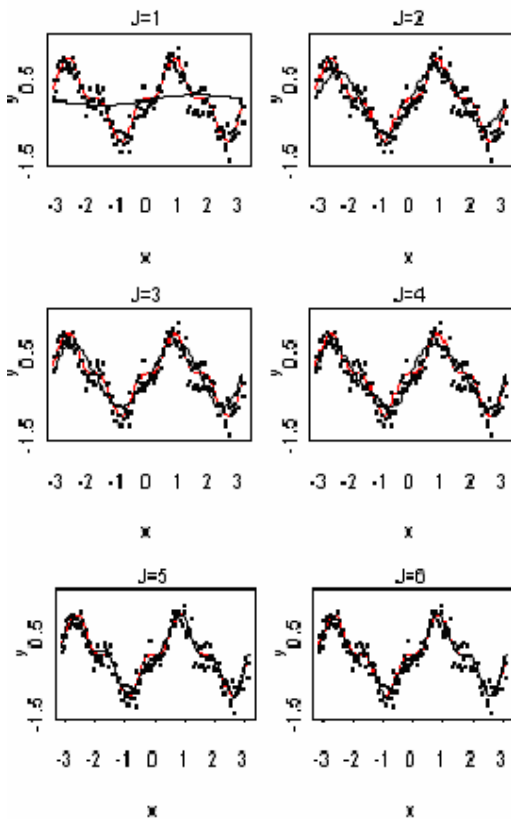
Berdasarkan sifat asimtotis dari estimator Fourier dan estimator wavelet linier, diperoleh IMSE opt untuk estimator Fourier $\propto n^{-1/2}$ dan IMSE opt untuk estimator wavelet $\propto n^{-4/5}$. Perbandingan tingkat penurunan IMSE opt secara grafis disajikan pada gambar 1. Secara visualisasi terlihat bahwa IMSE opt dari estimator wavelet lebih cepat menuju nol dari estimator Fourier. Ini menunjukkan bahwa estimator wavelet lebih baik dari estimator Fourier.



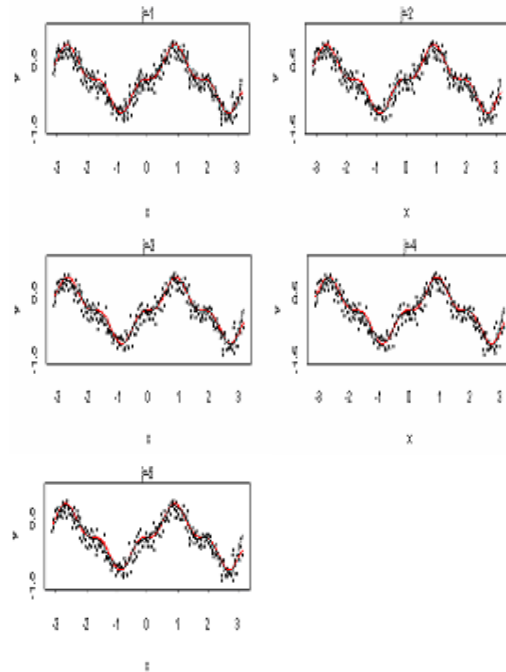
Gambar 1. IMSE opt dari estimator Fourier dan estimator

Contoh Simulasi

Diberikan suatu data yang dibangkitkan dari sebuah fungsi $y = (\sin x)^3 + \varepsilon$ dengan ε merupakan suatu noise yang berdistribusi $N(0; 0,1)$ dan $-\pi \leq x \leq \pi$. Akan dibandingkan fungsi asli dengan fungsi hasil estimasi menggunakan metode Fourier dan metode wavelet. Data diolah dengan program S+wavelets. Hasilnya sebagai berikut:



Gambar 2. Estimasi regresi dengan metode Fourier



Gambar 3. Estimasi regresi dengan metode wavelet

Keterangan gambar 2 dan gambar 3:

- : diagram pencar
- (red) : fungsi asli
- (black) : fungsi estimasi

Dari hasil simulasi, secara visual dapat dilihat bahwa pada estimasi fungsi regresi dengan metode Fourier, fungsi estimasi mendekati fungsi aslinya dimulai pada level resolusi 5, 6 dan seterusnya, tetapi untuk estimasi fungsi regresi dengan metode wavelet dimulai pada level resolusi -3, -4 dan seterusnya. Jadi secara visual estimasi fungsi regresi menggunakan wavelet lebih cepat mendekati fungsi aslinya dari estimasi dengan deret Fourier. Jadi dalam estimasi fungsi regresi, metode wavelet lebih efisien dari metode Fourier .

4. PENUTUP

Dekomposisi fungsi dalam wavelet merupakan generalisasi dari deret Fourier. Deret wavelet dibangun oleh fungsi wavelet ayah dan wavelet ibu beserta keluarganya, sedangkan dalam deret Fourier dibangun oleh fungsi konstan, sinus dan cosinus. Estimator regresi wavelet lebih baik dari estimator deret Fourier karena laju

konvergensi IMSE dalam estimator wavelet lebih cepat menuju nol dari estimator deret Fourier.

5. DAFTAR PUSTAKA

- [1] Daubechies, I. (1992), *Ten Lectures on Wavelets*, Capital City Press, Philadelphia.
 - [2] Eubank, R.L. (1998), *Spline Smoothing and Nonparametric Regression*, Marcel Dekker.Inc, New York.
 - [3] Hall,P. and Patil,P. (1995), *On Wavelet Methods for Estimating Smooth Functions*, Bernoulli, **1**(1/2): 041-058.
 - [4] Hall,P. and Patil,P. (1996), *On the Choice of Smoothing Parameter, Threshold and Truncation in Nonparametrik Regression by non-linier Wavelet Methods*, J.R.Statist.Soc.B, **58**(2): 361-377.
 - [5] Suparti (1999), *Estimasi Fungsi Mulus dengan Metode Wavelet*, Tesis S-2, UGM, Yogyakarta.
 - [6] Odgen, R.T. (1997), *Essential Wavelets for Statistical Applications and Data Analysis*, Birkhauser, Boston.
 - [7] Vetterli,M. and Kovacevic,J. (1995), *Wavelets and Subband Coding*, Prentice Hall PTR, New Jersey.
-