

SYARAT PERLU LAPANGAN PEMISAH

Bambang Irawanto

Jurusan Matematika FMIPA UNDIP

Abstract

Field is integral domain and is such that every non-zero element in it has multiplicative inverse. Extension field F of field K is splitting field of collection of polynomials $\{ f_i(x) \mid i \in I \}$



- } of K if F is the smallest subfield containing K and all the zeros of the polynomial $f_i(x)$.
Element $(F \text{ is algebra over } K \text{ if } f_i(0) = 0 \text{ for some } 0 \in f(x) \in K[x])$. Splitting field is extension algebra.

Keywords : extension fields, elements of algebra

1. PENDAHULUAN

Lapangan adalah daerah integral yang setiap elemen yang tidak nol mempunyai invers terhadap pergandaan. Lapangan F disebut lapangan perluasan F atas lapangan K jika lapangan merupakan subfield dari lapangan F (Hungerford, T. W, 1984). Polinomial $f(x) \in K[x]$ dan $a \in K$ adalah akar dari $f(x)$ jika dan hanya jika $(x - a)$ faktor dari $f(x)$ (Hungerford T. W, 1984). Lapangan perluasan F disebut lapangan pemisah (splitting field) dari polinomial $f(x) \in K[x]$ jika $f(x)$ terfaktor dalam $F[x]$ dengan akar-akar $f(x)$ berada dalam F (Hungerford T.W, 1984).



Lapangan pemisah F untuk koleksi polinomial $\{ f_i(x) \mid i \in I \}$ atas K jika F subfield

terkecil dalam penutup aljabar yang memuat semua akar-akar dari $f_i(x)$ dan K . (Fraleigh, J. B, 1994). Dalam tulisan ini dipelajari syarat perlu lapangan pemisah dalam hubungan dengan elemen aljabar.

2. LAPANGAN PERLUASAN

Hungerford T.W, (1984), memberikan pengertian lapangan perluasan F atas lapangan K , jika lapangan K merupakan subfield dari lapangan F berdasarkan pengertian ini dibuktikan teorema Kronecker.

Teorema 1. (Teorema Kronecker)

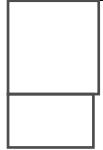
Misal K adalah lapangan dan $f(x)$ polinomial yang tidak konstan dalam $K[x]$, maka terdapatlah lapangan perluasan (Extension field) F dari K , dan elemen $\alpha \in F$ sedemikian sehingga $f(\alpha) = 0$.

Bukti :

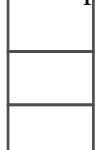
$K[x]$ adalah daerah ideal utama, karena daerah ideal utama merupakan daerah faktorisasi tunggal, maka $f(x) \in K[x]$ dapat difaktorkan secara tunggal sebagai $f(x) = p_1(x)p_2(x)\dots p_n(x)$, dengan $p_i(x)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) adalah polinomial prima yang tak tereduksi ; karena $p(x)$ polinomial tak



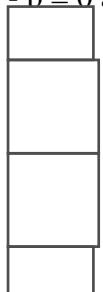
tereduksi maka $\langle p(x) \rangle$ adalah ideal maximal, dalam $K[x]$, dengan suatu lapangan. Didefinisikan



suatu pemetaan ϕ oleh $\phi : K \rightarrow$ dengan $a \mapsto a + \langle p(x) \rangle$ adalah pemetaan 1 – 1, sebab $\phi(a, b) \in K$ jika $\phi(a) =$



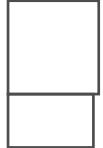
((b) maka $a + b = b + a$ ($a - b \in \langle p(x) \rangle$, jadi $a - b$ suatu kelipatan $p(x)$ yang berderajat 0 maka $a - b = 0$ atau $a = b$. (homomorfisma ring.



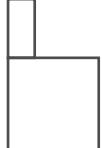
Sehingga $(K) = \{a + \langle p(x) \rangle \mid a \in K\}$ merupakan sub field dari K , jadi $K \neq \{a + \langle p(x) \rangle \mid a \in K\}$.



Misal $F =$ maka F merupakan lapangan perluasan dari K .



Akan dibuktikan $f(\alpha) = 0$, $\alpha \in F =$, ambil $\beta \in F$ dengan $\beta = x + \langle p(x) \rangle$. Jika $p(x) = a_0x^0 + a_1x^1 + \dots + a_nx^n \in$



K , maka $p(\alpha) = a_0(0) + a_1(1) + \dots + a_n(n) = 0$

$P(\alpha) = 0$. Karena $f(x) = p_1(x) \cdot p_2(x) \cdot \dots \cdot p_n(x)$, maka $f(\alpha) = 0$.

Contoh :

Misal $K = R$, $f(x) = x^2 + 1$, $f(x)$ tak tereduksi dalam R , maka $\langle x^2 + 1 \rangle$ ideal maksimal



dalam $R[x]$ jadi lapangan dengan



$\bar{F} = \{g(x) + \langle x^2 + 1 \rangle \mid g(x) \in R[x]\}$.





Ambil $(= x + <x^2 + 1>$ maka $f(() = (x + <x^2 + 1>)^2 + 1 = ($.

Elemen $((F$ disebut elemen aljabar atas K jika $f(() = 0$, untuk suatu $0 \in f(x) \in K[x]$ sebaliknya $($ bukan aljabar disebut transedental (Fraleigh J.B, 1994).

Selanjutnya dari pengertian aljabar diperoleh pengertian perluasan aljabar.

Definisi 1. F adalah lapangan perluasan atas lapangan K disebut perluasan aljabar jika setiap elemen dari F merupakan aljabar atas K . F dapat dipandang sebagai ruang vektor atas lapangan K . Dimensi ruang vektor F atas K disebut derajat dari lapangan perluasan F atas K , yang selanjutnya dinotasikan dengan $[F:K]$. Lebih lanjut lapangan perluasan disebut perluasan berhingga bila $[F:K]$ berhingga.

Teorema 2. Setiap perluasan berhingga dari (finite extention) suatu lapangan merupakan perluasan aljabar. (Raisinghania MD, 1980).

Bukti :

Pandang F perluasan berhingga lapangan K yang mempunyai derajat F atas K berhingga sebut n , maka ruang vektor F atas K memiliki dimensi n . Akan ditunjukkan F adalah perluasan aljabar berarti setiap elemen didalam F adalah aljabar atas K . Ambil $($ sebarang elemen dalam F , maka $(, (^2, \dots, (^n$ elemen-elemen dalam F dan jika 1 adalah unit dari F maka $1, (, (^2, \dots, (^n$ merupakan elemen-elemen di dalam F berjumlah $(n+1)$.

Karena ruang vektor F berdimensi n , maka setiap himpunan $(n+1)$ elemen atau lebih tak bebas linier, sehingga himpunan $\{1, (, (^2, \dots, (^n\}$ tak bebas linear, jadi terdapat elemen-elemen $(_0, (_1, \dots, (_n$ dari K yang tidak semuanya nol sedemikian sehingga,

$$a_0 \cdot 1 + a_1 \cdot (+ a_2 \cdot (^2 + \dots + a_n \cdot (^n = 0$$

ini menunjukkan bahwa $($ adalah akar dari polinomial tidak nol $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$ dalam $K[x]$, sehingga $($ adalah aljabar atas K . Karena $($ adalah sebarang elemen dalam F , maka F adalah perluasan aljabar.



Himpunan $= \{ ((F / (aljabar atas K \} merupakan subfield dari F , selanjutnya disebut penutup aljabar (algebraic closure) dari K dalam F (Fraleigh J. B, 1994).$

3. LAPANGAN PEMISAH



Definisi 2. Misal K suatu lapangan dengan penutup aljabar (algebraic closure). $\{ f_i(x) / i \in I \}$



koleksi dari polinomial-polinomial dalam $K[x]$. Suatu lapangan F (disebut lapangan pemisah



(splitting field) dari $\{ f_i(x) / i \in I \}$ atas K jika F adalah sub field terkecil dari yang memuat K dan



semua akar dalam dari setiap $f_i(x)$, untuk $i \in I$. Suatu lapangan F (adalah lapangan pemisah



(splitting field) atas K , jika F (adalah lapangan pemisah (splitting field) dari himpunan sebarang dari polinomial-polinomial dalam $K[x]$.

Dean R. A (1996) menyebutkan bahwa semua lapangan K dan semua $f(x) \in K[x]$ sedemikian sehingga $\deg(f) \geq 1$, terdapatlah perluasan F dari K yang merupakan lapangan pemisah untuk $f(x)$ atas K.

Teorema 4. Misal F lapangan pemisah dari polinomial $f(x) \in K[x]$ atas K, jika E lapangan pemisah dari $f(x) \in K[x]$ yang lain maka terdapatlah isomorfisme $(: E \rightarrow F)$

Bukti :

Pandang polinomial jika $f(x) = a_0x^0 + a_1x^1 + \dots + a_nx^n$, $a_i \in K$, $i = 0, 1, \dots, n$.

F lapangan pemisah dari polinomial $f(x)$ atas K maka akar-akar $f(x)$ berada dalam F. Misal $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ akar-akar $f(x) = 0$ maka $f(\alpha_i) = a_0 + a_1\alpha_i + \dots + a_n\alpha_i^n = 0$ begitu juga untuk $\beta \in E$ maka $f(\beta) = a_0 + a_1\beta + \dots + a_n\beta^n = 0$ (karena E lapangan pemisah dari $f(x)$ atas K).

Bentuk pemetaan $(: E \rightarrow F)$ dengan $\alpha_i \mapsto \alpha_i$, maka $\alpha_1, \alpha_2 \in E$ dan $\alpha_1 + \alpha_2 \in E$ maka $\alpha_1 + \alpha_2 = (\alpha_1 + \alpha_2) = ((\alpha_1) + (\alpha_2))$ dan $\alpha_1 \cdot \alpha_2 = (\alpha_1 \cdot \alpha_2) = ((\alpha_1) \cdot (\alpha_2))$ jadi $($ homomorfisma dan jika $\alpha_1 = \alpha_2$ maka $\alpha_1 = \alpha_2$ dan $\alpha_1 = \alpha_2$ maka terdapatlah $($ isomorfisma.

$$\begin{aligned} \text{Dan untuk } f(\alpha) &= (a_0 + a_1\alpha + \dots + a_n\alpha^n) \\ &= a_0((0) + a_1((1) + \dots + a_n((n) \\ &= a_0(0 + a_1(1 + \dots + a_n(n) \end{aligned}$$

Teorema 5. (Raisinghania, M.D, 1980). Lapangan pemisah merupakan perluasan aljabar.

Bukti :

Pandang F lapangan pemisah dari polinomial $f(x)$ atas lapangan K dan $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ adalah akar-akar dari $f(x)$, maka F dapat ditulis $F = K(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ atau

$$\begin{aligned} F_1 &= K(\alpha_1) \\ F_2 &= K_1(\alpha_2) = (K(\alpha_1))(\alpha_2) = K(\alpha_1, \alpha_2) \\ &\vdots \\ &\vdots \\ F_n &= K_{n-1}(\alpha_n) = (K(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}))(\alpha_n) = K(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = F. \end{aligned}$$

Tetapi setiap elemen-elemen $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ merupakan akar-akar polinomial tidak nol $f(x)$ atas lapangan K, jadi $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ merupakan aljabar atas K, maka F merupakan perluasan berhingga dari lapangan K (sebab $[K(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) : K]$ berhingga).

Jadi (menurut Teorema 2) F merupakan perluasan ajabar.

Contoh :

Misal $f(x) = x^4 - x = x^2(x^2 - 1) = x^2(x - 1)(x + 1)$. Ambil $\alpha_1 = x$, $\alpha_2 = x - 1$, $\alpha_3 = x + 1$.

$x^4 - x = x(x - 1)(x^2 + x + 1)$. Ambil $\alpha_4 = x^2 + x + 1$.

Maka $0, 1, -1, \pm i\sqrt{3}$ adalah akar-akar dari $f(x) = x^4 - x$ sehingga $Z_2(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ merupakan lapangan pemisah dari $f(x) = x^4 - x$ atas Z_2 yang merupakan suatu perluasan aljabar.

4. KESIMPULAN

1. Setiap perluasan berhingga merupakan perluasan aljabar.
2. Untuk semua lapangan K dan semua $f(x) \in K[x]$ sedemikian sehingga $\deg(f) \geq 1$, terdapatlah perluasan F dari K yang merupakan lapangan pemisah untuk $f(x)$ atas K.

3. Lapangan pemisah merupakan perluasan aljabar.

DAFTAR PUSTAKA

1. Dean R. A. *Element of Abstract Algebra*, John Wiley & Sons, USA, 1966.
2. Fraleigh, J. B , *A First Course in Abstract Algebra*, Addison – Wesley Publishing Company, USA, 1994.
3. Hungerford, T. W, *Graduete Text in Mathematics Algebra*, Springer Verlag, New York, Heidelberg Berlin, 1984.
4. Raisinghania M. D, Aggarwal R. S, *Modern Algebra*, S Chand & Company Ltd, New Delhi, 1980.