ELEMEN PEMBANGUN (DALAM SEMIGRUP - (

Y.D. Sumanto

Jurusan Matematika FMIPA UNDIP

Abstrak

Misalkan M himpunan tak kosong dan (himpunan operasi biner assosiatif pada M. Jika untuk setiap (, (((dan untuk setiap x, y,z (M berlaku (x(y) (z = x((y(z), maka M disebut semigrup-(. Dalam tulisan ini akan ditunjukkan bahwa jika (((dan untuk setiap x (M ada y, z (M sedemikian hingga x = y(z, maka untuk setiap (((ada b (M sedemikian hingga (= (b(.

1. PENDAHULUAN

Misalkan M himpunan tak kosong dan A himpunan semua operasi biner assosiatif pada M Dalam tulisan ini akan diperhatikan secara khusus untuk operasi-operasi (, ((A dengan sifat untuk setiap x, y, z (M, (x(y) (z = x((y(z).

Misalkan ((A sedemikian hingga untuk setiap (, (((dan untuk setiap x, y, z (M memenuhi (x(y) (z = x((y(z), maka M terhadap (membentuk semigrup-(. Untuk setiap (((,

M dan (membentuk suatu semigrup, yang disebut *inter-related* semigrup-(ditulis dengan .

Dalam tulisan ini akan ditunjukkan bahwa jika (((dan untuk setiap x (M ada y, z (M sedemikian hingga x = y(z (atau M(M = M), maka untuk setiap (((ada b (M sedemikian hingga (= (b(.

2. ELEMEN PEMBANGUN DALAM SEMIGRUP-(

Untuk membahas lebih lanjut perlu didefinisikan mengenai kesamaan dua operasi biner.

Definisi 1

Misalkan M himpunan tak kosong sedangkan (dan (operasi-operasi biner pada M, (= (bila dan hanya bila untuk semua x, y (M, x(y = x(y.

Dan berikut ini didefinisikan tentang operasi pada operasi biner.

Definisi 2

Misalkan M semigrup- (, (, (, (((dan a (M. Didefinisikan (a(= (bila dan hanya bila untuk setiap x, y (M berlaku :

x(y = x((a()y
= (x(a)(y
= x((a(y)

Dari definisi 2 di atas elemen-elemen M dapat dipandang sebagai operasi biner pada (.

Contoh :

Misalkan M = dan (=

Dengan

a	a	b	c	
a	c	a	b	
b	a	b	c	
c	b	c	a	

Jadi (b(= (

Selanjutnya theorema berikut menunjukkan bahwa, jika M semigrup-(dan (((sedemikian hingga, ada elemen identitas di dalam M untuk (, maka setiap elemen (dapat dibangun oleh (.

Theorema 1

Jika M semigrup-(dan (((sedemikian hingga ada a (M di mana untuk setiap x (M, a(x = x(a = x, maka untuk setiap (((ada b (M sedemikian hingga (= (b(.

Bukti

Misalkan (elemen sebarang di dalam (dan b = a(a, maka untuk setiap x, y (M

x((b()y = (x(b) (y
= (x((a(a)) (y
= ((x(a) (a) (y
= (x(a) (y
= x((a(y)
= x(y

Jadi (= (b(.

Selanjutnya (((seperti dalam Theorema 1 tersebut disebut pembangun (generator) elemen-elemen (.

Selanjutnya muncul pertanyaan elemen-elemen (yang bagaimanakah yang mempunyai elemen identitas di dalam M ? Lemma-lemma dan theorema-theorema berikut mencoba akan menjawab permasalahan tersebut.

Lemma 1

Misalkan M semigrup-(dan (((, jika untuk setiap x (M ada y,z (M sedemikian hingga x = y(z, maka ada a (M sedemikian hingga untuk setiap x (M ada y, z (M sedemikian hingga x = y((a()z.

Bukti

Akan dibuktikan dengan kontradiksi. Andaikan untuk setiap a (M ada x (M sedemikian hingga untuk setiap y, z (M, x (y((a()z. Ambil sebarang u (M, maka ada a,z (M sedemikian hingga u = a(z. Untuk a (M tersebut ada x (M sedemikian hingga untuk sebarang y (M, berlaku : x (y((a(z) =y(u. Karena y dan u sebarang, maka ada x sedemikian hingga x (y(u kontradiksi dengan hipotesisnya. Jadi ada a (M sedemikian hingga untuk setiap x (M ada y, z (M sedemikian hingga x = y((a()z. Misalkan M(M = (x(M(x = y(z, y,z (M(dan M((a()M = (x(M(x = y((a()z, y,z (M(. Maka Lemma 1 ekuivalen dengan pernyataan jika M(M = M, maka ada a (M sedemikian hingga M((a()M = M.

Lemma 2

Misalkan M semigrup- (dengan (((dan a (M. Jika x (M((a()M maka x(x (M((a()M.

Lemma 3

Misalkan M semigrup- (dengan (((, a (M dan misalkan M(a = (x(M(x = y(a, y (M(dan a(M = (x(M(x = a(y, y (M(
Jika x (M (a dan x (a(M, maka x (M((a()M.

Bukti

Misalkan x (M(a dan x (a(M, maka untuk semua y,z (M, x (y(a dan x (a(z. Sehingga :

x(x ((y(a)((a(z)
= y((a()(a(z) (M((a()(a(M) (M((a() M

Jadi x(x (M((a()M. Dan menurut Lemma 2, maka x (M((a() M.

Pernyataan Lemma 3 tersebut ekuivalen dengan pernyataan jika x (M((a()M, maka x (M(a atau x (a(M. Sebagai akibat langsung Lemma 3 tersebut diperoleh pernyataan jika M((a()M = M, maka M(a = M atau a(M = M. Dari Lemma 1 dan Lemma 3 diperoleh akibat sebagai berikut :

Akibat

Misalkan M semigrup- (dan (((. Jika M(M = M, maka ada a (M sedemikian hingga a(M = M atau M(a = M.

Selanjutnya dalam tulisan ini hanya akan membahas untuk pernyataan jika M(M = M, maka ada a (M sedemikian hingga a(M = M dan M(a = M. Sedangkan untuk a(M (M dan M(a = M atau sebaliknya belum dibahas dalam tulisan ini karena mempunyai pendekatan yang berbeda.

Theorema 2

Misalkan M semigrup- (dan (((, a (M dengan a(a = a.

1. Jika a(M = M, maka untuk semua x (M, a(x = x dan x (M
2. Jika M(a = M, maka untuk semua x (M, x(a = x.

Bukti

Akan dibuktikan untuk bagian 1, sedangkan bagian 2 analog. Andaikan ada x (M sedemikian hingga a(x (x. Dan misalkan x = a(z dengan z (x. Maka diperoleh a(x = a((a(z) = (a(a) (z = a(z = x, kontradiksi. Jadi untuk semua x (M a(x = x.

Sehingga menurut akibat Lemma 1, Lemma 3 dan Theorema 2 tersebut jika M(M = M dan a (M dengan a(a = a, maka a merupakan elemen identitas untuk (pada M. Dan menurut Theorema 1, maka (menjadi pembangun bagi elemen-elemen (.

Selanjutnya timbul pertanyaan, misalkan M(M = M apakah ada a (M sedemikian hingga a(a = a dengan M(a = M dan a(M = M. Jika permasalahan ini terjawab, maka untuk (((dengan M(M = M merupakan pembangun bagi elemen-elemen (yang lain. Namun sebelum menjawab masalah ini akan dibahas lemma berikut ini dulu.

Lemma 4

Misalkan M semigrup- (, dan (((dengan M(M = M. Dan misalkan A = (a (M(a (M = M dan M(a = M(

Jika a (A dengan a(a (a dan untuk b (M dengan :

1. a(b = b, maka b (A
2. a(b = a, maka b (A

Bukti

1. Andaikan b (A. Dan misalkan a = b(y, y (M, maka a(a = a((b(y) = (a(b)(y = b(y = a, Kontradiksi. Jadi b (A.
2. Andaikan b(M (M.

Dari pengandaian ini ada dua kemungkinan a (b(M atau a (b(M.

a. Misalkan a (b(M, maka ada y (M dengan a = b(y. Dan misalkan x sebarang elemen M dengan x = a(z, z (M. Maka diperoleh x = a(z = (b(y) (z = b((y(z) (b(M. Karena x (M sebarang, maka b(M = M kontradiksi, jadi a (b(M.
b. Misalkan a (b(M. Sehingga untuk setiap x (M, a (b(x. Sehingga untuk setiap x (M

a(x = (a(b)(x
= a((b(x)
(a(a = c

Jadi c = a(a (a(M. Kontradiksi dengan a (A.

Jadi b(M = M. Untuk menunjukkan M(b = M analog. Jadi b (A.

Theorema 3 berikut akan menjawab permasalahan yang timbul di depan.

Theorema 3

Jika M semigrup- (dan jika (((dengan M(M = M, maka ada a (M sedemikian hingga a(a = a dengan M(a = M atau a(M = M.

Sebelum membuktikan Theorema 3 ini perlu diulangi lagi bahwa dalam tulisan ini hanya akan dibahas untuk kasus M(a = M dan a(M = M, sedangkan untuk kasus yang lain akan dibahas pada tulisan lain.

Bukti

Dari Lemma 3 diperoleh jika M(M = M, maka terdapat b (M sedemikian hingga b(M = M atau M(b = M. Seperti dijelaskan di atas dalam tulisan ini akan dibuktikan untuk kasus M(b = M dan b(M = M. Jika b(b = b, maka bukti selesai.

Misalkan b(b (b. Karena b(M = M, maka ada a (M sedemikian hingga b(a = b. Dan misalkan a = y(b (M(b, maka

a = y(b
= y((b(a)
= (y(b)(a
= a(a

Jadi untuk a (M dengan b(a = b, maka a(a = a. Dan dengan Lemma 4(2), maka a (M = M dan M(a = M. Theorema terbukti.

Sebagai akibat langsung dari Theorema 1, Theorema 2 dan Theorema 3. Jika M semigrup- (dan (((dengan M(M = M, maka (merupakan pembangun bagi elemen-elemen (yang lain. Dan elemen ini disebut elemen pembangun (generator) (pada semigrup- (.

3. KESIMPULAN

Misalkan M himpunan tak kosong dan (merupakan himpunan operasi-operasi biner assosiatif pada M sedemikian hingga untuk setiap (, (((dan untuk setiap x, y, z (M berlaku (x(y)(z = x((y(z), maka M merupakan semigrup-(. Jika (((dengan M(M = M maka setiap (((dapat dinyatakan dengan (= (b(dengan b (M.

DAFTAR PUSTAKA

1. Guowey, Yong, *Inter-related Semigroups of-semigroup, Southeast Asian Bulletin of Mathematics*, Hongkong of Science Press LTD, 1996, 20 : 2.

2. J. M. Hovie, *An Introduction to Semigroup Theory*, New York and San Fransisco Academic Press, London, 1976.
