Problem Invers dan Estimasi Kesalahan untuk Dua Soliton dari Persamaan Kadomtsev-Petviashvili

*Sutimin**) *E. Soewono***)

*) Jurusan Matematika FMIPA Universitas Diponegoro
Kampus Tembalang Semarang

**) Departemen Matematika
Pusat Penelitian, Pengembangan dan Penerapan Matematika (P4M)
Institut Teknologi Bandung
Jalan Ganesha 10, Bandung 40132

Abstract

Inverse problems related to reconstruction of wave interaction pattern of two-soliton type from given measurement data are being discussed here. The surface wave model is given by Kadomtsev-Petviashvili (KP) equation and the exact two-soliton solutions can be obtained by Hirota's method. The problem is to find the parameters for the two soliton representing the waves from the experiment. Error analysis is done by estimating the absolute error of amplitudes of individual soliton using two waves measured at two different positions with respect to a given error in measurement data. It is shown that the estimate of the amplitude error is significantly smaller than using only one measurement data.

1 Pendahuluan

Di sini dikaji permasalahan yang terkait dengan rekonstruksi gelombang berdasarkan data hasil pengukuran dari gambar gelombang jenis dua soliton yang diberikan. Lebih khususnya jika diberikan foto interaksi gelombang bertipe dua-soliton (lihat gambar 1), bagaimana mendapatkan kembali bentuk gelombang tersebut secara analitis. Jika bentuk gelombang telah diperoleh, selanjutnya dianalisis seberapa besar tingkat kesalahan parameter amplitudonya, dengan asumsi tingkat kesalahan data pengukuran adalah kecil.

Kajian awal dari permasalahan ini telah dilakukan oleh Peterson P. dan van Groesen E.(lihat [9], [10]), yang menjelaskan mengenai rekonstruksi gelombang secara analitik berdasarkan data pengukuran satu gelombang dua soliton (dalam hal ini sudut interkasi dan pergeseran fase). Jamaluddin dkk. (lihat [1])telah menganalisis tipe dua soliton KP melalui pengamatan di laboratorium hidrodinamika (LHI).

Permasalahan ini pada awalnya dimotivasi dari hasil foto yang berbentuk interaksi dua gelombang pada permukaan air laut dangkal yang diambil di pantai Oregon oleh Toedtemeier(lihat[7]). Hammack J. dkk.(lihat [5]) juga telah melakukan eksperimen dalam skala laboratorium untuk memverifikasi adanya pola gelombang interaksi yang bertipe dua soliton KP.

Persamaan KP dipilih sebagai model dasar yang merepresentasikan gelombang panjang dua dimensi. Lebih detail tentang model KP dapat dilihat pada [6] dan [16]. Model KP adalah generalisasi dari model Korteweg-de Vries (KdV)yang merepresentasikan gelombang merambat satu arah. Solusi analitik dari persamaan KP dapat diselesaikan dengan metode Hirota [16]. Beberapa aspek yang dikaji dari interaksi dua soliton adalah amplitudo, kecepatan individu soliton dan karakteristik interaksi.

Sebagai rujukan solusi analitik dua soliton dari persamaan KP dapat dilihat pada [10]dan [3]. Pada dasarnya solusi dua soliton dapat didekomposisi menjadi superposisi dua buah individu soliton yang saling terdistorsi pada saat mendekati puncak interaksi.

Diasumsikan persamaan KP sebagai model yang akurat untuk masalah interaksi dua gelombang air dangkal. Pertanyaan yang relevan dengan eksperimen di laboratorium hidrodinamika adalah bagaimana merekonstruksi secara analitik solusi dua soliton tersebut berdasarkan parameter-parameter pengukuran, dalam hal ini adalah parameter posisi puncak dan sudut interaksi di antara dua gelombang, dengan memperhatikan bahwa masing-masing parameter pengukuran membawa kesalahan pengukuran dengan tingkat kesalahan yang ditentukan. Estimasi kesalahan dari solusi dianalisis untuk mengetahui tingkat signifikansi tinggi gelombang yang diakibatkan oleh kesalahan pengukuran parameter gelombang (posisi dan sudut interaksi) tersebut.

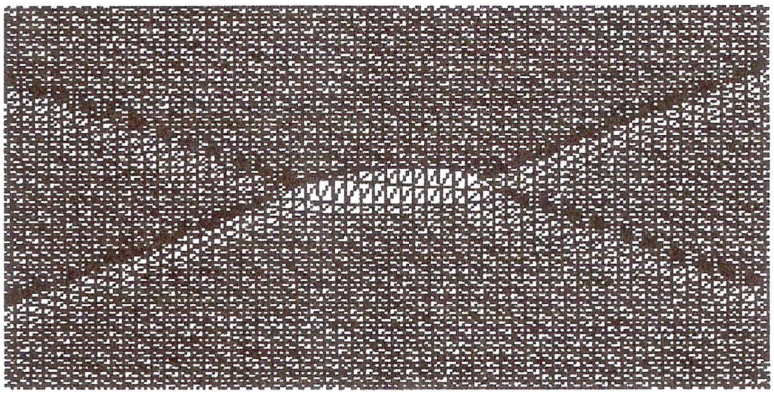
Penulisan paper ini dimulai dengan memformulasikan masalah invers dijelaskan pada seksi 2 dan selanjutnya solusi dari persamaan KP dijelaskan pada seksi 3. Seksi 4 menjelaskan masalah invers dan estimasi kesalahan absolut amplitudo individu soliton KP secara detail dijelaskan pada seksi 5.

2 Masalah rekonstruksi gelombang dari data pengukuran

Di sini kita perhatikan suatu hasil pemotretan interaksi dua gelombang yang diambil di laboratorium hidrodinamika atau dari atas permukaan laut di perairan dangkal. Diasumsikan bahwa hasil dari foto tersebut merepresentasikan gelombang dua soliton. Masalah yang dihadapi dalam praktek adalah bagaimana memilih parameter-parameter pengukuran (mengingat masing-masing pengukuran membawa kesalahan) untuk mendapatkan estimasi gelombang (analitis) yang sedekat mungkin dengan gelombang yang dihasilkan dari foto tersebut.

Pada penelitian ini parameter pengukuran yang dipilih adalah posisi puncak dan sudut interaksi. Jika pengambilan foto dilakukan dua kali(pada waktu yang berbeda), maka diperoleh dua data pengukuran dari interaksi individu gelombang untuk posisi yang berbeda. Dalam hal ini dipilih tiga parameter pengukuran (dua posisi dan satu sudut interaksi) yang bebas. Berdasarkan data pengukuran ini, parameter tinggi gelombang individu dapat direkonstruksi secara analitik.

Keakuratan pengukuran dari parameter pengukuran ini akan berpengaruh pada keakuratan estimasi parameter tinggi gelombang individu. Sedangkan parameter pengukuran ini memberikan tingkat sensitivitas yang berbeda dalam mengestimasi keakuratan parameter tinggi gelombang. Oleh karena itu faktor kesalahan pengukuran parameter harus dilakukan sekecil mungkin. Kesalahan pengukuran parameter ini akan memberikan kontribusi pada kesalahan parameter tinggi gelombang individu. Analisis kesalahan dilakukan untuk menjelaskan tingkat keakuratan kesalahan pengukuran parameter terhadap keakuratan dalam estimasi parameter tinggi gelombang individu. Pada seksi berikut ini dikaji secara analitik solusi dari persamaan



Gambar 1: Interaksi dua soliton

KP dengan menggunakan metode Hirota dan selanjutnya menentukan relasi dispersi untuk solusi dua soliton.

3 Solusi Dua Soliton dari Persamaan KP

Persamaan KP adalah model gelombang permukaan 2D yang dinyatakan oleh

$$(u_t + uu_x + u_{xxx})_x + 3u_{yy} = 0 \tag{1}$$

dimana $u = u(x, y, t)$ adalah fungsi yang merepresentasikan permukaan gelombang. Persamaan ini merupakan generalisasi dua dimensi dari persamaan KdV.

Solusi dua soliton dari persamaan KP ini dapat diperoleh dengan metode Hirota, melalui transformasi variabel bergantung

$$u = 2(lnf)_{xx}. \tag{2}$$

Dengan mensubstitusi persamaan (2)ke persamaan (1), diperoleh

$$f(f_t + f_{xxx})_x - f_x(f_t + f_{xxx}) - 3(f_x f_{xxx} - f_{xx}^2) + 3(ff_{yy} - f_y^2) = 0. \tag{3}$$

Solusi untuk f dari persamaan(3) yang merepesentasikan dua soliton (dapat dilihat pada [3]) dinyatakan oleh,

$$f = 1 + e^{2\phi_1} + e^{2\phi_2} + Ae^{2\phi_1 + 2\phi_2}. \tag{4}$$

di mana

$$A = \frac{4(\mu_1 - \mu_2)^2 - (\rho_1 - \rho_2)^2}{4(\mu_1 + \mu_2)^2 - (\rho_1 - \rho_2)^2}. \tag{5}$$

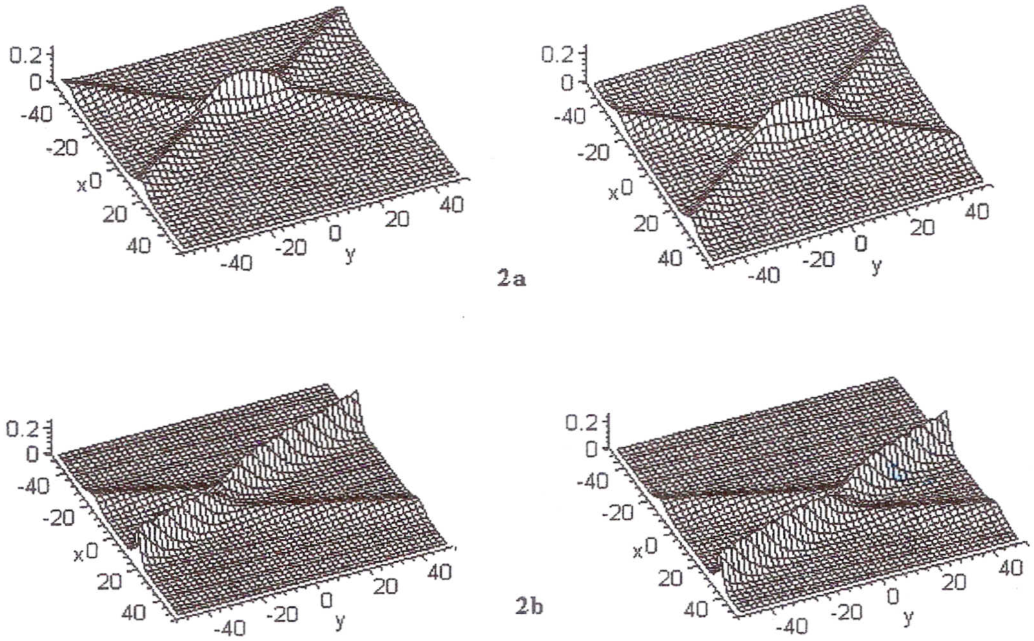
Solusi dua soliton dari persamaan KP tersebut bergantung pada parameter waktu dan merepresentasikan profil interaksi dua soliton. Solusi dua soliton KP dinyatakan oleh persamaan (2) di mana f dinyatakan oleh persamaan (4). Solusi $u(x, y, t)$ ini dapat ditulis sebagai fungsi dari dua variabel fase yang dinyatakan oleh(lihat pada [3]),

$$u(x, y, t) = u(x + \rho_1 y - c_1 t, x + \rho_2 y - c_2 t) \tag{6}$$

Solusi pada persamaan (6) dapat dipandang sebagai interaksi dua soliton KP, di mana ρ_i, c_i, $i = 1, 2$ masing - masing menyatakan sudut-sudut interaksi terhadap sumbu-Y dan kecepatan perambatan individu soliton. Sudut-sudut interaksi ini dapat dibuat simetris terhadap sumbu-Y melalui transformasi sistem koordinat (lihat [3]).

Jika sudut-sudut interaksi ini dipandang simetris maka berlaku $\rho_1 = -\rho_2$. Tanpa mengurangi keumuman diasumsikan $\rho_1 = \rho > 0$. Oleh karena itu jika α adalah sudut interaksi diantara puncak individu soliton (wave crests), maka berlaku $\alpha = tan^{-1}(\rho_1) + tan^{-1}(\rho_2)$, atau $\rho = \tan \frac{1}{2}\alpha$.

Gambar 2.a dab 2.b adalah profil interaksi dua soliton KP pada posisi yang berbeda, masing-masing untuk kasus $A > 1$ dan untuk kasus $0 < A < 1$.



Gambar 2: Dua soliton KP dalam posisi berbeda untuk kasus $A > 1$ (2.a) dan $0 < A < 1$ (2.b)

Masalah rekonstruksi interaksi dua gelombang yang didasarkan pada pengukuran posisi gambar dan sudut interaksi yang diberikan, akan dibahas secara analitik pada seksi berikut ini.

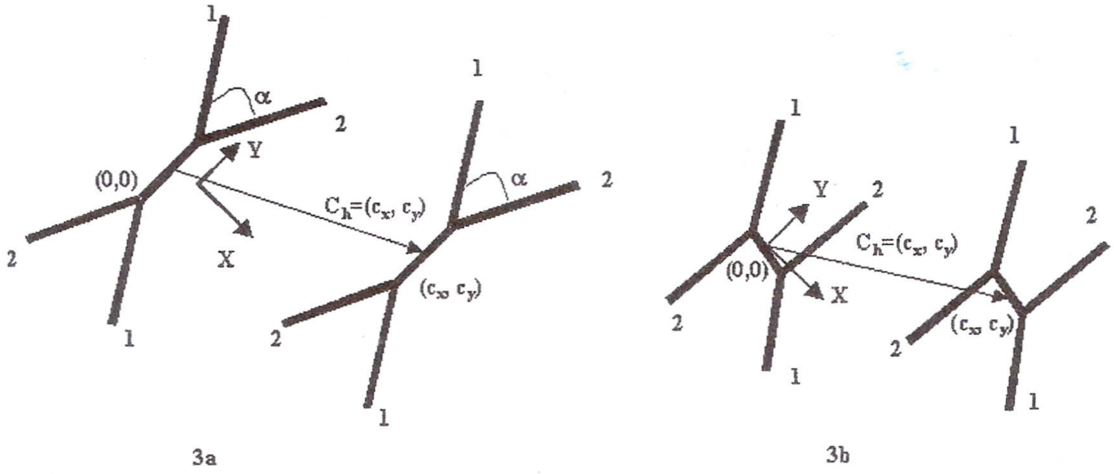
4 Problem Invers

Bagian ini menyelesaikan problem invers dengan mengambarkan terlebih dahulu garis puncak interaksi dua soliton KP secara geometri. Selanjutnya melalui koordinat bergerak dari garis puncak tersebut akan ditentukan besaran dari posisi interaksi gelombang dalam bidang XY. Problem ini juga menentukan parameter tinggi gelombang (a_1, a_2, μ_1 dan μ_2) dari solusi dua soliton KP dengan memperhatikan dua posisi dan sudut interaksi dua individu soliton.

4.1 Representasi Geometri Interaksi Dua Soliton

Interaksi dua soliton dari persamaan KP pada posisi yang berbeda secara geometri akan disajikan pada subbagian ini. Interaksi dua soliton ini dapat digambarkan geometris melalui garis puncaknya (crest lines).

Untuk menganalisis masalah invers diasumsikan bahwa sudut interaksi dua soliton adalah simetris. Misalkan $\mathbf{C_h} = (c_x, c_y)$ adalah posisi yang kedua dari interaksi dua soliton, sedangkan posisi yang pertama ditentukan pada titik $(0,0)$, hal ini tampak pada gambar 3. Gambar 3.a merepresentasikan posisi pertama dan kedua garis puncak interaksi dua soliton KP,untuk kasus $A > 1$. Sedangkan gambar 3.b untuk kasus $0 < A < 1$.



Gambar 3: Representasi geometri puncak interaksi dua soliton KP.

Gambaran secara geometri interaksi puncak dua soliton KP pada dua dimensi dapat dijelaskan sebagai berikut:

i. Titik (0,0) adalah titik pusat garis puncak interaksi dua soliton untuk posisi yang pertama.

ii. Sumbu-Y diambil ditengah antara garis puncak individu soliton (wave crests) yang membagi sama sudut interaksi dua soliton.

iii. $\mathbf{C_h}$ adalah posisi yang kedua garis puncak interaksi dua soliton yang sesuai dengan titik (0,0).

iv. α adalah sudut interaksi garis puncak antara dua individu soliton.

Dengan mengamati parameter pengukuran $\mathbf{C_h} = (c_x, c_y)$ dan α, maka terdapat tiga parameter yang berkaitan dengan solusi dua soliton KP (dalam hal ini parameter μ_1, μ_2, ρ_1 dan ρ_2 yang belum diketahui). Dari gambaran secara geometri tersebut, dapat analisis hubungan antara parameter yang diukur (dalam hal ini c_x, c_y dan α) dengan parameter (μ_1, μ_2, ρ_1 dan ρ_2) yang akan ditentukan.

Selanjutnya menyelesaikan problem invers untuk mendapatkan solusi dua soliton KP yang berkaitan dengan parameter amplitudo (yaitu μ_i, $i = 1, 2$).

1. **Relasi untuk sudut interaksi.**

Jika α menyatakan sudut antara dua garis puncak gelombang dan $\mathbf{k_i}$, $i = 1, 2$ menyatakan vektor-vektor gelombang di mana $\mathbf{k_i}=(\mu_i, \mu_i\rho_i)$, $i = 1, 2$, maka dengan menentukan $\rho_1 = -\rho_2$ diperoleh hubungan,

$$\rho = \tan\frac{1}{2}\alpha \tag{7}$$

2. **Relasi untuk posisi.**

Perhatikan bahwa c_x dan c_y masing-masing menyatakan komponen posisi $\mathbf{C_h}$ dalam arah X dan Y. Posisi $\mathbf{C_h}$ ditentukan berdasarkan translasi koordinat bergerak dari dua soliton KP. Maka terdapat hubungan

$$c_x = \frac{\rho_1 c_2 - \rho_2 c_1}{\rho_1 - \rho_2} \tag{8}$$

$$c_y = \frac{c_1 - c_2}{\rho_1 - \rho_2} \tag{9}$$

dimana

$$c_i = 4\mu_i^2 + 3\rho_i^2, \ i = 1, 2. \tag{10}$$

Dari persamaan (10) kita mempunyai

$$c_x = \frac{\rho_1(4\mu_2^2 + 3\rho_2^2) - \rho_2(4\mu_1^2 + 3\rho_1^2)}{\rho_1 - \rho_2} \tag{11}$$

$$c_y = \frac{4\mu_1^2 + 3\rho_1^2 - 4\mu_2^2 - 3\rho_2^2}{\rho_1 - \rho_2}. \tag{12}$$

Tanpa mengurangi keumuman diasumsikan $\rho_1 = \rho > 0$, maka persamaan (11) dan (12) ditulis menjadi

$$c_x = 2\mu_1^2 + 2\mu_2^2 + 3\rho^2 > 0 \tag{13}$$

$$c_y = \frac{2\mu_1^2 - 2\mu_2^2}{\rho} > 0 \tag{14}$$

Solusi eksak untuk $\mu_i,\ i=1,\ 2$ dinyatakan oleh

$$\begin{aligned} 4\mu_1^2 &= c_x + c_y\rho - 3\rho^2 > 0 & (15)\\ 4\mu_2^2 &= c_x - c_y\rho + 3\rho^2 > 0 & (16)\end{aligned}$$

Jika amplitudo soliton ke-i adalah $a_i = \frac{1}{2}\mu_i^2,\ i = 1,2$ (lihat [8]) maka

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{1}{8}(c_x + c_y\rho - 3\rho^2) & (17)\\ a_2 &= \frac{1}{8}(c_x - c_y\rho + 3\rho^2) & (18)\end{aligned}$$

Persamaan(17) dan (18) menyatakan bahwa besarnya amplitudo soliton ke-i, $i = 1,2$ bergantung pada parameter c_x, c_y dan ρ. Dengan demikian dapat menerka bahwa keakuratan pengukuran parameter (posisi dan sudut interaksi)dapat mempengaruhi tingkat ketepatan mengestimasi amplitudo soliton. Estimasi kesalahan absolut amplitudo soliton KP secara detail dijelaskan pada bagian berikut.

5 Estimasi Kesalahan.

Pada seksi ini dianalisis estimasi kesalahan absolut amplitudo individu soliton KP, berdasarkan data pengukuran $\bar{c_x}$, $\bar{c_y}$ dan $\bar{\rho}$ yang berkorespondensi dengan data dari Peterson dan mengambil tingkat kesalahan pengukuran sebesar 5%. Estimasi kesalahan ini dibatasi pada daerah $\mu_1 + \mu_2 \leq \rho$ dan $\mu_1 - \mu_2 \geq \rho$, di mana $0 \leq \rho \leq 1$ yaitu daerah yang berlaku untuk pergeseran fase negatif dan positif.

Dalam hal ini cukup dianalisis estimasi kesalahan absolut untuk amplitudo individu soliton (yaitu Δ_{a_1} dan Δ_{a_2}). Misalkan $\Delta_r c_x$, $\Delta_r c_y$ dan $\Delta_r \rho$ masing-masing adalah kesalahan relatif terhadap paramater pengukuran c_x, c_y dan ρ.Sedangkan Δ_{a_1} adalah kesalahan absolut amplitudo dari soliton individu pertama. Jika $\bar{c_x}$, $\bar{c_y}$ dan $\bar{\rho}$ masing-masing adalah hasil pengukuran yang berkenaan dengan parameter pengukuran c_x, c_y dan ρ. Maka diperoleh hubungan

$$\bar{c_x} = c_x(1 + \Delta_r c_x), \quad \bar{c_y} = c_y(1 + \Delta_r c_y), \quad \bar{\rho} = \rho(1 + \Delta_r \rho). \tag{19}$$

Jika kesalahan relatif pengukuran sebesar $k = 5\%$ disubstitusikan ke solusi dua soliton KP (pada persamaan (17)) maka diperoleh kesalahan absolut amplitudo (Δ_{a_1}) berikut,

$$\Delta_{a_1} = \frac{-1}{8}k(-c_y\rho k + 3\rho^2 k + 6\rho^2 - c_x - 2c_y\rho). \tag{20}$$

Selanjutnya diamati harga ektrim Δ_{a_1} masing-masing pada daerah $0 \leq \mu_1 + \mu_2 \leq \rho$ dan $\mu_1 - \mu_2 \geq \rho$, dimana $0 \leq \rho \leq 1$. Dengan mensubstitusi parameter c_x, c_y ke persamaan (11) dan (12) ke persamaan (20), maka Δ_{a_1} ditulis menjadi

$$\Delta_{a_1} = \frac{-1}{8}k(3\rho^2 - 6\mu_1^2 + 2\mu_2^2 - 2k\mu_1^2 + 2k\mu_2^2 + 3k\rho^2). \tag{21}$$

Pertama mencari nilai ekstrim untuk Δ_{a_1} pada daerah $0 \le \mu_1+\mu_2 \le \rho$, $0 \le \rho \le 1$. Syarat perlu adanya nilai ekstrim adalah $\frac{\partial \Delta_{a_1}}{\partial \mu_1} = 0$, $\frac{\partial \Delta_{a_1}}{\partial \mu_2} = 0$ dan $\frac{\partial \Delta_{a_1}}{\partial \rho} = 0$, hanya dipenuhi pada titik $(\mu_1, \mu_2, \rho) = (0,0,0)$ yang terletak pada daerah batas. Untuk itu cukup diuji nilai ekstrim pada batas $\mu_1 + \mu_2 = \rho$.

Jika $\mu_2 = \rho - \mu_1$ disubstitusi ke persamaan (21), maka Δ_{a_1} dapat ditulis menjadi

$$\Delta_{a_1} = \frac{-1}{8}k(5\rho^2 - 4\mu_1^2 - 4\rho\mu_1 + 5\rho^2 k - 4k\mu_1\rho). \tag{22}$$

Nilai ekstrim dari Δ_{a_1} dicapai pada titik $(\mu_1, \rho) = (0,0)$ yang merupakan titik pelana. Untuk itu tinggal menguji nilai ekstrim dari Δ_{a_1} pada titik - titik batas $(0,0,0)$, $(0,0,1)$, $(0,1,1)$ dan $(1,0,1)$ yang masing-masing memberikan nilai $\Delta_{a_1} = 0$, $\Delta_{a_1} = -0,0197$, $\Delta_{a_1} = -0,0328$ dan $\Delta_{a_1} = 0,0184$. Jadi kesalahan absolut a_1 pada daerah $0 \le \mu_1 + \mu_2 \le \rho$, $0 \le \rho \le 1$ untuk kasus pergeseran fase negatif sebesar 0,0328.

Kesalahan amplitudo individu soliton pertama pada daerah $\mu_1 - \mu_2 \ge \rho$, $0 \le \rho \le 1$, untuk kasus pergeseran fase positif dilakukan dengan cara yang sama. Hasil yang diperoleh dari perhitungan analisis disimpulkan bahwa kesalahan absolut amplitudo (Δ_{a_1}) sebesar 0,119.

Dengan cara yang sama kita mengestimasi kesalahan amplitudo soliton kedua (Δ_{a_2}). Jika parameter pengukuran c_x, c_y pada persamaan (11) dan (12) disubstitusikan ke persamaan (18), diperoleh Δ_{a_2} sebagai berikut

$$\Delta_{a_2} = \frac{-1}{8}k(2\mu_1^2 - 6\mu_2^2 + 3\rho^2 + 2\mu_1^2 k - 2k\mu_2^2 + 3\rho^2 k). \tag{23}$$

Dari perhitungan analisis diperoleh bahwa nilai ekstrim dari Δ_{a_2} pada daerah $0 \le \mu_1 + \mu_2 \le \rho$, $0 \le \rho \le 1$ dicapai pada titik-titik batasnya (yaitu $(0,0,0)$, $(0,0,1)$, $(0,1,1)$ dan $(1,0,1)$). Pada titik-titik $(0,0,0)$, $(0,0,1)$, $(0,1,1)$ dan $(1,0,1)$ masing-masing memberikan nilai $\Delta_{a_2} = 0$, $\Delta_{a_2} = -0,0197$, $\Delta_{a_2} = 0,019$ dan $\Delta_{a_2} = -0,0328$. Jadi kesalahan absolut Δ_{a_2} mencapai $0,0328$ pada daerah $0 \le \mu_1+\mu_2 \le \rho$, $0 \le \rho \le 1$ (untuk kasus pergeseran fase negatif).

Analisis kesalahan absolut amplitudo individu soliton kedua (Δ_{a_2}) pada daerah $\mu_1 - \mu_2 \ge \rho$, $0 \le \rho \le 1$ dilakukan dengan cara yang sama. Dari hasil perhitungan diperoleh bahwa keslahan absolut (Δ_{a_2}) mencapai $0,034$.

Hasil perhitungan kesalahan absolut amplitudo individu dua soliton, dengan memberikan kesalahan relatif pengukuran c_x, c_y dan ρ sekitar 5% diberikan pada tabel 1. Tabel 1 juga membadingkan kesalahan absolut dari hasil Peterson & van

Groesen [9] dengan mengambil kesalahan relatif pengukuran yang sama. Hasil perhitungan menunjukkan adanya perbaikan kesalahan amplitudo yang signifikan dibandingkan dengan hasil di [9]yang diperoleh dengan satu data pengukuran.

Tabel 1: Kesalahan absolut parameter amplitudo soliton KP.

Kesalahan amplitudo	Pergeseran Fase Negatif		Pergeseran Fase Positif	
	*	**	*	**
Δ_{a_1}	1,9827	0,0328	2,00	0,119
Δ_{a_2}	0,4957	0,0328	0,0905	0,034

Keterangan:
*) Peterson.
**) Hasil penelitian.

6 Kesimpulan.

Pada paper ini telah diperoleh hubungan eksplisit untuk problem invers yang merekonstruksi gelombang permukaan 2D berdasarkan dua gambar yang diberikan dan estimasi kesalahan absolut juga diperoleh secara eksplisit.

Hasil dari analisis estimasi kesalahan diperoleh bahwa kesalahan absolut amplitudo individu soliton KP cukup kecil. Dengan menentukan kesalahan relatif pengukuran sekitar 5% telah dihasilkan bahwa kesalahan absolut amplitudo individu soliton mencapai $0,0328$ (untuk kasus pergeseran fase negatif). Sedangkan untuk kasus pergeseran fase positif disimpulkan sebagai berikut:

1. Kesalahan absolut amplitudo individu soliton pertama mencapai $0,119$.
2. Kesalahan absolut amplitudo individu soliton kedua mencapai $0,034$.

Hasil ini diharapkan dapat memberikan informasi signifikansi untuk memprediksi tinggi gelombang yang berkenaan dengan problem yang sama.

Ucapan Terima Kasih

Penulis mengucapkan terima kasih kepada Dirjen DIKTI melalui Proyek DCRG URGE 2000 dan Hibah Tim URGE No.007/HTPP-IV/URGE/1999.

Daftar Pustaka

[1] A. Jamaluddin, I. Yuwono, Jafar, and Ong Chee Tiong, *Kadomtsev-Petviashvili (KP) Wave Identification From laboratory Observations* ,RWS Report,P4M-ITB, 1997.

[2] B. Grammaticos, A. Ramani, and J. Hietarinta, *A search for integrable bilinear equations: The Painleve approch*, J. Math. Phys.,31,(1990),2572-2578.

[3] E. Cahyono, E. van Groesen, E. Soewono,& S. Subarinah *Genus-two Soliton to Kadomtsev-Petviashvili Equation*,Differential Equations Theory, Numerics And Applications,Kluwer Academics Publisher, (1996),233-243.

[4] E. Soewono, *Two-Soliton interactions of the Kadomtsev-Petviashvili (KP-I,II) equations*, 1995,(Unpublished)

[5] J. Hammack, N. Scheffner, and H. Segur, *Two-dimensional periodic waves in shallow water*,J. Fluid Mech., 209,(1989),567-589.

[6] J. Satsuma, *N-Soliton Solution of the Two-Dimensional Korteweg de-Vries Equation*,Journal of the Physical Society of Japan, 40,(1976),286-290.

[7] M. J. Ablowitz & H. Segur, *Soliton and Inverse Scattering Transform*, SIAM, Philadelphia, 1981.

[8] P. F. Hodnett and T. P. Moloney, *On the structure during interaction of the two-soliton solution of the Karteweg-de Vries equation*, SIAM J. Appl. Math.,49,(1989),1174-1187.

[9] P. Peterson and E.van Groesen, *Sensitivity of the wave crest problem*, Wave Motion, 1999 (Submitted)

[10] P. Peterson and E.van Groesen, *A direct and invers problem for wave crests modeled by interactions of two solitons*, Physica D, 141,(2000),316-332.

[11] R. Hirota, *Direct methods in soliton theory*, In R. K Bullough and P. J. Caudrey, editor, Solitons, Springer, Berlin, 1980.