

EKUIVALENSI INTEGRAL BOCHNER DENGAN INTEGRAL MCSHANE KUAT UNTUK FUNGSI DENGAN NILAI DI DALAM RUANG BANACH

Y.D. Sumanto
Jurusan Matematika FMIPA UNDIP

Abstrak

Integral McShane fungsi-fungsi bernilai real ekuivalen dengan Integral Lebesgue, namun untuk fungsi bernilai vektor tidak selalu demikian. Dapat ditunjukkan bahwa Integral Bochner (Integral Lebesgue untuk fungsi bernilai vektor) ekuivalen dengan Integral McShane kuat.

Kata kunci : Integral McShane, Integral McShane kuat, Integral Bochner.

1. PENDAHULUAN

Integral McShane fungsi-fungsi dengan nilai di dalam suatu Ruang Banach didefinisikan sejalan dengan Integral McShane fungsi-fungsi bernilai real, yaitu dengan

$\int_X f(x) dx$

menggantikan tanda nilai mutlak dengan tanda norm . Gordon, 1994, menunjukkan bahwa Integral McShane ekuivalen dengan Integral Lebesgue.

Dalam tulisan ini akan didefinisikan Integral McShane Kuat dan ditunjukkan bahwa Integral Bochner ekuivalen dengan Integral McShane Kuat.

I

Dalam tulisan ini merupakan interval tertutup di dalam garis real, X ruang Banach

J

dengan norm . Fungsi-fungsi di dalam tulisan ini dengan domain bilangan real dan

f

dengan nilai di dalam X . Fungsi $f : (X)$ dikatakan kontinu absolut kuat pada

J

jika untuk setiap bilangan $\epsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$ sehingga jika barisan interval tak saling

I_n

J

J

tumpang tindih di dalam J dengan $\sum |I_n| < \delta$ berlaku

$\sum \int_{I_n} f(x) dx < \epsilon$

f

Fungsi $f : (X)$ dikatakan terintegral Bochner pada J jika dan hanya jika ada fungsi-fungsi



kontinu absolut kuat F pada dengan $F(x) = f(x)$ hampir di mana-mana pada . Dalam hal ini derivatif F adalah derivatif Frechet.

2. PEMBAHASAN

Berikut ini didefinisikan Integral McShane untuk fungsi bernilai vektor.

Definisi 1



Fungsi $f : (X)$ dikatakan terintegral McShane pada jika terdapat vektor $A \in X$ sehingga



untuk setiap bilangan $(> 0$ terdapat fungsi positif $($ pada sehingga jika dengan $a =$ dan berlaku



.



Himpunan pasangan titik interval seperti dalam Definisi 1 disebut partisi (*-fine* pada , dan



vektor $A \in X$ dalam definisi tersebut adalah tunggal dan disebut nilai integral f pada dan ditulis

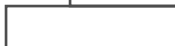
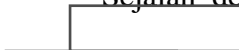


.

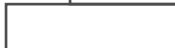
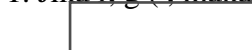


Koleksi semua fungsi berniali vektor terintegral McShane pada ditulis .

Sejalan dengan Integral McShane fungsi bernilai real dapat ditunjukkan bahwa :



1. Jika $f, g \in \mathcal{M}(X)$, maka $f + g \in \mathcal{M}(X)$ dan



[]

2. Jika f, g dan c skalar, maka cf dan

[]

[]

[]

[]

3. Jika f , maka f untuk setiap $($.

[]

[]

[]

4. Jika f dan c , maka

[]

[]

Dari 3 dan 4 di atas diperoleh bahwa untuk setiap interval $($ terdapat vektor $F(u,v) =$

[]

[]

[]

di dalam X . Dari sini diperoleh integral tak tentu fungsi f pada $,$ yaitu untuk setiap t ($$

[]

[]

[]

Fungsi $f : (X$ tersebut disebut fungsi primitif f pada $.$

Berikut ini didefinisikan Integral McShane Kuat.

Definisi 2

[]

[]

[]

Fungsi $f : (X$ dikatakan terintegral McShane kuat pada $,$ jika f ($$ dan untuk setiap

[]

bilangan $(> 0$ terdapat fungsi positif $($ pada sehingga

[]

[]

[]
[]

untuk setiap partisi (*-fine* pada . Dalam hal ini

[]
[]

Koleksi semua fungsi terintegral McShane kuat pada ditulis dengan S. Jelas bahwa jika f

[]
[]
[]

(S, maka f (. Berikut ini akan ditunjukkan bahwa jika f (S, maka f terintegral Bochner.

Theorema 3

[] []
[]

Jika f (S dengan primitif F, maka F kontinu absolut kuat pada .

Bukti

[]

Diberikan sebarang bilangan (> 0, maka terdapat fungsi positif (pada sehingga

[]
[]

[]
[]
[]

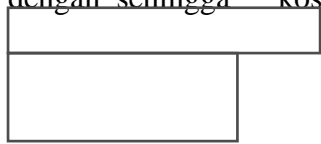
untuk setiap partisi (*-fine* pada . Karena kompak, maka dengan Theorema Heine-Borel

[]

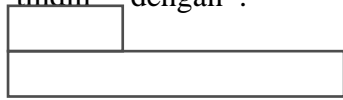
terdapat koleksi berhingga interval terbuka

[]
[]
[]
[]
[]
[]
[]

dengan sehingga kosong. Diambil , dan . Diambil koleksi interval tak saling tumpang



tindih dengan .



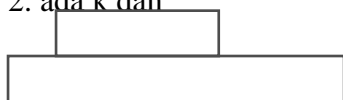
Ada dua kemungkinan hubungan antara dengan



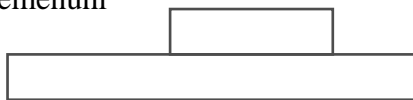
1. ada k sehingga



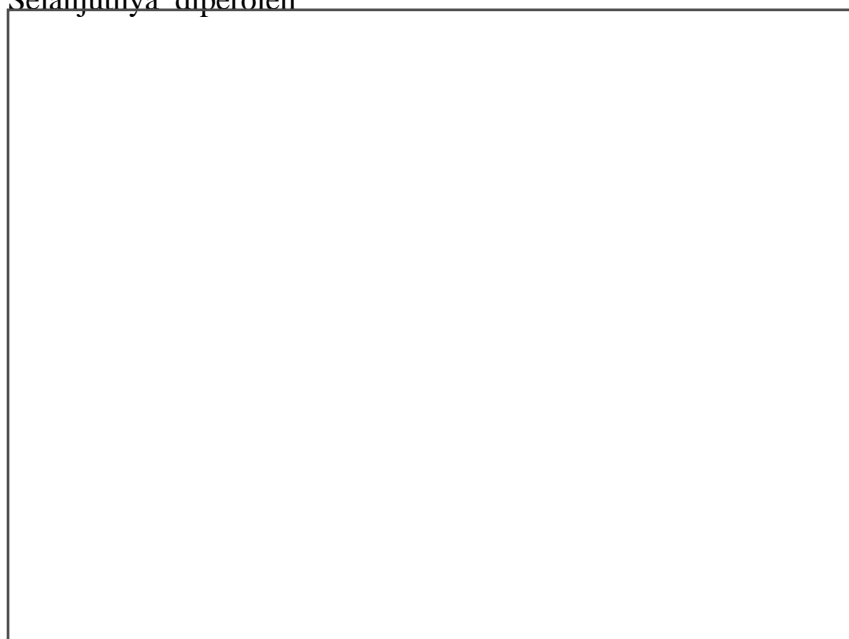
2. ada k dan



yang memenuhi



Jika menyatakan interval yang termuat di dalam, maka
Selanjutnya diperoleh



Jadi F kontinu absolut kuat.

Theorema 4

Jika f (S dengan primitif F , maka $F(x) = f(x)$ hampir di mana-mana pada S .

Bukti

Diambil A himpunan terukur sehingga $F(t)$ tidak mempunyai derivatif atau $F'(t) \neq f(t)$.

Akan ditunjukkan bahwa f dengan ukuran luar A . Karena f (S , maka untuk setiap $\epsilon <$

0 terdapat fungsi positif ϕ pada S sehingga jika \mathcal{P} partisi ϵ -fine pada S berlaku

Tanpa mengurangi sifat umum diambil δ dan ϵ untuk $t \in S$. Diambil $t \in A$, maka ada

sehingga untuk setiap ϵ terdapat δ sehingga

atau terdapat δ sehingga

Namakan

$n = 1, 2, \dots$, maka . Diperoleh bahwa dan $k = 1, 2, \dots$ merupakan liput

Vitali dari , maka untuk $(\epsilon > 0)$ di atas terdapat sehingga

dengan atau dan Karena maka merupakan partisi (*-fine*).

Jadi

Jadi , yang berarti

Dari kedua theorema di depan diperoleh bahwa jika $f \in S$, maka f terintegral Bochner

pada .

Fungsi $f : (X)$ terintegral Bochner pada jika terdapat fungsi sederhana pada sehingga

[]

h.d. pada dan . Integral Bochner f pada adalah

[]

Berikut ini akan ditunjukkan bahwa jika f terintegral Bochner maka f terintegral McShane kuat.

Theorema 5

[]
[]

Jika f terintegral Bochner pada , maka f (S.

Bukti

[]
[]
[]

Diketahui f terintegral Bochner pada , maka terdapat barisan fungsi sederhana pada

[]
[]
[]

sehingga h.d. pada dan . Mudah ditunjukkan bahwa untuk setiap bilangan ($\epsilon > 0$)

[]
[]

terdapat bilangan asli sehingga jika $n, m \in \mathbb{N}$ berlaku

[]

[]

Untuk ($\epsilon > 0$) tersebut terdapat barisan berhingga interval tak saling tumpang tindih

[]

dengan sehingga

[]

[]

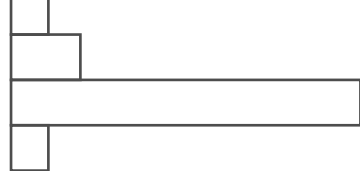
dengan

[]
[]
[]

Karena h.d. pada , maka tanpa mengurangi arti untuk setiap $x \in I$ dan untuk bilangan

$\epsilon > 0$ di depan terdapat bilangan asli N , sehingga jika $n \geq N$, maka berlaku

Dapat ditunjukkan bahwa setiap fungsi sederhana terintegral McShane kuat. Oleh karena

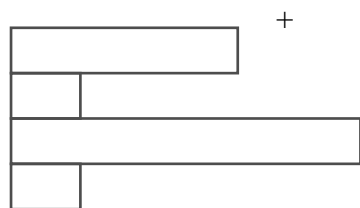
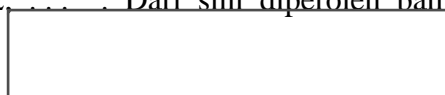


itu, untuk $\epsilon > 0$ di atas terdapat fungsi positif pada I , sehingga jika partisi $-fine$ pada

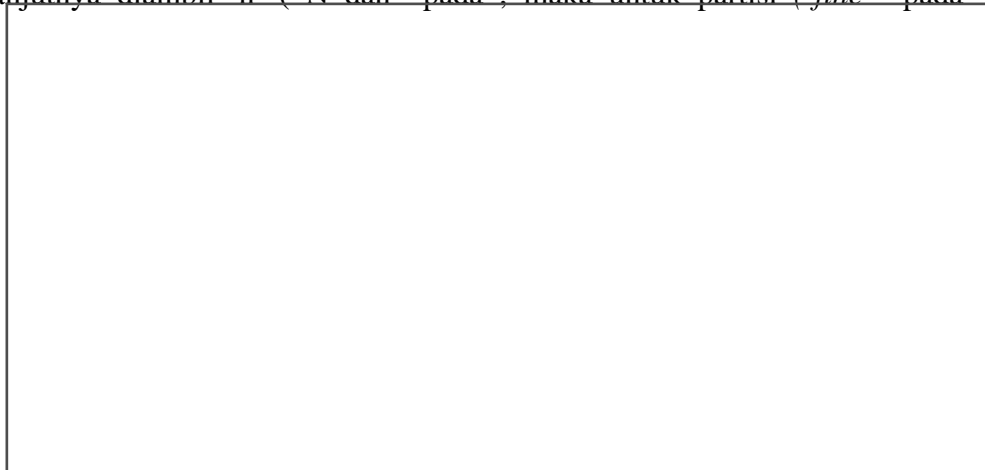
berlaku



Untuk setiap $n = 1, 2, \dots$. Dari sini diperoleh bahwa untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ berlaku



Selanjutnya diambil $n \in \mathbb{N}$ dan pada I , maka untuk partisi $-fine$ pada I diperoleh



Jadi $f \in \mathcal{S}$.



Dari Theorema 3, 4, dan 5 diperoleh bahwa $f \in \mathcal{L}^1(S)$ jika dan hanya jika f terintegral Bochner pada S .

DAFTAR PUSTAKA

1. Congxin, W U dan Xiaobo Yao, *A Riemann-Type Definition of the Bochner Integrs*, *Journal of Mathematical Study : Xiamen*, China, 1994.
2. Gordon, Russell A, *The Integrals of Lebesgue, Denjoy, Perron, and Henstock*, American Mathematical Society, USA, 1994.....