EKUIVALENSI INTEGRAL BOCHNER DENGAN INTEGRAL MCSHANE KUAT UNTUK FUNGSI DENGAN NILAI DI DALAM RUANG BANACH

Y.D. Sumanto
Jurusan Matematika FMIPA UNDIP

Abstrak

Integral McShane fungsi-fungsi bernilai real ekuivalen dengan Integral Lebesque, namun untuk fungsi bernilai vektor tidak selalu demikian. Dapat ditunjukkan bahwa Integral Bochner (Integral Lebesque untuk fungsi bernilai vektor) ekuivalen dengan Integral McShane kuat.

Kata kunci : Integral McShane, Integral McShane kuat, Integral Bochner.

1. PENDAHULUAN

Integral McShane fungsi-fungi dengan nilai di dalam suatu Ruang Banach didefinisikan sejalan dengan Integral McShane fungsi-fungsi bernilai real, yaitu dengan menggantikan tanda nilai mutlak dengan tanda norm . Gordon, 1994, menunjukkan bahwa Integral McShane ekuivalen dengan Integral Lebesque.

Dalam tulisan ini akan didefinisikan Integral McShane Kuat dan ditunjukkan bahwa Integral Bochner ekuivalen dengan Integral McShane Kuat.

Dalam tulisan ini merupakan interval tertutup di dalam garis real, X ruang Banach dengan norm . Fungsi-fungsi di dalam tulisan ini dengan domain bilangan real dan dengan nilai di dalam X. Fungsi f : (X dikatakan kontinu absolut kuat pada jika untuk setiap bilangan (> 0 terdapat (> 0 sehingga jika barisan interval tak saling tumpang tindih di dalam dengan berlaku .

Fungsi f : (X dikatakan terintegral Bochner pada jika dan hanya jika ada fungsi-fungsi kontinu absolut kuat F pada dengan F((x) = f(x) hampir di mana-mana pada . Dalam hal ini derivatif F adalah derivatif Frechet.

2. PEMBAHASAN

Berikut ini didefinisikan Integral McShane untuk fungsi bernilai vektor.

Definisi 1

Fungsi f : (X dikatakan terintegral McShane pada jika terdapat vektor A (X sehingga untuk setiap bilangan (> 0 tedapat fungsi positif (pada sehingga jika dengan a = dan berlaku

.

Himpunan pasangan titik interval seperti dalam Definisi 1 disebut partisi *(-fine* pada , dan vektor A (X dalam definisi tersebut adalah tunggal dan disebut nilai integral f pada dan ditulis

.

Koleksi semua fungsi berniali vektor terintegral McShane pada ditulis .

Sejalan dengan Integral McShane fungsi bernilai real dapat ditunjukkan bahwa :

1. Jika f, g (, maka f + g (dan

2. Jika f, g (dan c skalar, maka c f (dan

3. Jika f (, maka f (untuk setiap (.

4. Jika f (dan c (, maka

Dari 3 dan 4 di atas diperoleh bahwa untuk setiap interval (terdapat vektor F(u,v) =

di dalam X. Dari sini diperoleh integral tak tentu fungsi f pada , yaitu untuk setiap t (

Fungsi f : (X tersebut disebut fungsi primitif f pada .
Berikut ini didefinisikan Integral McShane Kuat.

Definisi 2

Fungsi f : (X dikatakan terintegral McShane kuat pada , jika f (dan untuk setiap bilangan (> 0 terdapat fungsi positif (pada sehingga untuk setiap partisi *(-fine* pada . Dalam hal ini

Koleksi semua fungsi terintegral McShane kuat pada ditulis dengan S. Jelas bahwa jika f (S, maka f (. Berikut ini akan ditunjukkan bahwa jika f (S, maka f terintegral Bochner.

Theorema 3

Jika f (S dengan primitif F, maka F kontinu absolut kuat pada .

Bukti

Diberikan sebarang bilangan (> 0, maka terdapat fungsi positif (pada sehingga

untuk setiap partisi *(-fine* pada . Karena kompak, maka dengan Theorema Heine-Borel terdapat koleksi berhingga interval terbuka dengan sehingga kosong. Diambil , dan . Diambil koleksi interval tak saling tumpang tindih dengan .

Ada dua kemungkinan hubungan antara dengan

1. ada k sehingga

2. ada k dan

yang memenuhi

Jika menyatakan intervalyang termuat di dalam, maka

Selanjutnya diperoleh

Jadi F kontinu absolut kuat.

Theorema 4

Jika f (S dengan primitif F, maka F((x) = f (x) hampir di mana-mana pada .

Bukti

Diambil A himpunan t (sehingga F (t) tidak mempunyai darivatif atau F((t) (F (t).

Akan ditunjukkan bahwa dengan ukuran luar A. Karena f (S, maka untuk setiap (<

0 terdapat fungsi positif (pada sehingga jika partisi *(-fine* pada berlaku

Tanpa mengurangi sifat umum diambil dan untuk t (. Diambil t (A, maka ada

sehingga untuk setiap terdapat sehingga

atau terdapat sehingga

Namakan

n = 1, 2, … , maka . Diperoleh bahwa dan k =1, 2, … merupakan liput

Vitali dari , maka untuk (> 0 di atas terdapat sehingga

,

dengan atau dan Karena maka merupakan partisi *(-fine*.

Jadi

Jadi , yang berarti

Dari kedua theorema di depan diperoleh bahwa jika f (S, maka f terintegral Bochner

pada .

Fungsi f : (X terintegral Bochner pada jika terdapat fungsi sederhana pada sehingga h.d. pada dan . Integral Bochner f pada adalah

Berikut ini akan ditunjukkan bahwa jika f terintegral Bochner maka f terintegral McShane kuat.

Theorema 5

Jika f terintegral Bochner pada , maka f (S.

Bukti

Diketahui f terintegral Bochner pada , maka terdapat barisan fungsi sederhana pada

sehingga h.d. pada dan . Mudah ditunjukkan bahwa untuk setiap bilangan (> 0

terdapat bilangan asli sehingga jika n, m (berlaku

.

Untuk (> 0 tersebut terdapat barisan berhingga interval tak saling tumpang tindih

dengan sehingga

dengan

Karena h.d. pada , maka tanpa mengurangi arti untuk setiap x (dan untuk bilangan

(> 0 di depan terdapat bilangan asli N, sehingga jika , maka berlaku

Dapat ditunjukkan bahwa setiap fungsi sederhana terintegral McShane kuat. Oleh karena

itu, untuk (> 0 di atas terdapat fungsi positif pada , sehingga jika partisi -*fine* pada

berlaku

+

Untuk setiap n = 1, 2, ... Dari sini diperoleh bahwa untuk setiap n (N berlaku

+

Selanjutnya diambil n (N dan pada , maka untuk partisi (-*fine* pada diperoleh

Jadi f (S.

Dari Theorema 3, 4, dan 5 diperoleh bahwa f (S, jika dan hanya jika f terintegral Bochner

pada .

DAFTAR PUSTAKA

1. Congxin, W U dan Xiaobo Yao, *A Riemann-Type Definition of the Bochner Integra, Journal of Mathematical Study : Xiamen*, China, 1994.

2. Gordon, Russell A, *The Integrals of Lebesque, Denjoy, Perron, and Henstock,* American Mathematical Society, USA, 1994.……..