

SIMULASI FILTER KALMAN UNTUK ESTIMASI
SUDUT DENGAN MENGGUNAKAN SENSOR GYROSCOPE

Wahyudi *), Adhi Susanto **), Sasongko Pramono H**), Wahyu Widada ***)

Abstract

The Kalman filter is a recursive solution to the process linear filtering problem that can remove the noise from signal and then the information can be useful. The process that uses Kalman filter must be approximated as two equations of linear system, state equation and output equation. Computation of Kalman filter minimizes the mean of the square error. This paper explores the basic concepts of the Kalman filter algorithm and simulates it to filter data of gyroscope to get a rotation. The measurement noise covariance determines how much information from the sample is used. If measurement noise covariance is high, it shows that the measurement isn't very accurate. The process noise covariance contributes to the overall uncertainty of the estimate as it is added to the error covariance matrix in each time step. If the error covariance matrix is small, the Kalman filter incorporates a lot less of the measurement into the estimate of rotation.

Key words: Kalman filter, linear system, gyroscope

Pendahuluan

Pada tahun 1960, R.E. Kalman mempublikasikan makalahnya yang merupakan solusi *recursive* tentang masalah filter pada proses yang linier, sehingga filter tersebut dikenal dengan nama filter Kalman. Filter Kalman dapat menghilangkan *noise* dari suatu sinyal yang mengandung informasi dan mengambil informasi tersebut untuk diproses lebih lanjut. Suatu proses yang menggunakan filter Kalman untuk memfilter *noise* harus dapat disajikan dalam dua persamaan, yaitu persamaan *state* dan persamaan keluaran. Masing-masing persamaan mempunyai *noise* dan saling bebas, sehingga tidak ada korelasi silang antara kedua *noise*.

Hasil perhitungan optimal yang digunakan untuk mendapatkan nilai estimasi pada Kalman dilakukan dengan meminimalkan rerata kuadrat *error*. Pada simulasi ini diperlihatkan rotasi (sudut) pada 1 derajat kebebasan yang dilakukan dengan memberikan nilai *covariance* dari *noise* pengukuran dan *covariance* dari *noise* proses yang berbeda-beda untuk melihat pengaruh dari masing-masing *noise*. Data sinyal masukan yang diberikan berupa kecepatan sudut yang nilainya konstan.

Filter Kalman

Filter Kalman digunakan untuk menyelesaikan permasalahan estimasi *state* pada suatu proses yang dapat dinyatakan dalam persamaan diferensial linear seperti pada persamaan 1.^[5]

$$x_{k+1} = f(x_k, u_k, w_k)$$

$$x_{k+1} = A_k x_k + B_k u_k + w_k \dots \dots \dots (1)$$

Noise pada proses diasumsikan sebagai proses random berdistribusi normal seperti pada persamaan 2.

*) Staf Pengajar Jurusan Teknik Elektro FT Undip
**) Staf Pengajar Jurusan Teknik Elektro FT UGM
***) Staf Peneliti LAPAN Rumpin Bogor

$$E(w) = 0 \text{ dan } E(w_i w_k^T) = Q_k \text{ untuk } i = k. \dots \dots \dots (2)$$

Nilai matrik Q_k dapat dihitung dengan menggunakan persamaan 3^[1,4]

$$Q_k = S_w = E(w_k w_k^T)$$

$$Q_k = E \left\{ \left[\int_x^{x+1} A(k+1, \xi) G(\xi) u(\xi) d\xi \right] \left[\int_x^{x+1} A(k+1, \eta) G(\eta) u(\eta) d\eta \right]^T \right\} \dots \dots \dots (3)$$

Dengan G_k merupakan fungsi alih yang menghubungkan antara sinyal masukan w dengan keluaran *state* x . Dari persamaan 1 terlihat bahwa *state* x belum bisa diobservasi, sehingga untuk melakukan observasi diperlukan model pengukuran yang memetakan *state* ke keluaran y yang dapat diobservasi seperti pada persamaan 4.

$$y_k = h(x_k, v_k)$$

$$y_k = H_k x_k + v_k \dots \dots \dots (4)$$

Noise pada pengukuran diasumsikan sebagai proses random berdistribusi normal seperti pada persamaan 5.

$$E(v) = 0 \text{ dan } E(v_i v_k^T) = R_k \text{ untuk } i = k. \dots \dots \dots (5)$$

Diasumsikan pula bahwa proses random w dan v adalah saling bebas, sehingga nilai *crosscorrelation* adalah nol.

$$E(w_i v_k^T) = 0 \text{ untuk semua } i \text{ dan } k. \dots \dots \dots (6)$$

Nilai estimasi *state* \hat{x}_k pada filter Kalman ditentukan dari estimasi *posteriori* \hat{x}_k serta selisih antara pengukuran sebenarnya y_k dan estimasi pengukuran

$H\hat{x}_k^-$ seperti pada persamaan 7.

$$\hat{x}_k = \hat{x}_k^- + K_k (y_k - H\hat{x}_k^-) \dots \dots \dots (7)$$

$$\hat{x}_k = \hat{x}_k^- + K_k (H_k x_k + v_k - H\hat{x}_k^-)$$

Selisih nilai antara pengukuran sebenarnya y_k dan estimasi pengukuran $H\hat{x}_k^-$ disebut sebagai *residual* atau pengukuran *innovation*. Jika nilai *residual* adalah nol, maka hal itu menunjukkan bahwa hasil estimasi sama dengan hasil pengukuran. Nilai K_k adalah faktor *gain* pada filter Kalman.

Pada filter Kalman dipilih nilai K_k sehingga estimasi *posteriori* adalah optimal atau mempunyai *error* yang minimum. Nilai P_k minimum diperoleh jika nilai K_k dapat menyediakan estimasi yang mempunyai *covariance* minimum. Penyelesaian untuk mendapatkan P_k minimum adalah apabila nilai K_k sebagai berikut.

$$K_k = P_k^- H_k^T (H_k P_k^- H_k^T + R_k)^{-1} \dots\dots\dots(8)$$

Nilai P_k minimum adalah sebagai berikut

$$P_k = (I - K_k H_k) P_k^- \dots\dots\dots(9)$$

Karena tidak ada nilai korolasinya dengan *noise* yang lain $w_{1 \neq k}$, maka nilai estimasi *priori* diberikan pada persamaan 10 yang diperoleh dengan menghilangkan *noise* w_k dari persamaan 1,

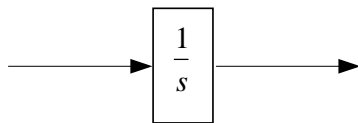
$$\hat{x}_{k+1}^- = A_k \hat{x}_k + B_k u_k \dots\dots\dots(10)$$

Nilai *covariance* dari *error*

$$P_{k+1}^- = A_k P_k A_k^T + Q_k \dots\dots\dots(11)$$

Perancangan

Keluaran sensor gyroscope adalah berupa tegangan yang menyatakan besaran kecepatan sudut. Besar sudut dari keluaran sensor dapat dihitung dengan cara mengintegalkan, sehingga hubungan antara sinyal kecepatan sudut dan keluaran sudut diperlihatkan pada Gambar 1.



Gambar 1. Hubungan antara sinyal kecepatan sudut dan sudut.

Sinyal masukan (u) adalah kecepatan sudut dan keluaran (θ) adalah sudut. Sinyal kecepatan sudut disampling dengan periode sampling T . Hubungan antara kecepatan sudut dan sudut dalam transformasi Laplace diperlihatkan pada persamaan 12.

$$\theta(s) = \frac{u(s)}{s} \dots\dots\dots(12)$$

$$s\theta(s) = u(s) \dots\dots\dots(13)$$

Persamaan 13 diubah kembali ke kawasan waktu, sehingga menjadi :

$$\frac{d\theta(t)}{dt} = u(t) \dots\dots\dots(14)$$

Persamaan 14 diubah ke dalam bentuk diskrit, sehingga menjadi:

$$\frac{\theta_{k+1} - \theta_k}{T} = u_k$$

$$\theta_{k+1} - \theta_k = T u_k$$

$$\theta_{k+1} = \theta_k + T u_k \dots\dots\dots(15)$$

Noise pada sinyal kecepatan sudut (w_k) adalah *random* variabel, maka persamaan 15 dapat dituliskan sebagai berikut

$$\theta_{k+1} = \theta_k + T u_k + w_k$$

Didefinisikan vektor *state* x berupa sudut

$$x_k = \theta_k$$

Dari persamaan 1 dan persamaan 4 dapat dituliskan suatu persamaan proses linier untuk *state* dan pengukuran keluaran adalah

$$x_{k+1} = x_k + T u_k + w_k \dots\dots\dots(16)$$

$$y_k = x_k + v_k \dots\dots\dots(17)$$

Covariance dari *noise* proses dapat dihitung dengan menggunakan persamaan 3 dan dengan memperhatikan pada Gambar 1, dengan *state* $x = \theta$ dan $y = x$. Jika $G(s)$ adalah fungsi yang menghubungkan

kan u dan x , maka nilai $G(s) = \frac{1}{s}$ atau $g(t) = 1$.

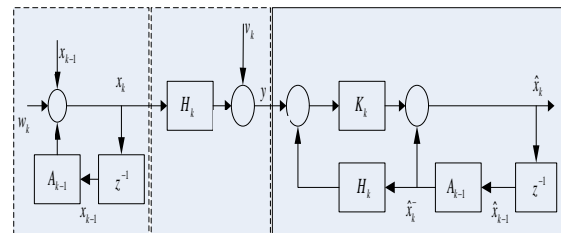
$$Q_k = E(x_1 x_1) \dots\dots\dots(18)$$

$$E(x_1 x_1) = E \left[\int_0^T g(\xi) w(\xi) d\xi \int_0^T g(\eta) w(\eta) d\eta \right]$$

$$E(x_1 x_1) = \sigma_w^2 \int_0^T 1 \cdot d\xi \int_0^T 1 \cdot d\eta$$

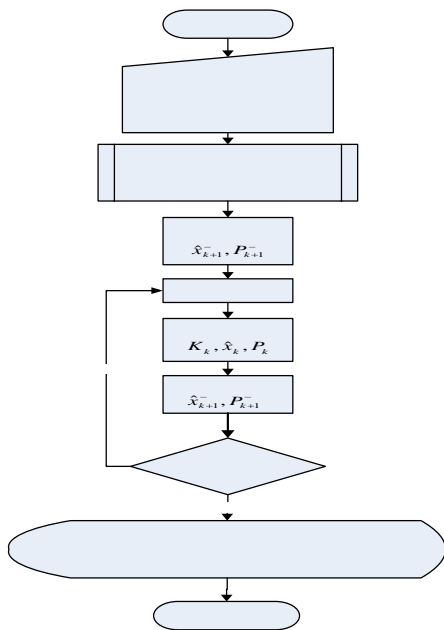
$$E(x_1 x_1) = \sigma_w^2 T^2$$

Diagram blok hubungan antara proses, pengukuran, dan filter Kalman yang diperlihatkan pada Gambar 2 disusun berdasarkan persamaan 1, persamaan 4, persamaan 7, persamaan 8, persamaan 9, persamaan 10, dan persamaan 11.^[3,5]



Gambar 2. Hubungan antara proses, pengukuran, dan filter Kalman.

Berdasarkan hubungan antara proses, pengukuran, dan filter Kalman pada Gambar 2, maka dapat dibuat diagram alir program simulasi seperti pada Gambar 3.



Gambar 3 Diagram alir program simulasi.

Pada awal program dijalankan, ada empat parameter yang harus dimasukkan yaitu durasi tampilan perhitungan, waktu sampling, standar deviasi dari *noise* proses, dan standar deviasi dari *noise* pengukuran. Inisialisasi *state* awal diberi nilai nol dan kecepatan sudut dibuat tetap yaitu 1 radian/detik. *Covariance* dari *error* pengukuran dan *covariance* dari *noise* proses dapat dituliskan sebagai berikut

$R_k = \text{devNoisePeng}^2;$
 $Q_k = \text{devNoiseProses}^2 * [dt^2];$
 Inisialisasi awal untuk estimasi *state* dan matrik *covariace* adalah sebagai berikut.

$\hat{x} = x;$
 $P = Q_k;$
 Nilai matrik A, matrik B, dan matrik H adalah.

$A = 1 \quad B = T \quad H = 1$
 Ketiga matrik tersebut dapat dituliskan sebagai berikut

$a = [1];$
 $b = [dt];$
 $h = [1];$
 Perhitungan nilai *state*, keluaran proses, estimasi *state*, *gain* Kalman, dan matrik *covariance* P adalah sebagai berikut.

$\text{NoiseProses} = \text{devNoiseProses} * [dt * \text{randn}];$
 $x = a * x + b * u + \text{NoiseProses};$
 $\text{NoisePeng} = \text{devNoisePeng} * \text{randn};$
 $y = h * x + \text{NoisePeng};$
 $\hat{x} = \hat{x} + K * \text{Inn};$
 $K = P * h' * \text{inv}(s);$
 $P = P - K * h * P;$

Dengan nilai Inn dan s sebagai berikut
 $\text{Inn} = y - h * \hat{x};$
 $s = h * P * h' + R_k;$

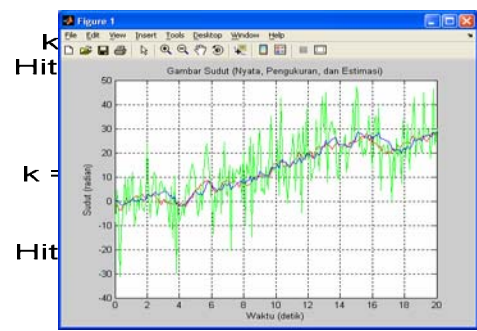
Perhitungan *a priori* adalah sebagai berikut.

$$\hat{x} = a * \hat{x} + b * u;$$

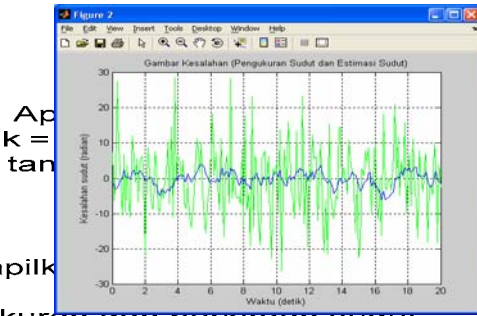
$$P = a * P * a' + Q_k;$$

Hasil dan Analisis

Hasil pengujian terhadap program yang telah dibuat diperlihatkan pada Gambar 4 sampai dengan Gambar 7. Hasil pengujian dilakukan dengan durasi 20 detik dan waktu sampling 0,1 detik, hal ini dilakukan agar gambar hasil pengujian lebih mudah diamati. Pada semua pengujian dilakukan dengan sinyal masukan yang sama, yaitu 1 radian/detik. Pengujian dilakukan untuk melihat pengaruh *noise* proses dan *noise* pengukuran terhadap hasil pengukuran dan hasil estimasi sudut, sehingga untuk melihat hal tersebut dilakukan dengan memberikan nilai standar deviasi dari *noise* proses dan nilai standar deviasi *noise* pengukuran yang berbeda-beda. Pada Gambar 4 diperlihatkan hasil pengujian dengan nilai standar deviasi *noise* proses dan nilai standar deviasi *noise* pengukuran masing-masing 10 radian/detik dan 10 radian. Pada Gambar 5 diperlihatkan hasil pengujian dengan nilai standar deviasi *noise* proses dan nilai standar deviasi *noise* pengukuran masing-masing 10 radian dan 10 radian.

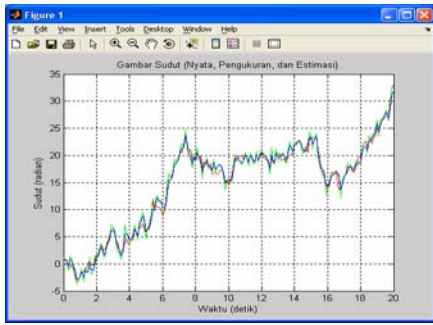


a. Sudut (nyata, pengukuran, dan estimasi).
 Hitung :

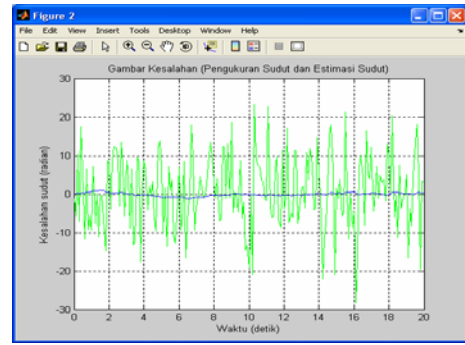


c. Error pengukuran dan estimasi sudut.
 d.

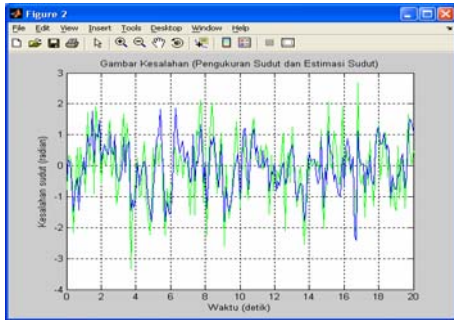
Gambar 4 Hasil simulasi untuk standar deviasi *noise* proses 10 radian/detik dan standar deviasi *noise* pengukuran 10 radian.



a. Sudut (nyata, pengukuran, dan estimasi).



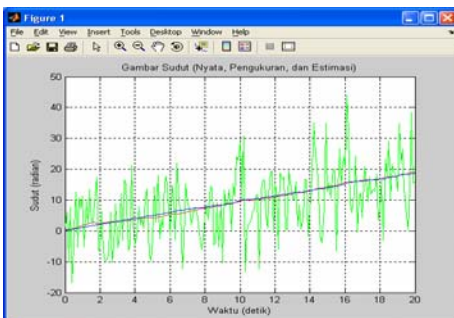
b. Error pengukuran dan estimasi sudut.



b. Error pengukuran dan estimasi sudut.

Gambar 5 Hasil simulasi untuk standar deviasi *noise* proses 10 radian/det dan standar deviasi *noise* pengukuran 1 radian.

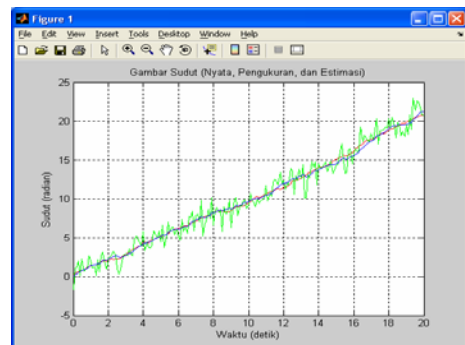
Pada saat diberi nilai standar deviasi *noise* proses 10 radian/det dan nilai standar deviasi *noise* pengukuran 10 radian (Gambar 4), maka terlihat bahwa nilai *error* pengukuran maksimal sampai 28 radian dan *error* estimasi maksimal sampai 6 radian. Pada standar deviasi *noise* proses yang sama sedangkan nilai *noise* pengukuran 1 radian (Gambar 5), maka *error* pengukuran maksimal hanya 3,2 radian dan *error* perkiraan maksimal hanya 2,3 radian. Hal ini dapat dikatakan bahwa jika semakin kecil *noise* pengukuran, maka *error* pengukuran dan *error* estimasi akan lebih kecil. *Noise* pengukuran yang kecil menyebabkan hasil pengukuran dan hasil estimasi mendekati dengan nilai sebenarnya. Dengan kata lain dapat dikatakan bahwa suatu sistem yang baik akan mempunyai *noise* pengukuran yang kecil, karena hasil pengukuran akan mendekati dengan nilai sebenarnya. Demikian juga dapat dikatakan bahwa hasil estimasi dengan menggunakan filter Kalman akan lebih baik jika instrumentasi tersebut mempunyai *noise* pengukuran yang kecil.



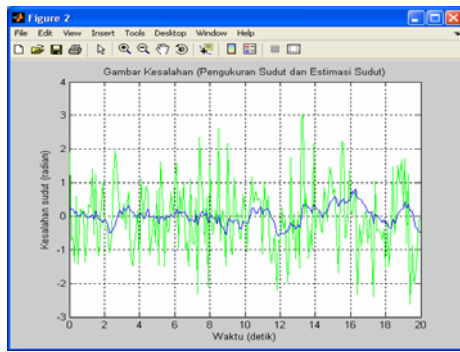
a. Sudut (nyata, pengukuran, dan estimasi).

Gambar 6 Hasil simulasi untuk standar deviasi *noise* proses 1 radian/det dan standar deviasi *noise* pengukuran 10 radian.

Pada Gambar 6 diperlihatkan hasil pengujian dengan nilai standar deviasi *noise* proses dan nilai standar deviasi *noise* pengukuran masing-masing 1 radian/det dan 10 radian. Pada Gambar 7 diperlihatkan hasil pengujian dengan nilai standar deviasi *noise* proses dan nilai standar deviasi *noise* pengukuran masing-masing 1 radian/det dan 1 radian. Pada saat diberi nilai standar deviasi *noise* proses 1 radian/det dan nilai standar deviasi *noise* pengukuran 10 radian (Gambar 6), maka terlihat bahwa nilai *error* pengukuran maksimal sampai 23 radian dan *error* estimasi maksimal sampai 2 radian. Pada standar deviasi *noise* proses yang sama sedangkan nilai standar deviasi *noise* pengukuran 1 radian (Gambar 7), maka *error* pengukuran maksimal hanya 3 radian dan *error* perkiraan maksimal hanya 0,8 radian. Hal ini dapat dikatakan bahwa jika semakin kecil *noise* pengukuran, maka *error* pengukuran dan *error* estimasi akan lebih kecil. *Noise* pengukuran yang kecil menyebabkan hasil pengukuran dan hasil estimasi mendekati dengan nilai sebenarnya. Dengan kata lain dapat dikatakan bahwa suatu instrumentasi yang baik akan mempunyai *noise* pengukuran yang kecil, karena hasil pengukuran akan mendekati dengan nilai sebenarnya. Demikian juga dapat dikatakan bahwa hasil estimasi dengan menggunakan filter Kalman akan lebih baik jika instrumentasi tersebut mempunyai *noise* pengukuran yang kecil.



a. Sudut (nyata, pengukuran, dan estimasi).



b. Error pengukuran dan estimasi sudut.

Gambar 7 Hasil simulasi untuk standar deviasi *noise* proses 1 radian/detik dan standar deviasi *noise* pengukuran 1 radian.

Kesimpulan

Dari hasil simulasi dengan berbagai perubahan standar deviasi *noise* pengukuran dan standar deviasi *noise* proses dapat disimpulkan sebagai berikut.

1. Penggunaan filter Kalman pada simulasi masukan gyroscope dapat mereduksi *noise* yang ada pada sinyal masukan dan *noise* yang ada pada pengukuran, sehingga hasil estimasinya mendekati dengan nilai nyata. *Error* pada estimasi sudut sangat kecil.
2. Nilai standar deviasi dari *noise* proses tidak banyak berpengaruh terhadap hasil pengukuran dan hasil estimasi sudut, sedangkan nilai standar deviasi dari *noise* pengukuran sangat berpengaruh terhadap hasil pengukuran dan hasil estimasi.
3. Hasil simulasi dengan deviasi standar dari *noise* pengukuran besar memperlihatkan hasil pengukuran dan hasil estimasi menjauhi dari nilai nyata dan jika deviasi standar dari *noise* pengukuran kecil, maka hasil pengukuran dan hasil estimasi akan mendekati dengan nilai sebenarnya.
4. Suatu sistem yang baik akan mempunyai *noise* pengukuran yang kecil, karena hasil pengukuran akan mendekati dengan nilai sebenarnya dan akan memberikan hasil estimasi yang lebih baik jika menggunakan filter Kalman.

Daftar Pustaka

1. Brown, Robert Grover, 1997, "Introduction to Random Signals and Applied Kalman filtering", John Willey & Son, third edition, Canada.
2. Fresston, Leonie, 2002, "Application of Kalman Filter Algorithm to Robot Localisation and World Modeling", Electrical Engineering Final Year Project, University of Newcastle, NSW, Australia.
3. Grewal, Mohinder S and Angus P. Andrews, 2001, "Kalman Filtering", John Willey & Son, third edition, Canada.
4. Kalman, RE, 1960, "A new approach to linear filtering and prediction problem", Transactions of the ASME -Journal of basic engineering, series D, 82, 34-45.
5. Simon, Dan, 2001, "Kalman Filtering", academic.csuohio.edu. Welch, Greg and Gary Bishop, 2006, "An Introduction to The Kalman Filter", www.cs.unc.edu/~welch, Department of Computer Science University of North Carolina at Chapel Hill

