

MATRIKS HANKEL

Hankel Matrices

R. Heru Tjahjana

Jurusan Matematika FMIPA UNDIP

Abstract

In this paper, we talk about Hankel Operator and Hankel Matrix. Operator $H_g: F[z](z^{-1}F[[z^{-1}]])$ defined by $H_g(f) = (gf)$ is called the Hankel Operator. Hankel Operator can be represented by a Hankel matrix.

Keywords : Hankel Operator, matrix representation, Hankel matrix

1. PENGANTAR

Aljabar linear memegang peranan penting baik dalam bidang sains maupun teknologi (Howard A, 1981). Secara khusus penulis mendalami topik Operator Hankel dan Matriks Hankel. Hal yang melatarbelakangi pemilihan topik matriks Hankel sebagai bahan yang dipelajari adalah karena hubungannya yang erat dengan masalah-masalah sains dan teknologi khususnya yang berkaitan dengan teori sistem linear (Brewer, 1976).

Fuhrmann (1996) dalam bukunya yang berjudul *A Polynomial Approach to Linear Algebra* menulis materi Operator Hankel dan Matriks Hankel. Penulis mempelajari kembali apa yang dituliskan Fuhrmann dan memberikan bukti yang lebih detail pada teorema dan akibat-akibatnya. Penulis juga menulis contoh aplikasi dari Eising (1981).

2. CARA PENELITIAN

Cara penelitian yang dilakukan adalah studi literatur milik pribadi, milik Perpustakaan Jurusan Matematika dan Perpustakaan Fakultas MIPA UGM.

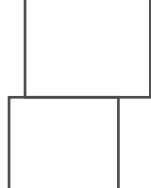
3. OPERATOR HANKEL DAN MATRIKS HANKEL

Notasi 3.1.1

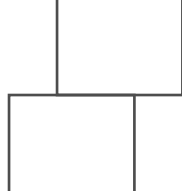
Berikut akan dituliskan notasi-notasi penting yang digunakan tulisan ini.

Notasi	Arti
$(_+$	Operator $(_+$
$(_)$	Operator $(_)$
$F((z^{-1}))$	Himpunan semua jumlahan tak hingga dengan koefisien anggota lapangan F dan <i>indeterminates</i> z dan z^{-1}
$F[z]$	Himpunan semua polinomial dengan <i>indeterminates</i> z
$F[[z^{-1}]]$	Himpunan semua jumlahan tak hingga dengan koefisien anggota lapangan F dan <i>indeterminates</i> z^{-1}
$F(z)$	Lapangan fungsi rasional p/q , dengan p, q anggota $F[z]$
$F_ (z)$	Himpunan semua fungsi rasional p/q , dengan p, q anggota $F[z]$ dan $\deg p < \deg q$
$(_q$	Operator proyeksi dengan indeks q
X_q	$\{(q f) \mid f \in F[z]\}$
X^d	$\{r/d \mid \deg r < \deg d\}$
H_g	Operator Hankel H dengan indeks g

Definisi 3.1.1



1. Didefinisikan operator $(_+ : F((z^{-1})) \rightarrow F((z^{-1}))$ dengan rumus $(_+=$ dan $(_ : F((z^{-1})) \rightarrow F((z^{-1}))$ dengan



rumus $(_ =$



2. Misalkan $g(z) = F((z^{-1}))$. Didefinisikan operator Hankel $H_g : F[z] \rightarrow (z^{-1} F[[z^{-1}]])$ dengan rumus $H_g(f) = (_ (gf)$ untuk $f \in F[z]$

3. Didefinisikan operator $S_+ : F[z] \rightarrow F[z]$ dengan rumus $S_+(f) = zf$ dan operator $S_- : (z^{-1} F[[z^{-1}]] \rightarrow (z^{-1} F[[z^{-1}]])$ dengan rumus $S_-(f) = (_ (zf)$.

4. Untuk $h \in (z^{-1} F[[z^{-1}]])$, didefinisikan $p.h = (_ (ph)$.

Teorema 3.1.1

Misalkan $g \in F((z^{-1}))$

1. $H_g : F[z] \rightarrow (z^{-1} F[[z^{-1}]])$, H_g merupakan homomorfisma $F[z]$ -modul.

2. Sebarang homomorfisma $F[z]$ -modul dari $F[z] \rightarrow (z^{-1} F[[z^{-1}]])$ merupakan operator Hankel.



3. Misalkan $g_1, g_2 \in F((z^{-1}))$ maka jika dan hanya jika $g_1 - g_2 \in F[z]$.

Bukti :

1. $H_g : F[z] \subset z^{-1} F[[z^{-1}]]$, H_g merupakan homomorfisma $F[z]$ -modul sebab $H_g((f_1 + f_2)) = (H_g f_1 + H_g f_2)$ dan $H_g(zf) = z(H_g f)$.
2. Ambil sebarang H homomorfisma $F[z]$ -modul dari $F[z] \subset z^{-1} F[[z^{-1}]]$. Dengan menyajikan $H(1) = g$ dan ambil sebarang $f \in F[z]$ didapat $H(f) = H(f \cdot 1) = f \cdot H(1) = f \cdot g = (fg) = (gf) = H_g(f)$.

□

3. jika dan hanya jika $g_1 - g_2 \in F[z]$

□
□
□

Dari maka diperoleh . Selanjutnya sebab

□
□
□

$$(H_g - H_{g_2})f = (H_{g_1}f) - (H_{g_2}f) =$$

Sifat akan terbukti bila sifat $H_g = 0$ ($g \in F[z]$) terbukti.

(Diketahui $H_g = 0$, artinya $H_g(f) = 0$, untuk setiap $f \in F[z]$

$H_g(f) = (gf) = 0$, maka $gf = 0$, untuk setiap $f \in F[z]$

Didapat $0 = gf \in F[z]$ dan $f \in F[z]$, disimpulkan $g \in F[z]$

(Diketahui $g \in F[z]$. Akan dibuktikan $H_g(f) = 0$, untuk setiap $f \in F[z]$

Ingat $H_g(f) = (gf)$. Karena $F(z) = F[z](F_-(z))$ dan $gf \in F[z]$ maka

$(gf) = 0$, untuk setiap $f \in F[z]$

$H_g(f) = 0$, untuk setiap $f \in F[z]$

Disimpulkan $H_g = 0$.

Selanjutnya perhatikan persamaan dibawah ini :

$$H_g S_+(f) = (g S_+ f) = (g z f) = (z g f) = (z f) \cdot (g) = S_- H_g(f)$$

didapat $H_g S_+(f) = S_- H_g(f)$, persamaan ini merupakan persamaan fungsional operator Hankel.

Akibat 3.1.1

Misalkan $g \in F((z^{-1}))$ maka $H_g : F[z] \subset z^{-1} F[[z^{-1}]]$ tidak invertibel

Bukti :

Andaikan H_g invertibel. Dari $H_g S_+ = S_- H_g$ didapat $H_g S_+ H_g^{-1} = S_-$, artinya S_+ dan S_- similar.

Perhatikan bahwa $F((z^{-1})) = F[z] \subset z^{-1} F[[z^{-1}]]$

□

$$S_+ : f \in F[z] \rightarrow z f \in F[z]$$

□

$S_- : f \in z^{-1} F[[z^{-1}]] \rightarrow (z f) \in z^{-1} F[[z^{-1}]]$, sehingga $S_+ = S|F[z]$ dan $S_- = S|z^{-1} F[[z^{-1}]]$.

Karena $F[z] \subset z^{-1} F[[z^{-1}]] = \{0\}$ maka $S_+(S_- \{0\})$, akibatnya $S = S_+(S_-$

S_- tidak injektif sebab $\text{Ker } S_- = \{0\}$. Alasan $\text{Ker } S_- = \{0\}$ sebagai berikut :

Ambil sebarang $v \in \text{Ker } S_-$ maka $S_-(v)=0$.

Ingat $v \in z^{-1}F[[z^{-1}]]$, artinya

$$v = z^{-1}(\dots + a_{-1}z^{-1} + a_{-2}z^{-2} + \dots)$$

$v = z^{-1}(\dots +$

$$a_{-1}z^{-1} + a_{-2}z^{-2} + \dots)$$

$v =$

$$z^{-1}(\dots + a_{-1}z^{-1} + a_{-2}z^{-2} + \dots)$$

$zv = \dots +$

$$a_{-1} + a_{-2}z^{-1} + \dots$$

Perhatikan $S_-(v) = \sum_{k=0}^{\infty} (zv)_k = \dots +$

$$a_{-1} + a_{-2}z^{-1} + \dots$$

Karena $S_-(v) = \sum_{k=0}^{\infty} (zv)_k = 0$, maka $\dots + = 0$

$$a_{-1} + a_{-2}z^{-1} + \dots = 0$$

Didapat

$$a_{-1} + a_{-2}z^{-1} + \dots = 0$$

Jadi $v = z^{-1}(\dots + z^{-1}g_{-1}(0))$. Terbukti $\text{Ker } S_-(\{0\})$.

Sedangkan S_+ injektif karena $\text{Ker } S_+ = \{0\}$. Alasan $\text{Ker } S_+ = \{0\}$ sebagai berikut :

$$S_+(v) = \sum_{k=0}^{\infty} v_k z^k = \dots +$$

$S_+(v) = zv = \dots +$

$$a_{-1} + a_{-2}z^{-1} + \dots$$

Jika $S_+(v) = 0$ maka $\dots =$

$$a_{-1} + a_{-2}z^{-1} + \dots = 0$$

Ambil $v \in \text{Ker } S_+$, maka $S_+(v) = zv = 0$, akibatnya $v = \dots + = 0$

Jadi $v \in \{0\}$.

Ambil sebarang $v \in \{0\}$, maka $v = 0$ maka $S_+(v) = S_+(0) = 0$. Jadi $v \in \text{Ker } S_+$.

Diperoleh bahwa S_- tidak injektif dan S_+ injektif, akibatnya S_+ dan S_- tidak similar. Kontradiksi didapat maka pengandaian diingkar dan didapat H_g tidak invertibel.

Teorema 3.1.2 (Kronecker)

1. Operator Hankel H_g mempunyai rank berhingga jika dan hanya jika g fungsi rasional.
2. Jika $g = p/q$ dengan p, q koprima maka $\text{Ker } H_{p/q} = qF[z]$ dan $\text{Im } H_{p/q} = X^q$.

Bukti:

1. Operator Hankel H_g mempunyai rank berhingga jika dan hanya jika g fungsi rasional

(

Diketahui H_g mempunyai rank berhingga

Andaikan g tidak rasional, maka $g \notin F[z]$. Ingat $H_g(f) = \sum_{k=0}^{\infty} (gf)_k z^k$.

Karena $g \notin F[z]$ maka $gf \notin F[z]$, akibatnya $\sum_{k=0}^{\infty} (gf)_k z^k = 0$. Berarti $H_g(f) = 0$ dan

$\text{Im } H_g = \{0\}$, artinya H_g tidak mempunyai rank. Kontradiksi dengan H_g mempunyai rank berhingga. Jadi pengandaian diingkar, terbukti g rasional.

(

Perhatikan bahwa $F(z) = F[z](F_-[z])$

Misalkan $g = p/q$ maka $H_{p/q}(f) = \sum_{k=0}^{\infty} ((p/q)f)_k z^k = \sum_{k=0}^{\infty} (pf/q)_k z^k$

$pf/q \in F[z]$ maka $\sum_{k=0}^{\infty} (pf/q)_k z^k \in F_-[z]$. Jadi $\sum_{k=0}^{\infty} (pf/q)_k z^k$ merupakan polinomial berbentuk r/q dengan \deg

$r < \deg q$.

$$H_g(f) = \sum_{i=0}^{\infty} ((p/q)f)_i = \sum_{i=0}^{\infty} (pf/q)_i = \{r/q \mid \deg r < \deg q\} = X^q$$

Perhatikan bahwa X^q (X_q dan $\dim X_q = \deg q$)

Jadi $\dim \text{Im } H_g = \dim X_q = \deg q < \infty$. Kesimpulan $\text{rk}(H_g)$ berhingga.

2. Dari butir 1 didapat $\dim \text{Im } H_g = \dim X_q$ sehingga $\text{Im } H_g = X_q$

Selanjutnya akan dibuktikan $\text{Ker } H_{p/q} = qF[z]$. Ambil sebarang $f \in qF[z]$

$$f = q \cdot ((0 + (1z^1 + \dots + (nz^n)) = ((0 + (1z^1 + \dots + (nz^n)) \cdot ((0 + (1z^1 + \dots + (nz^n))$$



$$= (0 + ((0 + (0(1)z^1 + \dots + (i)z^{m+n}))$$

$$H_{p/q}(f) = \sum_{i=0}^{\infty} ((p/q)f)_i = \sum_{i=0}^{\infty} (p/q)_i \cdot 0 = 0. \text{ Jadi } f \in \text{Ker } H_{p/q}.$$

Ambil sebarang $f \in \text{Ker } H_{p/q}$,

maka $H_{p/q}(f) = \sum_{i=0}^{\infty} ((p/q)f)_i = 0$. Karena $\sum_{i=0}^{\infty} ((p/q)f)_i = 0$ maka $(p/q)f$ tidak memuat z pangkat negatif.

$$(p/q)f = ((0 + (1z^1 + \dots + (nz^n)), \text{ dengan } (i) \in F$$

$$f = (q/p) \cdot ((0 + (1z^1 + \dots + (nz^n)) = q \cdot ((0 + (1z^1 + \dots + (nz^n)) / p. \text{ Perhatikan bahwa}$$

$((0 + (1z^1 + \dots + (nz^n)) / p \in F[z]$ sebab pf dibagi q sisanya 0, berarti $q \mid pf$. Karena p, q koprima maka q bukan pembagi p , artinya $q \mid f$. Jadi $f \in qF[z]$.

Selanjutnya akan dicari matriks representasi operator Hankel $H_g: F[z] \rightarrow F[[z^{-1}]]$ dengan



$$H_g(f) = \sum_{i=0}^{\infty} (gf)_i, \text{ untuk } g = (F((z^{-1})) \text{ khusus yang indeksnya positif,}$$

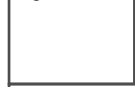
$$\text{Basis } F[z] = \{1, z^1, \dots, z^n, \dots\}$$

$$\text{Basis } \text{Im } H_g = \text{Basis } \text{Im } H_{g/1} = \text{Basis } X^1 = \text{Basis } \{r/1 \mid \deg r < 0\} =$$

$$\text{Basis } \{(1z^{-1} + (2z^{-2} + \dots + (nz^{-n}) \mid (i) \in F, (n) \in \mathbb{N}\} = \{z^{-1}, z^{-2}, \dots, z^{-n}, \dots\}$$



$$H_g(1) = \sum_{i=0}^{\infty} (g \cdot 1)_i = \sum_{i=0}^{\infty} (g)_i = g_1 z^{-1} + g_2 z^{-2} + \dots + g_n z^{-n} + \dots$$



$$H_g(z) = \sum_{i=0}^{\infty} (g \cdot z)_i = \sum_{i=0}^{\infty} (g)_i z = g_2 z^{-1} + g_3 z^{-2} + \dots + g_{n+1} z^{-n} + \dots$$



$$H_g(z^2) = \sum_{i=0}^{\infty} (g \cdot z^2)_i = \sum_{i=0}^{\infty} (g)_i z^2 = g_3 z^{-1} + g_4 z^{-2} + \dots + g_{n+2} z^{-n} + \dots$$





maka matriks representasi operator Hankel $H_g: F[z] \rightarrow F[[z^{-1}]]$ dengan $H_g(f) = \sum_{i \geq 0} (gf)z^i$ adalah Hankel. Selanjutnya sebarang matriks tak hingga (g_{ij}) dengan $g_{ij} = g_{i+j-1}$ disebut matriks Hankel. Dengan menyebut operator Hankel sebagai matriks Hankel tak hingga maka teorema 3.1.2 dapat ditulis kembali sebagai teorema 3.1.3 berikut :

Teorema 3.1.3



Matriks Hankel tak hingga H mempunyai rank hingga jika dan hanya jika $g(z) = \sum_{i \geq 0} g_i z^i$ adalah fungsi rasional.

Definisi 3.1.2

Diberikan fungsi rasional sejati g , didefinisikan derajat McMillan dinotasikan sebagai $\rho(g)$ yaitu $\rho(g) = \text{rank } H_g$.

Teorema 3.1.4

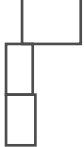
Misalkan $g = p/q$ dengan p, q koprima dengan g fungsi rasional sejati maka $\rho(g) = \deg q$

Bukti:

Dengan teorema 3.1.2 didapat $\text{Im } H_{p/q} = X^q$ dan $\rho(g) = \text{rank } H_g = \text{rank } H_{p/q} = \dim \text{Im } H_{p/q} = \dim X^q = \deg q$.

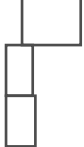
Teorema 3.1.5

Misalkan $g_i = p_i/q_i$ fungsi rasional dengan p_i dan q_i koprima maka



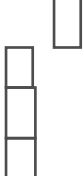
1. $\text{Im } H(g_1 + g_2) \subseteq \text{Im } H g_1 + \text{Im } H g_2$ dan $\rho(g_1 + g_2) \leq \rho(g_1) + \rho(g_2)$
2. $\rho(g_1 + g_2) = \rho(g_1) + \rho(g_2)$ jika dan hanya jika q_1, q_2 koprima

Bukti :



1. Akan dibuktikan $\text{Im } H(g_1 + g_2) \subseteq \text{Im } H g_1 + \text{Im } H g_2$

Perhatikan bahwa



$\text{Im } H = X, \text{Im } H = X,$

$$\text{Im } H = \{ \sum (g_1 + g_2) f \mid f \in F[z] \}$$

Ambil sebarang $f \in \text{Im } H$, maka $f = \sum (g_1 + g_2) h$, untuk suatu $h \in F[z]$

$$f = \sum (g_1 + g_2) h = \sum (g_1 h + g_2 h) = \sum (g_1 h) + \sum (g_2 h) = H(h) + H(h)$$

Jadi $f \in \text{Im } H + \text{Im } H$

Akan dibuktikan $(\sum (g_1 + g_2)) = (\sum (g_1)) + (\sum (g_2))$, artinya harus dibuktikan

$$\text{rank } H < \text{rank } H + \text{rank } H$$

$$\dim (\text{Im } H) < \dim \text{Im } (H) + \dim (\text{Im } H)$$

$$\dim (\sum (g_1 + g_2) F[z]) < \dim X + \dim X$$

$$\dim (\sum (g_1 + g_2) F[z]) < \deg q_1 + \deg q_2.$$

Perhatikan lagi bahwa

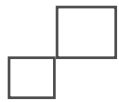
$$\sum ((g_1 + g_2) f) = \sum (g_1 f + g_2 f) = \sum (g_1 f) + \sum (g_2 f) = \sum (f) + \sum (f).$$

$$\text{Jadi } \dim (\sum (g_1 + g_2) f) = \dim (\sum (f)) + \dim (\sum (f)) < \deg q_1 + \deg q_2.$$

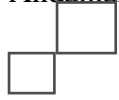
Terbukti $(\sum (g_1 + g_2)) = (\sum (g_1)) + (\sum (g_2))$.

2. Akan dibuktikan $(\sum (g_1 + g_2)) = (\sum (g_1)) + (\sum (g_2))$ jika dan hanya jika q_1, q_2 koprima

$$\text{Diketahui } (\sum (g_1 + g_2)) = (\sum (g_1)) + (\sum (g_2)), \text{ artinya } \dim (\text{Im } H) = \dim X + \dim X$$



Andaikan q_1, q_2 tidak koprima maka $\text{Im } H(X)$,



berarti $\dim \text{Im } H < \dim X$.

Selanjutnya diperoleh



$\dim(\text{Im } H) < \dim X + \dim \text{Im } X$. Kontradiksi dicapai, pengandaian dingkar sehingga terbukti q_1, q_2 koprima.

(

Diketahui q_1, q_2 koprima, akan dibuktikan $((g_1+g_2)) = ((g_1)) + ((g_2))$.



Pada umumnya berlaku $\text{Im } H \subseteq \text{Im } H_1 + \text{Im } H_2$



Untuk membuktikan $\text{Im } H = \text{Im } H_1 + \text{Im } H_2$, tinggal ditunjukkan bahwa



$\text{Im } H_1 + \text{Im } H_2 \subseteq \text{Im } H$. Ambil sebarang $f \in \text{Im } H_1 + \text{Im } H_2$, maka $f = f_1 + f_2$,

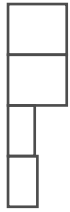


dengan $f_1 \in \text{Im } H_1$ dan $f_2 \in \text{Im } H_2$, sehingga $f \in \text{Im } H$.

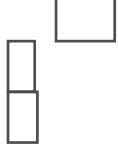


Karena q_1, q_2 koprima maka $X = X_1 + X_2$.

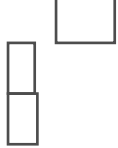




Jadi $f(X)$, artinya $f(\text{Im } H)$. Terbuktikan $\text{Im } H = \text{Im } H + \text{Im } H$,



artinya terbukti pula $\dim(\text{Im } H) = \dim(\text{Im } H) + \dim(\text{Im } H)$, sehingga terbukti



$\text{rank } H = \text{rank } H + \text{rank } H$, terbukti $((g_1 + g_2) = ((g_1) + ((g_2))$.

Berikut ini akan disajikan suatu penerapan matriks Hankel dalam teori realisasi. Sebelumnya akan dituliskan dulu definisi realisasi dan hal-hal terkait yang perlu diketahui.

Definisi 3.1.3

Diberikan ring komutatif R . Sistem (H, F, G) dengan H matriks atas R bertipe $p \times n$, F matriks atas R bertipe $n \times n$, dan G matriks atas R bertipe $n \times m$ yang memenuhi $M_i = HF^{i-1}G$, dengan $i > 1$ disebut realisasi untuk $\{M_i\}$. Selanjutnya koleksi matriks $\{M_i\}$ disebut pemetaan input-output atau pemetaan i/o dan setiap M_i adalah matriks bertipe $p \times m$.

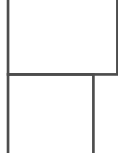
Definisi 3.1.4

Misalkan $E_i =$ Baris ke i dari I_n , W_n adalah himpunan seluruh fungsi $(\{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\})$, dan P_ζ adalah matriks bertipe $n \times n$ dengan baris ke i $P_\zeta = E_{\zeta(i)}$. Jika (W_n) bijektif maka P_ζ disebut matriks permutasi.

Contoh berikut merupakan aplikasi matriks Hankel dalam proses penentuan realisasi pemetaan i/o pada sistem atas Z yang diberikan oleh Eising(1981).

Contoh 3.1.1

Jika diberikan pemetaan i/o $= \{M_i\}$ atas Z sebagai berikut



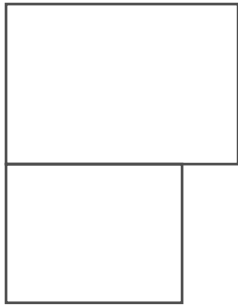
$M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $M_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $M_3 = M_4 = \dots = 0$. Akan dihitung realisasi pemetaan i/o ini.

Mula-mula ditulis pemetaan i/o sebagai matriks Hankel



$M =$

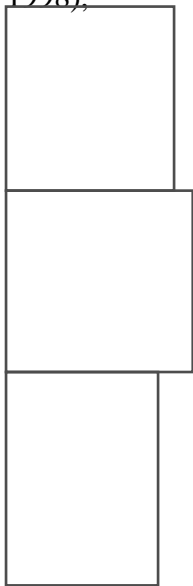




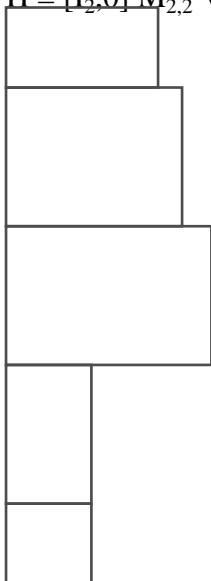
$M_{2,2} = \dots$

Perhatikan bahwa rank $M_{2,2} = 2$.

Selanjutnya dikerjakan proses faktorisasi ($M_{t,k} V = [A,0]$ hasilnya diperoleh (Ari Suparwanto, 1998),



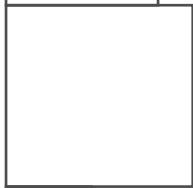
$H = [I_2, 0] M_{2,2} V$



$H = \dots$



$$AF = ((M_{2,2})V$$



F = . Dengan menyelesaikan persamaan ini diperoleh F =



$$AG = (M_{2,2}$$



G = . Dengan menyelesaikan persamaan ini diperoleh G = .

4. KESIMPULAN

Misalkan $g(F(z^{-1}))$ Operator $H_g : F[z] \rightarrow F[[z^{-1}]]$, dengan rumus $H_g(f) = (gf)$ disebut operator

Hankel. Operator Hankel dapat diwakili oleh matriks Hankel.

Daftar Pustaka

1. Brewer, *Linear System Over Commutative Rings*, Marcel Dekker, New York, 1976.
2. Eising R and Hautus M, *Realization algorithms for system over a principal ideal domain*, *Mathematical System Theory 14*, 1981, 353-366.
3. Fuhrmann, *A Polynomial Approach to Linear Algebra*, Springer-Verlag, New York, 1996.
4. Howard A, *Elementary Linear Algebra*, John Wiley and Sons, New York, 1981.
5. Suparwanto A, *Teori Realisasi Atas Ring Komutatif*, Tesis, Program Pascasarjana UGM, Yogyakarta, 1998.