

**HUBUNGAN GRAF INTERVAL PROBE TERLABELI DENGAN  
*ASTEROIDAL TRIPLE, SIKEL CHORDLESS DAN TREE***



---

**SKRIPSI**

---

Oleh :

**F. Dahlia Dian Asmara**

**J2A 006 017**

**PROGRAM STUDI MATEMATIKA JURUSAN MATEMATIKA  
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN  
ALAM  
UNIVERSITAS DIPONEGORO  
SEMARANG  
2010**

**HUBUNGAN GRAF INTERVAL PROBE TERLABELI DENGAN  
*ASTEROIDAL TRIPLE, SIKEL CHORDLESS DAN TREE***

**Oleh:**

**F. DAHLIA DIAN ASMARA**

**J2A 006 017**

Diajukan sebagai Syarat untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains

pada

Program Studi Matematika

**PROGRAM STUDI MATEMATIKA JURUSAN MATEMATIKA  
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM**

**UNIVERSITAS DIPONEGORO**

**SEMARANG**

**2010**

## HALAMAN PENGESAHAN

Judul : Hubungan Graf Interval Probe Terlabeli dengan *Asteroidal Triple*,  
*Sikel Chordless* dan *Tree*

Nama : F. Dahlia Dian Asmara

NIM : J2A 006 017

Telah diujikan pada sidang Tugas Akhir tanggal 15 Juni 2010 dan dinyatakan **lulus**  
pada tanggal .....Juni 2010

Semarang,  
Panitia Penguji Tugas Akhir  
Ketua,

Suryoto, S.Si, M.Si  
NIP. 1968 07 14 1994 03 1 004

Mengetahui,  
Ketua Jurusan Matematika  
FMIPA UNDIP

Mengetahui,  
Ketua Program Studi Matematika  
Jurusan Matematika FMIPA UNDIP

Dr. Widowati, S.Si, M.Si  
NIP. 1969 02 14 1994 03 2 002

Bambang Irawanto, S.Si, M.Si  
NIP. 1967 07 29 1994 03 1 001

## HALAMAN PENGESAHAN

Judul : Hubungan Graf Interval Probe Terlabeli dengan *Asteroidal Triple*,  
Sikel *Chordless* dan *Tree*

Nama : F. Dahlia Dian Asmara

NIM : J2A 006 017

Telah diujikan pada sidang Tugas Akhir tanggal 15 Juni 2010.

Semarang, Juni 2010

Pembimbing Utama

Pembimbing Anggota

Drs. Bayu Surarso, M.Sc, Ph.D  
NIP. 1963 11 05 1988 03 1 001

Bambang Irawanto, S.Si, M.Si  
NIP. 1967 07 29 1994 03 1 001

## KATA PENGANTAR

Puji Syukur penulis panjatkan kehadiran Tuhan Yang Maha Esa yang telah melimpahkan rahmat-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan tugas akhir ini..

Tugas akhir ini berjudul **“Hubungan Graf Interval Probe Terlabeli dengan *Asteroidal Triple*, *Sikel Chordless* dan *Tree*”** disusun sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Strata Satu (S1) pada Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Diponegoro Semarang. Pada kesempatan ini penulis mengucapkan terima kasih yang sebesar-besarnya kepada pihak-pihak yang telah membantu dalam penyusunan Tugas Akhir ini, yaitu kepada :

1. Ibu Dra. Rum Hastuti, M.Si selaku Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Diponegoro Semarang.
2. Ibu Dr. Widowati, S.Si, M.Si selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Diponegoro Semarang.
3. Bapak Drs. Bayu Surarso, M.Sc. Ph.D selaku pembimbing I yang dengan penuh kesabaran membimbing dan mengarahkan penulis hingga selesainya tugas akhir ini.
4. Bapak Bambang Irawanto, S.Si, M.Si, selaku dosen pembimbing II yang telah membimbing dan mengarahkan penulis dalam penyusunan Tugas Akhir ini serta selaku ketua Program Studi Matematika yang telah memberikan dukungan kepada penulis baik secara akademik maupun nonakademik selama masa studi.

5. Segenap Dosen dan Karyawan di Jurusan Matematika Fakultas MIPA UNDIP yang telah memberikan ilmu pengetahuan kepada penulis selama masa studi, sehingga pengetahuan yang telah diberikan sangat bermanfaat dalam penyusunan tugas akhir ini dan semua pihak yang telah membantu hingga selesainya tugas akhir ini, yang tidak dapat penulis sebutkan satu persatu. Semoga Tuhan membalas segala kebaikan yang telah Anda berikan kepada penulis. Amin.

Penulis menyadari bahwa tugas akhir ini masih jauh dari sempurna. Oleh karena itu kritik dan saran yang bersifat membangun sangat penulis harapkan. Semoga tugas akhir ini dapat memberikan manfaat bagi semua pihak.

Semarang,

Juni 2010

Penulis

## ABSTRAK

Pada tugas akhir ini dipelajari mengenai hubungan graf interval probe terlabeled dengan *asteroidal triple*, siklus *chordless* dan *tree*. Pertama-tama, dibuktikan bahwa graf interval probe terlabeled tidak selalu subset dari graf interval probe dan subset dari graf interval. Yang kedua, dibuktikan bahwa *asteroidal triple* merupakan subgraf *induced* yang terlarang pada graf interval probe terlabeled. Dengan kata lain graf interval probe terlabeled tidak boleh memuat *asteroidal triple*. Yang ketiga, dibuktikan bahwa siklus *chordless*  $C_k$  dimana ( $k \geq 5$ ) maupun komplemennya  $C_k^c$  dimana ( $k \geq 5$ ) bukan graf interval probe terlabeled, atau graf interval probe terlabeled tidak mempunyai subgraf *induced* yang isomorfik dengan  $C_k$  atau  $C_k^c$  dimana ( $k \geq 5$ ). Sehingga graf interval probe terlabeled adalah *weakly chordal*. Yang terakhir, dibuktikan bahwa pada *tree* untuk graf interval probe terlabeled terdapat empat subgraf *induced* yang terlarang. Dengan kata lain, pada *tree* untuk graf interval probe terlabeled tidak boleh memuat keempat subgraf *induced* terlarang tersebut.

Kata kunci : graf interval probe terlabeled, *asteroidal triple*, siklus *chordless*, *tree*

## ABSTRACT

In this paper we study about the relationship between tagged probe interval graph with asteroidal triple, chordless cycle, and tree. First of all, we study that tagged probe interval graph is not always subset of probe interval graph and subset of interval graph. Secondly, we prove that asteroidal triple is a forbidden induced subgraph for tagged probe interval graph. In other words, tagged probe interval graph can not contain an asteroidal triple. The third, we prove both chordless cycle  $C_k$  which ( $k \geq 5$ ) and its complement  $C_k^c$  which ( $k \geq 5$ ) are not tagged probe interval graph, or tagged probe interval graph does not have induced subgraph which isomorphic with  $C_k$  which ( $k \geq 5$ ) and  $C_k^c$  which ( $k \geq 5$ ). So tagged probe interval graph is weakly chordal. The last, we prove that in the tree for tagged probe interval graph, there are four forbidden induced subgraphs. In other words, tagged probe interval graph can not contain the four forbidden induced subgraphs.

Keywords: tagged probe interval graph, asteroidal triple, chordless cycle, tree



## DAFTAR ISI

	Halaman
HALAMAN JUDUL .....	i
HALAMAN PENGESAHAN .....	ii
KATA PENGANTAR .....	iv
ABSTRAK .....	vi
ABSTRACT .....	vii
DAFTAR ISI .....	viii
DAFTAR SIMBOL .....	x
DAFTAR GAMBAR .....	xi
BAB I     PENDAHULUAN .....	1
1.1. Latar Belakang .....	1
1.2. Permasalahan .....	3
1.3. Pembatasan Masalah .....	3
1.4. Tujuan Penulisan .....	3
1.5. Metode Penulisan .....	3
1.6. Sistematika Penulisan .....	4
BAB II    MATERI PENUNJANG .....	5
2.1. Terminologi Graf .....	5
2.2. Walk dan Keterhubungan .....	10
2.3. Graf Interval .....	16
2.4. <i>Tree</i> .....	17
BAB III   PEMBAHASAN .....	20
3.1. Hubungan antara Graf Interval, Graf Interval Probe dan Graf Interval Probe Terlabeli .....	20
3.2. Hubungan Graf Interval Probe Terlabeli dengan <i>Asteroidal         Triple</i> .....	31

3.3. Hubungan Graf Interval Probe Terlabeli dengan Sikel <i>Chordless</i> .....	37
3.4. Hubungan Graf Interval Probe Terlabeli dengan <i>Tree</i> .....	46
BAB IV PENUTUP .....	60
4.1 Kesimpulan.....	60
4.2 Saran.....	61
DAFTAR PUSTAKA .....	62

## DAFTAR SIMBOL

$C_n$	: Sikel dengan $n$ titik
$C_k^c$	: Komplemen dari sikel dengan $k$ titik
$N$	: Himpunan titik non-probe
$P$	: Himpunan titik probe
$I_v$	: Penyajian interval dari titik $v$
$E$	: Himpunan sisi
$V$	: Himpunan titik
$G$	: Graf $G$
$G(N)$	: Graf $G$ dengan himpunan titik $N$
$G(P)$	: Graf $G$ dengan himpunan titik $P$
$G = (V, E)$	: Graf $G$ dengan himpunan titik $V$ dan himpunan sisi $E$
$G = (V, P, E)$	: Graf $G$ dengan himpunan titik $V$ dan himpunan sisi $E$ dimana himpunan probenya $P$ dan himpunan nonprobenya $N$ .
$l_v$	: <i>Endpoint</i> kiri dari interval $I_v$
$r_v$	: <i>Endpoint</i> kanan dari interval $I_v$
$(u, v)$	: Sisi yang menghubungkan titik $u$ dan $v$
$P_{uv}$	: Path yang menghubungkan titik $u$ dan $v$
$P_C$	: Path <i>clique</i>
$P_{C_v}$	: Path <i>clique</i> yang memuat titik $v$
$N_G(v)$	: <i>Neighborhood</i> dari titik $v$ pada graf $G$

## DAFTAR GAMBAR

Gambar 2.1	Contoh Graf .....	5
Gambar 2.2	Contoh Graf dengan sisi ganda dan lup .....	6
Gambar 2.3	Contoh subgraf dari graf pada Gambar 2.2 .....	7
Gambar 2.4	Contoh dua Graf yang Isomorfik .....	9
Gambar 2.5	Contoh <i>Trail</i> (a) dan <i>Path</i> (b) .....	11
Gambar 2.6	Contoh <i>Trail</i> (a) Tertutup dan sikel (b) .....	11
Gambar 2.7	Contoh Graf Terhubung (a) dan Graf tidak Terhubung (b)....	12
Gambar 2.8	Contoh Komplemen dari graf pada Gambar 2.1 .....	13
Gambar 2.9	Contoh Subgraf <i>induced</i> dan bukan Subgraf <i>induced</i> .....	13
Gambar 2.10	Contoh Graf dengan dua buah <i>clique</i> maksimal .....	14
Gambar 2.11	Contoh Sikel dan <i>Chordnya</i> .....	15
Gambar 2.12	Contoh Sikel <i>chordless</i> .....	16
Gambar 2.13	Contoh Graf interval dan Penyajian intervalnya .....	17
Gambar 2.14	Contoh <i>Tree</i> .....	18
Gambar 2.15	Contoh <i>Tree</i> Berakar .....	19
Gambar 3.1	Contoh Graf Interval Probe .....	22
Gambar 3.2	Penyajian Interval dari graf pada Gambar 3.1 .....	22
Gambar 3.3	Contoh Graf Interval Probe Terlabeli .....	24
Gambar 3.4	Penyajian Interval dari graf pada Gambar 3.3 .....	24
Gambar 3.5	GIPT yang merupakan GIP tetapi bukan GI .....	25

Gambar 3.6	Penyajian Interval dari graf pada Gambar 3.5 .....	26
Gambar 3.7	GIP yang merupakan GI tetapi bukan GIPT.. .....	27
Gambar 3.8	Penyajian Interval dari graf pada Gambar 3.7 .....	27
Gambar 3.9	GIPT yang bukan GIP dan juga bukan GI.....	28
Gambar 3.10	Penyajian Interval dari graf pada Gambar 3.9.....	29
Gambar 3.11	GIPT yang merupakan GI dan juga merupakan GI.....	30
Gambar 3.12	Penyajian Interval dari graf pada Gambar 3.11 .....	30
Gambar 3.13	Contoh 1 Graf dengan <i>Asteroidal Triple</i> .....	32
Gambar 3.14	Contoh 2 Graf dengan <i>Asteroidal Triple</i> .....	32
Gambar 3.15	Contoh Graf <i>Split</i> Interval .....	33
Gambar 3.16	Penyajian Interval dari $G(V_1)$ .....	34
Gambar 3.17	Contoh Graf tanpa <i>Asteroidal Triple</i> .....	35
Gambar 3.18	$I_v$ tidak dapat termuat sejati pada $I_u$ .....	40
Gambar 3.19	$I_v$ tidak dapat termuat sejati pada $I_u$ .....	40
Gambar 3.20	$I_v$ tidak dapat termuat sejati pada $I_u$ .....	42
Gambar 3.21	$I_v$ tidak dapat termuat sejati pada $I_u$ .....	42
Gambar 3.22	Graf $C_5$ dan komplemennya.....	43
Gambar 3.23	Graf pada (a) adalah sikel $C_6$ , Graf pada (b) adalah komplemen dari Graf pada (a), dan Graf pada (c) adalah subgraf <i>induced</i> dari Graf pada (b) .....	43
Gambar 3.24	Graf pada (a) adalah sikel $C_7$ , Graf pada (b) adalah komplemen dari Graf pada (a), dan Graf pada (c)	

	adalah subgraf <i>induced</i> dari Graf pada (b) .....	44
Gambar 3.25	Graf (a) adalah sikel $C_8$ , Graf (b) adalah komplemen dari Graf (a), dan Graf (c) adalah subgraf <i>induced</i> dari Graf (b).....	44
Gambar 3.26	Graf pada (a) adalah sikel $C_9$ , Graf pada (b) adalah komplemen dari Graf pada (a), dan Graf pada (c) adalah subgraf <i>induced</i> dari Graf pada (b) .....	45
Gambar 3.27	Subgraf Terlarang pada <i>Tree</i> untuk Graf Interval Probe Terlabeli.....	46
Gambar 3.28	Contoh graf dengan himpunan bebas .....	48
Gambar 3.29	<i>Tree</i> berakar $T$ .....	50
Gambar 3.30	Subtree $(T, x), (T_3, x_3), (T_5, x_5), (T_6, x_6), (T_7, x_7)$ dan $(T_8, x_8)$ .....	50
Gambar 3.31	Interval $I_{x_i}$ .....	51
Gambar 3.32	<i>Tree</i> berakar $T$ .....	55
Gambar 3.33	Subtree berakar $T_A$ .....	55
Gambar 3.34	Subtree berakar $T_B$ .....	55
Gambar 3.35	Subtree berakar $T_C$ .....	56
Gambar 3.36	<i>Tree</i> berakar $T$ .....	59
Gambar 3.37	Subtree berakar $(T, x), (T_1, x_1), (T_2, x_2), (T_3, x_3),$ $(T_{10}, x_{10}), (T_{12}, x_{12})$ .....	59

# BAB I

## PENDAHULUAN

### 1.1 Latar Belakang

*Deoxyribonucleic acid* (DNA) adalah bahan kimia pembawa informasi genetik. Pada biologi molekuler, untuk mereplikasikan dan mempelajari bagian DNA yang berdekatan, DNA dipotong menjadi fragmen-fragmen kecil. Fragmen- fragmen tersebut direplikasikan ke dalam klon (*clone*). Beberapa klon mungkin mempunyai panjang yang bervariasi. Pada saat proses produksi klon, semua informasi mengenai posisi relatif sepanjang rantai DNA hilang. Sehingga diperlukan suatu cara untuk merekonstruksikan urutan klon berdasar data percobaan mengenai ketumpang tindihan klon. Cara ini disebut pemetaan fisik (*physical mapping*). Ada beberapa cara untuk mendapatkan informasi mengenai ketumpang tindihan klon. Salah satunya adalah hibridisasi. Pada hibridisasi, *cosmid contig* menghasilkan informasi ketumpang tindihan. Pada proses ini, sekumpulan klon ditempatkan pada filter untuk koloni hibridisasi. Filternya adalah probe dengan klon yang telah dilabeli dengan radioaktif pada ujungnya. Dua klon tumpang tindih jika salah satunya dilabeli dan setidaknya satu ujung dari klon yang dilabeli termuat dalam klon yang lain.

Dua klon yang tumpang tindih dapat direpresentasikan ke dalam graf interval, dimana titiknya menggambarkan klon dan dua titik adalah *adjacent* jika menggambarkan klon yang tumpang tindih. Graf interval telah digunakan untuk merekonstruksikan posisi relatif dari fragmen DNA. Namun graf interval tidak dapat diaplikasikan pada pemetaan *cosmid contig*. Pertama, karena himpunan bagian klon

dipilih untuk dilabeli, informasi mengenai ketumpang tindihan klon tidak dimiliki. Kedua, jika klon tidak dilabeli termuat dalam klon yang dilabeli, ketumpang tindihannya tidak dapat diketahui.

Untuk memodelkan pemetaan *cosmid contig*, digunakan pengembangan dari graf interval, yaitu graf interval probe dan graf interval probe terlabeli. Pada graf interval probe, ada tiga kemungkinan informasi ketumpang tindihan. Yang pertama, jika klon yang terlabeli termuat dalam klon yang tidak dilabeli. Kedua jika klon yang tidak dilabeli termuat dalam klon yang terlabeli, dan yang ketiga jika klon yang terlabeli beririsan dengan klon yang tidak terlabeli serta tidak memuat satu sama lain. Graf lain yang digunakan untuk memodelkan pemetaan *cosmid contig* adalah graf interval probe terlabeli. Graf interval probe terlabeli merupakan penghalusan dari graf interval probe. Pada graf interval probe terlabeli, hanya ada dua kemungkinan informasi ketumpang tindihan. Yang pertama, jika klon yang terlabeli termuat dalam klon yang tidak dilabeli dan yang kedua jika klon yang terlabeli beririsan dengan klon yang tidak terlabeli serta tidak memuat satu sama lain. Pada graf interval probe dan graf interval probe terlabeli, himpunan titiknya ( $V$ ) dipartisi menjadi probe ( $P$ ) dan nonprobe ( $N$ ), dimana probe dan nonprobe diberikan oleh ahli biologi.

Pada tulisan ini akan dipelajari mengenai hubungan graf interval probe terlabeli dengan *asteroidal triple*, siklus *chordless* dan *tree*. Pertama akan ditunjukkan bahwa graf interval probe terlabeli tidak selalu merupakan graf interval dan graf interval probe. Kedua akan dibuktikan bahwa graf interval probe terlabeli tidak boleh memuat *asteroidal triple* dari tiga probe dan subgraf *induced* yang terlarang untuk *tree* pada graf interval probe terlabeli. Ketiga akan dibuktikan bahwa siklus *chordless*



dengan panjang lebih besar atau sama dengan lima dan komplemennya juga bukan merupakan graf interval probe terlabeli.

## **1.2 Pembatasan Masalah**

Untuk mempersempit permasalahan, maka permasalahan dalam tugas akhir ini dibatasi dengan asumsi bahwa graf pada pembahasan ini adalah graf sederhana dan partisi titik probe dan nonprobe telah diberikan.

## **1.3 Tujuan Penulisan**

Tujuan dari penulisan tugas akhir ini adalah untuk mengetahui hubungan graf interval probe terlabeli dengan *asteroidal triple*, sikel *chordless*, dan *tree* .

## **1.4 Metode Penulisan**

Metode yang digunakan penulis dalam penyusunan tugas akhir ini adalah studi literatur yang dilakukan dengan mengumpulkan bahan pustaka yang berkaitan dengan graf interval probe terlabeli. Langkah pertama yang dilakukan adalah mendefinisikan graf interval probe terlabeli Selanjutnya mempelajari hubungan graf interval probe terlabeli dengan *asteroidal triple*, sikel *chordless*, dan *tree* , melalui pembuktian sejumlah lemma dan teorema.

## 1.5 Sistematika Penulisan

Tugas akhir ini dibagi menjadi 4 bab. Bab I Pendahuluan. Bab ini memuat latar belakang, permasalahan, pembatasan masalah, tujuan penulisan, metode penulisan dan sistematika penulisan. Bab II Materi Penunjang memuat materi penunjang yang digunakan dalam pembahasan tugas akhir ini. Bab ini berisi materi tentang terminologi graf, *walk* dan keterhubungan dalam graf, graf interval dan *tree*. Bab III Pembahasan, bab ini berisi materi yang merupakan pokok bahasan dalam tugas akhir ini yaitu mengenai graf interval probe terlabeli. Pada bab ini, dijelaskan definisi dan teorema mengenai graf interval probe terlabeli serta hubungan graf interval probe terlabeli dengan *asteroidal triple*, siklus *chordless*, dan *tree*. Bab IV Penutup, bab ini berisi kesimpulan dan saran dari seluruh pembahasan dalam tugas akhir ini.