SOLUSI N-SOLITON BEBAS WAKTU DARI PERSAMAAN KADOMTSEV-PETVIASHVILI (KP-I, II)

EDY SOEWONO
Jurusan Matematika & Pusat Matematika
Institut Teknologi Bandung
Ganesha 10, Bandung 40132

SUTIMIN
Jurusan Matematika Fakultas MIPA
Universitas Diponegoro
Semarang

ABSTRAK

Dengan menggunakan metode Hirota, solusi N-soliton dari persamaan Kadomtsev-Petviashvili (KP-I,II) dapat diperoleh. Dalam kasus untuk sudut-sudut interaksi optimum, solusi N-soliton dari persamaan KP-II akan tereduksi menjadi N+1 cabang soliton. Pada paper ini akan ditunjukkan, untuk N sebarang terdapat solusi N-soliton yang bebas waktu. Diantara N-soliton ini. terdapat N-2 soliton individu yang berjalan tidak berubah fase.

1. PENDAHULUAN

Persamaan Kadomtsev-Petviashvili (KP-I,II) dapat dipandang sebagai generalisasi dimensi dua dari persamaan Korteweg-de Vries (KdV) dan menggambarkan gelombang dimensi dua yang merambat pada arah x, dengan variasi yang lamban dalam arah y. Persamaan KP(I-II) ini telah disajikan oleh Kadomtsev dan Petviashvili (lihat [1]) untuk membahas stabilitas soliton dimensi satu pada suatu media dengan dispersi lemah (weak dispersion). Dalam bentuk baku persamaan Kadomtsev-Petviashvili untuk tinggi gelombang $U = U(x, y, t)$ diberikan oleh

$$(U_t + 6UU_x + U_{xxx})_x + 3\epsilon U_{yy} = 0. \tag{1}$$

Untuk $\epsilon = -1$ berkenaan dengan KP-I dan untuk $\epsilon = 1$ berkenaan dengan KP-II. Persamaan ini mempunyai Struktur Hamiltonian seperti persamaan KdV.

Organisasi paper ini sabagai berikut. Pada bagian 2, solusi N-soliton dari persamaan KP(I-II) diselesaikan dengan menggunakan metode Hirota. Solusi yang diperoleh ini selanjutnya akan diselidiki sifat asimtotiknya dan resonansi diantara N-soliton. Pada bagian 3, akan dibahas secara detail mengenai profil solusi N-soliton yang bebas waktu dengan $N \geq 3$, dan akhirnya diperoleh syarat cukup dan perlu agar dipenuhi kondisi bebas waktu. Pada kondisi bebas waktu, akan dibahas adanya soliton ke-i, $3 \leq i \leq N$ berjalan tidak berubah fase setelah tumbukan dengan N-1 soliton yang lain. Pada bagian akhir dari paper ini merupakan kesimpulan dari uraian sebelumnya.

2. SOLUSI PERSAMAAN KP(I-II)

Persamaan KP(I-II) adalah salah satu sistem Hamiltonian yang terintegral. Pada bagian ini akan dibahas solusi N-soliton dari persamaan KP(I-II) dengan menggunakan metode Hirota yang telah dibahas oleh Satsuma (lihat [3]). Solusi yang diperoleh ini selanjutnya akan diselidiki bentuk asimtotik dan resonansinya.

2.1. SOLUSI SATU SOLITON

Perhatikan persamaan KP(I-II) yang diberikan pada (1). Untuk menyelesaikan persamaan ini definisikan transformasi variabel bergantung

$$U(x,y,t) = 2(log f)_{xx}, \tag{2}$$

dengan syarat batas untuk $|x| \to \infty$ berlaku $f(x,y,t,) \to 0$ beserta turunan - turunannya. Persamaan (1) ditransformasi menjadi

$$f(f_t + f_{xxx})_x - f_x(f_t + f_{xxx}) - 3(f_x f_{xxx} - f_{xx}^2) + 3\epsilon(f f_{yy} - f_y^2) = 0. \tag{3}$$

Persamaan (3) ini dikatakan Persamaan Hirota KP(I-II). Perhatikan solusi f dari persamaan (3) berbentuk

$$f = 1 + e^{2\phi} \tag{4}$$

dengan variabe fase $\phi = \mu x + \nu y + \omega t + \delta$ dan μ, ν, ω, δ = konstan. Bentuk f ini akan memenuhi persamaan Hirota KP(I-II) jika dipenuhi hubungan

$$D(\mu, \rho, \omega) = \mu\omega + 4\mu^4 + 3\epsilon\nu^2 = 0. \tag{5}$$

Fungsi D ini dikatakan relasi dispersi untuk suatu soliton. Jika ditentukan variabel fase $\phi = \mu(x + \rho y - ct)$ maka berlaku hubungan $c = 4\mu^2 + 3\epsilon\rho^2$. Solusi dari persamaan KP(I-II)) yang berkorespondensi dengan f adalah

$$U = 2\frac{\partial^2}{\partial x^2} ln f = 2\mu^2 sech^2(\mu(x + \rho y - ct)), \tag{6}$$

yang dikatakan solusi gelombang soliter (soliton) dari persamaan KP(I-II). Solusi ini merupakan gelombang yang berjalan dengan kecepatan $\frac{c}{\sqrt{1+\rho^2}}$ dalam arah membuat sudut $tan^{-1}\rho$ terhadap sumbu-x.

2.2. SOLUSI N-SOLITON

Solusi eksak N-soliton untuk fungsi f dari persamaan Hirota KP(I-II) diperoleh melalui metode Hirota. Didefinisikan operator diferensial Hirota D dengan

$$D_x^l D_y^m D_t^n a(x,y,t).b(x,y,t) = (\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x'})^l (\frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y'})^m (\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t'})^n$$

$$a(x,y,t)b(x,y,t)|_{x=x',y=y',t=t'}$$

dimana $a(x,y.t)$ dan $b(x,y,t)$ adalah fungsi benilai riil. Dengan menggunakan operator ini diperoleh persamaan Hirota KP(I-II) dalam bentuk bilinier

$$(D_tD_x + D_x^4 + 3\epsilon D_y^2)f.f = 0. \tag{7}$$

Bentuk f dapat dinyatakan sebagai deret pangkat dalam parameter β, misalkan

$$f = 1 + \beta f_1 + \beta^2 f_2 + \beta^3 f_3 + ... \tag{8}$$

Substitusi (8) ke (7) dan menghimpun koefisien dari β dengan pangkat yang sama, diperoleh

$$(D_tD_x + D_x^4 + 3\epsilon D_y^2)f_1.f_1 \ = 0 \quad , \tag{9}$$

$$2(\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 3\epsilon\frac{\partial^2}{\partial y^2})f_2 = -(D_tD_x + D_x^4 + 3\epsilon D_y^2)f_1.f_1 \quad , \tag{10}$$

$$2(\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 3\epsilon\frac{\partial^2}{\partial y^2})f_3 \ = -(D_tD_x + D_x^4 + 3\epsilon D_y^2)(f_2.f_1 + f_1.f_2) \quad , \tag{11}$$

....

Untuk mencari solusi N-soliton dari persamaan KP(I-II), dimisalkan bentuk f_1 sebagai

$$f_1 = \sum_{i=1}^{N} e^{2\phi_i}$$

dimana $\phi_i = \mu_i(x + \rho_i y - c_i t)$ dan $c_i = 4\mu_i^2 + 3\epsilon\rho_i^2$, $i = 1, 2, ..., N$.

Substitusi f_1 ke persamaan (10) diperoleh

$$\begin{aligned} 2(\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 3\epsilon\frac{\partial^2}{\partial y^2})f_2 &= -2\sum_{1\leq i<j\leq N}(D_tD_x + D_x^4 + 3\epsilon D_y^2) \\ &\qquad e^{4\phi_i}.e^{2\phi_j} \\ &= -2\sum_{1\leq i<j\leq N}\frac{(-\mu_i c_i+\mu_j c_j)(\mu_i-\mu_j)+4(\mu_i-\mu_j)^4+3\epsilon(\mu_i\rho_i-\mu_j\rho_j)^2}{(-\mu_i c_i-\mu_j c_j)(\mu_i+\mu_j)+4(\mu_i+\mu_j)^4+3\epsilon(\mu_i\rho_i+\mu_j\rho_j)^2} \\ &\qquad (\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 3\epsilon\frac{\partial^2}{\partial y^2})e^{2\phi_i+2\phi_j}. \end{aligned} \tag{12}$$

Sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} f_2 &= -\sum_{1\leq i<j\leq N}\frac{(-\mu_i c_i+\mu_j c_j)(\mu_i-\mu_j)+4(\mu_i-\mu_j)^4+3\epsilon(\mu_i\rho_i-\mu_j\rho_j)^2}{(-\mu_i c_i-\mu_j c_j)(\mu_i+\mu_j)+4(\mu_i+\mu_j)^4+3\epsilon(\mu_i\rho_i+\mu_j\rho_j)^2}e^{2\phi_i+2\phi_j} \\ &= \sum_{1\leq i<j\leq N}\frac{4(\mu_i-\mu_j)^2-\epsilon(\rho_i-\rho_j)^2}{4(\mu_i+\mu_j)^2-\epsilon(\rho_i-\rho_j)^2}e^{2\phi_i+2\phi_j}, \end{aligned} \tag{13}$$

dan selanjutnya subsitusi persamaan (13) ke persamaan (11) diperoleh

$$f_3 = \sum_{1\leq i<j<k\leq N} A_{ij}A_{jk}A_{ik}e^{2\phi_i+2\phi_j+2\phi_k}$$

di mana $A_{ij} = \frac{4(\mu_i-\mu_j)^2-\epsilon(\rho_i-\rho_j)^2}{4(\mu_i+\mu_j)^2-\epsilon(\rho_i-\rho_j)^2}e^{2\phi_i+2\phi_j}$, $1 \leq i < j \leq N$. Prosedur ini diulang terus menerus untuk menentukan f_n, $3 \leq n < N$ dan f_N yang dapat dinyatakan sebagai

$$f_n = \sum_{1\leq i<j<k...<l\leq N} A_{ij}A_{jk}...A_{il}e^{2\phi_i+2\phi_j+2\phi_k+...+2\phi_l}, \quad 3 \leq n < N$$

$$f_N = \prod_{1\leq i<j\leq N} A_{ij}.e^{2\phi_1+2\phi_2+...+2\phi_N}, \qquad A_{ij} > 0, \ 1 \leq i < j \leq N.$$

Solusi N-soliton dari persamaan Hirota KP(I-II) dapat dinyatakan sebagai

$$\begin{aligned} f &= 1 + \sum_{i=1}^{N} e^{2\phi_i} + \sum_{1\leq i<j\leq N} A_{ij}e^{2\phi_i+2\phi_j} + \\ &\quad \sum_{1\leq i<j<k\leq N} A_{ij}A_{jk}A_{ki}e^{2\phi_i+2\phi_j+2\phi_k} + ... + \\ &\quad \prod_{1\leq i<j\leq N} A_{ij}.e^{2\phi_1+2\phi_2+...+2\phi_N}, \\ &\quad A_{ij} > 0, \ 1 \leq i < j \leq N \end{aligned} \tag{14}$$

dimana

$$A_{ij} = \frac{4(\mu_i - \mu_j)^2 - \epsilon(\rho_i - \rho_j)^2}{4(\mu_i + \mu_j)^2 - \epsilon(\rho_i - \rho_j)^2}, \qquad 1 \le i < j \le N.$$

Solusi N-soliton dari persamaan KP(I-II) dinyatakan sebagai $U = 2(log f)_{xx}$.

2.3. RESONANSI DIANTARA N-SOLITON

Aspek lain dari soliton adalah resonansi soliton di mana dua soliton terhadap kondisi tertentu beresonansi yang menghasilkan soliton yang baru. Didefinisikan Λ_{ij} dengan

$$\Lambda_{ij} = \frac{1}{2}\ln(A_{ij}), \qquad A_{ij} > 0,\ 1 \le i < j \le N. \tag{15}$$

Untuk $A_{ij} \to 0$ maka $|\Lambda_{ij}| \to \infty$. Ini menyatakan soliton ke-i dan ke-j berinteraksi menghasilkan suatu soliton yang baru. Kondisi ini dipikirkan sebagai resonansi antara soliton ke-i dan soliton ke-j. Kita akan menyelidiki resonansi diantara N-soliton, untuk resonansi diantara dua soliton telah dibahas oleh Cahyono dan Ohkuma & Wadati (lihat [2] dan [4]).

Proposisi 2.1.

Pada t=0, jika $A_{ij} = 0,\ 1 \le i < j \le N$ maka terdapat N+1 cabang soliton, yaitu sepanjang ϕ_i = konstan , dengan $1 \le i \le N$ pada setengah bidang atas dan sepanjang $\phi_j - \phi_k$ = konstan $j \ne k,\ j,\ k = 1,\ 2, ...,\ N$ pada setengah bidang bawah dari bidang XY.

Bukti.

∘ Sepanjang ϕ_i = konstan, $1 \le i \le N$.

Untuk $\phi_j \to -\infty,\ i \ne j$, bentuk f dapat ditulis $f = 1 + \sum_{1 \le j \le N, i \ne j} e^{2\phi_i} + e^{2\phi_i}$ maka $f \to 1 + e^{2\phi_i}$, yaitu merupakan soliton ke-i, $1 \le i \le N$.

∘ Sepanjang $\phi_j - \phi_k$ = konstan.

Untuk $\phi_j,\ \phi_k \to \infty$ dan $\phi_i \to -\infty,\ i \ne j \ne k$ fungsi f dapat ditulis

$$f = e^{2\phi_k}[e^{-2\phi_k} + \sum_{1 \le i \le N, i \ne j} [e^{2\phi_i - 2\phi_k}] + e^{2\phi_j - 2\phi_k} + 1]$$

Faktor pertama akan hilang terhadap operator $2\frac{\partial^2}{\partial x^2}ln$ dan faktor kedua $\rightarrow 1+e^{2\phi_j-2\phi_k}$, sehingga $U \rightarrow U^{(j-k)} = 2\frac{\partial^2}{\partial x^2}ln(1+e^{2\phi_j-2\phi_k})$ yaitu merupakan soliton yang lain dengan arah fase $\phi_j - \phi_k$.

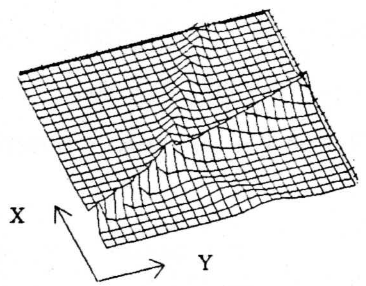
Andaikan ada arah fase $\Phi = \phi_j + \alpha\ \phi_k =$ konstan, $\alpha \neq -1,\ j \neq k,\ j,\ k = 1,\ 2, ...,\ N$ untuk y$\rightarrow -\infty$.

1. Jika $\phi_k \rightarrow \infty,\ \phi_i \rightarrow -\infty, i \neq k$ bentuk f dapat ditulis
$$f = 1 + \sum_{1\leq i\leq N} e^{2\phi_i} = e^{2\phi_k}[e^{-2\phi_k} + \sum_{1\leq i\leq N, i\neq j} e^{2\phi_i - 2\phi_k} + e^{2\phi_j-2\phi_k} + 1].$$
Faktor pertama hilang terhadap operator $2\frac{\partial^2}{\partial x^2}ln$ sedangkan faktor kedua $\rightarrow 1$ sehingga $U \rightarrow 0, \forall\ \alpha\ \neq -1$, kontradiksi dengan pengandaian bahwa Φ arah fase yang tidak hilang.

2. Jika $\phi_j \rightarrow \infty,\ 1 \leq i \leq N$ bentuk f dapat ditulis
$$\begin{aligned} f &= 1 + \sum_{1\leq j\leq N} e^{2\phi_j} + e^{\sum_{1\leq i\leq N} 2\phi_i} \\ &= e^{\sum_{1\leq i\leq N} 2\phi_i}[e^{-\sum_{1\leq i\leq N} 2\phi_i} + \sum_{1\leq j\leq N} e^{2\phi_j - \sum_{1\leq i\leq N} 2\phi_i} + 1] \end{aligned}$$
Faktor pertama hilang terhadap operator $2\frac{\partial^2}{\partial x^2}ln$ sedangkan faktor kedua $\rightarrow 1$. Sehingga $U \rightarrow 0, \forall\ \alpha\ \neq -1$, kontradiksi dengan asumsi bahwa Φ arah fase yang tidak hilang.

3. Jika $\phi_i \rightarrow -\infty,\ 1 \leq i \leq N$ maka $f \rightarrow 1$. Sehingga $U \rightarrow 0$ yaitu solusi U hilang dalam pelimitan ini, kontradiksi dengan fakta bahwa Φ adalah arah fase yang tidak hilang.

Untuk kasus yang lain dibuktikan secara sama. Soliton $U^{(j-k)}$ ini merupakan soliton yang nyata karena memenuhi kondisi relasi dispersi $D(\mu_j - \mu_k,\ \mu_j\rho_j - \mu_k\rho_k,\ -\mu_j c_j + \mu_k\rho_k) = 0$. $\diamondsuit$



Gambar 1: Solusi tiga soliton (N=3) dengan empat cabang soliton, untuk $\epsilon = 1$, $A_{ij} = 0$, $i < j$, $i, j = 1, 2, 3$ dan $\mu_1 = 1$, $\mu_2 = 0,695$, $\mu_3 = 0,25$, $\rho_1 = -0,5$, $\rho_2 = 0,11$, $\rho_3 = 1$, $t = 0$.

2.4 BENTUK ASIMTOTIK SOLUSI N - SOLITON

Kita akan membahas bentuk asimtotik dari solusi N-soliton pada pelimitan $y \to \pm\infty$ dengan memperhatikan parameter waktu t tetap. Pada pelimitan ini suatu soliton diselidiki melalui transformasi koordinat bergerak dengan kecepatan c_n = konstan, $1 \leq n \leq N$, atau dengan memandang ϕ_n = konstan, $1 \leq n \leq N$.

• Untuk $y \to -\infty$, tanpa mengurangi keumuman asumsikan

$\phi_1, \phi_3, \phi_4, ..., \phi_{n-1} \to \infty$, ϕ_n = konstan , n$\neq$ 2 dan

$\phi_{n+1}, \phi_{n+2}, ..., \phi_N, \phi_2 \to -\infty$, maka

$$f \to A_{134...(n-1)}[1 + A_{1n}A_{3n}...A_{(n-1)n}\, e^{2\phi_n}].$$

Terhadap operator $2\frac{\partial^2}{\partial x^2}ln$ factor $A_{134...(n-1)}$ hilang. Sehingga $U \to U^{(n)} = 2\mu_n^2 sech^2(\phi_n + \frac{1}{2}ln(A_{1n}A_{3n}...A_{(n-1)n}))$, yaitu solusi soliton ke-n berubah fase dengan faktor $\frac{1}{2}ln(A_{1n}A_{3n}...A_{(n-1)n})$.

• Untuk ϕ_2 = konstan , $\phi_1, \phi_3, \phi_4, ..., \phi_N \to \infty$, maka

$$f \to A_{134...N}[1 + A_{12}A_{23}A_{24}...A_{2N}e^{2\phi_2}].$$

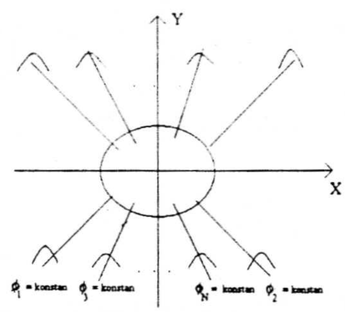
Terhadap operator $2\frac{\partial^2}{\partial x^2}ln$ factor $A_{134...N}$ hilang. Sehingga $U \to U^{(2)} = 2\mu_2^2 sech^2(\phi_2 + \frac{1}{2}ln(A_{12}A_{23}...A_{2N}))$, yaitu solusi soliton ke-2 berubah fase dengan dengan faktor $\frac{1}{2}ln(A_{12}A_{23}...A_{2N})$.

- Untuk y $\to \infty$. Dengan asumsi di atas berlaku, $\phi_1,\ \phi_3, ...,\ \phi_{n-1} \to -\infty$, ϕ_n = konstan, n$\neq$ 2 $\phi_{n+1},\ \phi_{n+2}, ...,\ \phi_N,\ \phi_2 \to \infty$, maka

$$f \to A_{(n+1)(n+2)...N2}[1 + A_{n(n+1)}A_{n(n+2)}...A_{nN}A_{n2}\ e^{2\phi_n}].$$

Terhadap operator $2\frac{\partial^2}{\partial x^2}ln$ factor $A_{(n+1)(n+2)...N2}$ hilang. Sehingga $U \to U^{(n)} = 2\mu_n^2 sech^2[\phi_n + \frac{1}{2}ln(A_{n(n+1)}A_{n(n+2)}...A_{nN}A_{n2})]$, yaitu solusi soliton ke-n berubah fase dengan faktor $\frac{1}{2}ln(A_{n(n+1)}A_{n(n+2)}...A_{nN}A_{n2}))$.

Untuk ϕ_2 = konstan, $\phi_1,\ \phi_3, ...,\ \phi_N \to -\infty$, maka $f \to 1 + e^{2\phi_2}$ dan $U \to U^{(2)} = 2\mu_2^2 sech^2(\phi_2)$, yaitu solusi soliton kedua tidak berubah fase.



Gambar 2: Gambar garis - garis karakteristik dari soliton ke-i, $1 \leq i \leq N$ pada pelimitan asimtotik $|y| \to \infty$.

Perubahan fase (phase shift) soliton ke-i yang diakibatkan oleh tumbukan dengan N-1 soliton yang lain dinyatakan sebagai berikut

$$\begin{aligned}
\Delta_i &= \tfrac{1}{2}ln(\prod_{1\leq j<i, j\neq 2} A_{ji}) - \tfrac{1}{2}ln(\prod_{i<j\leq N, j\neq 2} A_{ij}A_{2i}), && i \geq 3 \\
\Delta_i &= -\tfrac{1}{2}ln(\prod_{i<j\leq N} A_{ij}), && i = 1 \qquad (16)\\
\Delta_i &= \tfrac{1}{2}ln(A_{12}\prod_{i<j\leq N} A_{ij}), && i = 2.
\end{aligned}$$

Setelah diperoleh perubahan fase ini, selanjutnya akan ditunjukkan adanya kondisi untuk soliton ke-i, $3 \leq i \leq N$ berjalan tidak berubah fase.

Proposisi 2.2.

Misalkan Δ_i, $1 \leq i \leq N$ perubahan fase soliton ke-i yang diberikan pada persamaan (16). Soliton ke-i, $3 \leq i \leq N$ berjalan tidak berubah fase setelah tumbukan jika dan hanya jika berlaku hubungan

$$\prod_{i=3}^{N} [A_{1i} - A_{2i}] = 0. \tag{17}$$

Bukti.

Bukti diselesaikan dengan menentukan $\Delta_i = 0, \quad 3 \leq i \leq N$ pada (16) dan diperoleh

$$A_{(N-1)N} = \frac{\prod_{j=3}^{N-1} A_{1j}}{\prod_{j=3}^{N-1} A_{2j}} \frac{1}{\prod\limits_{3 \leq i \leq N-2} A_{iN}}.$$

Nilai $A_{(N-1)N}$ disubstitusi ke (16) dengan menentukan $\Delta_N = 0$ diperoleh

$$\prod_{i=1}^{N} [A_{1i} - A_{2i}] = 0. \qquad \diamond$$

Persamaan ini menyatakan adanya solusi untuk ρ_i, $3 \leq i \leq N$, jika diberikan nilai μ_i, $1 \leq i \leq N$ dan ρ_i, $1 \leq i \leq 2$.

3. SOLUSI N-SOLITON YANG BEBAS WAKTU

Profil solusi dua soliton dapat dipandang bebas waktu telah dibahas oleh Cahyono et.al. (lihat [2]). Untuk profil solusi N-soliton ada yang dapat dipandang bebas waktu. Pada bagian ini akan dibahas solusi N-soliton yang bebas waktu dan selanjutnya diperoleh syarat perlu dan cukup agar untuk menentukan kondisi bebas waktu. Kondisi bebas waktu dapat ditunjukkan dengan membuat transformasi koordinat bergerak untuk mengeliminasi parameter waktu t.

Kita memperhatikan bahwa vektor arah dari variabel fase ϕ_i, yaitu $\vec{\nu_i} = (\mu_i,\ \mu_i\rho_i,\ -\mu_i c_i)^T$, $1 \le i \le N$ terletak pada suatu bidang dalam ruang waktu (x, y, t), artinya salah satu vektor arah merupakan kombinasi linier dengan dua vektor arah yang lain yang bebas linier. Asumsikan dua vektor yang bebas linier adalah $\vec{\nu_1}$ dan $\vec{\nu_2}$.

Proposisi 3.1.

Misalkan $\phi_i = \mu_i(x+\rho_i y-c_i t)$, $1 \le i \le N$ adalah variabel fase untuk soliton ke-i. Profil solusi N-soliton yang bebas waktu berlaku hubungan

$$\frac{c_1 - c_i}{c_2 - c_i} = \frac{\rho_1 - \rho_i}{\rho_2 - \rho_i} = \frac{\rho_1 c_i - \rho_i c_1}{\rho_2 c_i - \rho_i c_2}\ , \qquad 3 \le i \le N. \tag{18}$$

Bukti.

Misalkan vektor arah dari variabel fase ϕ_i pada ruang waktu (x, y, t) adalah $\vec{\nu_i} = \mu_i(1,\ \rho_i,\ -c_i)^T$, $1 \le i \le N$. Misalkan $\vec{\nu_i}$, $3 \le i \le N$ merupakan kombinasi linier dari $\vec{\nu_1}$ dan $\vec{\nu_2}$, maka berlaku

$$\vec{\nu_i} = \alpha\vec{\nu_1} + \lambda\vec{\nu_2}, \quad 3 \le i \le N. \tag{19}$$

Dari (19) diperoleh

$$\alpha = \frac{\mu_i(\rho_2 - \rho_i)}{\mu_1(\rho_2 - \rho_1)}\ , \qquad \lambda = \frac{\mu_i(\rho_i - \rho_1)}{\mu_2(\rho_2 - \rho_1)}\ , \qquad 3 \le i \le N. \tag{20}$$

Substitusi (20) ke (19) didapat kesamaan

$$\frac{c_1 - c_i}{c_2 - c_i} = \frac{\rho_1 - \rho_i}{\rho_2 - \rho_i}, \quad 3 \leq i \leq N. \tag{21}$$

Di lain pihak kesamaan (21) equivalen dengan

$$\frac{\rho_1 c_i - \rho_i c_1}{\rho_2 c_i - \rho_i c_2} = \frac{\rho_1 - \rho_i}{\rho_2 - \rho_i}, \quad 3 \leq i \leq N. \tag{22}$$

dengan memperhatikan kesamaan

$$\rho_2 c_1 + \rho_i c_2 + \rho_1 c_i - \rho_2 c_i - \rho_1 c_2 - \rho_i c_1 = 0 \quad, 3 \leq i \leq N$$

yang merupakan syarat agar vektor $\vec{\nu_1}$, $\vec{\nu_2}$, $\vec{\nu_i}$, $3 \leq i \leq N$ terletak pada satu bidang. Dari persamaan (22) dan persamaan (21) diperoleh

$$\frac{c_1 - c_i}{c_2 - c_i} = \frac{\rho_1 - \rho_i}{\rho_2 - \rho_i} = \frac{\rho_1 c_i - \rho_i c_1}{\rho_2 c_i - \rho_i c_2}, 3 \leq i \leq N. \quad \diamondsuit$$

Selanjutnya melakukan transformasi koordinat bergerak yang diberikan oleh

$$x \to x - \eta t \;, \qquad y \to y - \vartheta t \tag{23}$$

di mana

$$\eta = \frac{\rho_2 c_i - \rho_i c_2}{\rho_2 - \rho_i}, \quad \vartheta = \frac{c_2 - c_i}{\rho_2 - \rho_i}, \quad 3 \leq i \leq N.$$

Melalui transformasi koordinat yang diberikan pada (23), maka variabel fase $\overline{\phi}_i$, $3 \leq i \leq N$ dalam koordinat ini menjadi

$$\begin{aligned} \overline{\phi}_i &= \mu_i(x + \eta t + \rho_i(y + \vartheta t) - c_i t) \\ &= \mu_i(x + \rho_i y + (\eta + \rho_i \vartheta)t - c_i t) \\ &= \mu_i(x + \rho_i y), \; 3 \leq i \leq N. \end{aligned} \tag{24}$$

Persamaan (24) menyatakan bahwa arah fase dari soliton ke-i, $3 \leq i \leq N$ tidak berubah dalam koordinat yang baru dan tidak bergantung pada parameter waktu t. Ini menyatakan bahwa profil N-soliton dipandang bebas waktu.

Pada kondisi bebas waktu, selanjutnya akan ditunjukkan adanya soliton ke-i, $3 \leq i \leq N$ yang berjalan tidak berubah fase setelah tumbukan dengan N-1 soliton yang lain.

Proposisi 3.2.

Misalkan $\phi_i = \mu_i(x+\rho_i y - c_i t)$, $1 \leq i \leq N$ adalah variabel fase untuk soliton ke-i. Pada kondisi bebas waktu, soliton ke-i, $3 \leq i \leq N$ berjalan tidak berubahan fase setelah tumbukan jika dan hanya jika berlaku hubungan

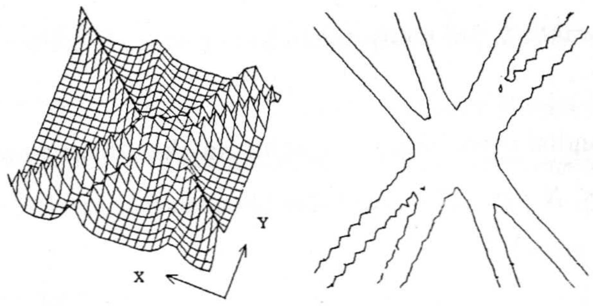
1. $\dfrac{c_1 - c_i}{c_2 - c_i} = \dfrac{\rho_1 - \rho_i}{\rho_2 - \rho_i}$.

2. $\prod_{i=1}^{N}[A_{1i} - A_{2i}] = 0 \quad , \quad 3 \leq i \leq N.$

Bukti.

Proposisi ini merupakan kombinasi antara proposisi (2.2.) dan proposisi (3.1.) yang senantiasa menyatakan ada solusi dan tidak tunggal untuk μ_i, ρ_i, $3 \leq i \leq N$, jika diberikan μ_i, ρ_i, $1 \leq i \leq 2$. Salah satu solusi dari pernyataan ini, pilih $A_{1i} = A_{2i}$, $i = 3, 4, ..., N$ dari poin (2). Maka terdapat 2(N-2) variabel μ_i dan ρ_i, $i = 3, 4, ..., N$ dengan 2(N-2) persamaan. Dari poin (1) misalkan ρ_i dinyatakan dalam $F(\mu_i)$, $i = 3, 4, ..., N$ substitusikan nilai ρ_i ke poin (2) maka diperoleh nilai μ_i, $i = 3, 4, ..., N$ yang tidak tunggal.

Sebagai contoh pada kondisi bebas waktu untuk N=4, jika diberikan nilai $\mu_1 = 0,8$, $\mu_2 = 0.7$, $\rho_1 = -1$, $\rho_2 = 1$, $\epsilon = 1$, melalui perhitungan MAPLE diperoleh nilai $\rho_3 = -0,55883$, $\rho_4 = 0,41467$ dan $\mu_3 = 0,68$, $\mu_4 = 0,55678$.



Gambar 3: Profil 4-soliton dan peta konturnya pada kondisi bebas waktu dimana soliton ketiga dan keempat tidak ada perubahan fase.

4. KESIMPULAN

Ssbagaimana umumnya persamaan gelombang tak linier, persamaan Kadomtsev-Petviashvili mempunyai relatif masih banyak fenomena yang belum diketahui. Pemahaman tentang kelas solusi (analitik) khusus sepeti N-soliton akan membantu mengungkapkan fenomena lain yang terkait seperti kelas solusi (spatial) periodik.

Hasil yang diperoleh di sini tentang solusi N-soliton yang bebas waktu yang tak berubah fase (kecuali dua terujung), pada dasarnya mengungkapkan adanya kelas solusi sederhana (yang tak trivial) yang hampir berperilaku seperti gelombang linier.

DAFTAR PUSTAKA

[1] B. B. Kadomtsev & V. I. Petviashvili, On the stability of solitary waves in weakly dispersing media, Soviet Phy. Dokl., 15: 539-543, 1970.

[2] E. Cahyono, E. Van Groesen, E. Soewono & S. Subarinah, Genus-two Soliton to the Kadomtsev & Petviashvili Equation, on International Conference Differential Equation in Differential equations, theory nu-

merics and applicatioans (Proc. ICDE 1996, E. Van Groesen & E. Soewono, ed.), Kluwer, 233-243, 1997.

[3] Junkichi Satsuma, N-soliton solution of the two-dimensional Korteweg-deVries Equation, J. The Physical Society of Japan, 40:286-290, 1976.

[4] Kenji Ohkuma dan Miki Wadati, The Kadomtsev-Petviashvili Equation, The Trace Method and the soliton Resonance, J. The Physical Society of Japan, 52:749-760, 1983.