

SEMI-HOMOMORFISMA BCK -ALJABAR



SKRIPSI

Oleh :

DEFFYANA PRASTYA ARIFANI

J2A 006 011

**PROGRAM STUDI MATEMATIKA JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM**

UNIVERSITAS DIPONEGORO

SEMARANG

2010

SEMI-HOMOMORFISMA *BCK*-ALJABAR

DEFFYANA PRASTYA ARIFANI

J2A 006 011

Skripsi

Diajukan sebagai syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains

pada

Program Studi Matematika

**PROGRAM STUDI MATEMATIKA JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS DIPONEGORO
SEMARANG**

2010

HALAMAN PENGESAHAN

Judul : Semi-homomorfisma *BCK*-aljabar

Nama : Deffyana Prastya Arifani

NIM : J2A 006 011

Telah diujikan pada sidang Tugas Akhir tanggal 4 Juni 2010

dan dinyatakan **lulus** pada tanggal 8 Juni 2010

Semarang, 8 Juni 2010

Panitia Penguji Tugas Akhir

Ketua,

Bambang Irawanto, S.Si, M.Si

NIP. 19670729 199403 1 001

Mengetahui,

Ketua Jurusan Matematika

FMIPA UNDIP

Mengetahui,

a/n. Ketua Program Studi Matematika

Sekretaris,

Dr. Widowati, S.Si, M.Si

NIP. 19690214 199403 2 002

Suryoto, S.Si, M.Si

NIP. 19680714 199403 1 004

HALAMAN PENGESAHAN

Judul : Semi-homomorfisma *BCK*-aljabar

Nama : Deffyana Prastya Arifani

NIM : J2A 006 011

Telah diujikan pada sidang Tugas Akhir tanggal 4 Juni 2010

Semarang, 8 Juni 2010

Pembimbing Utama

Pembimbing Anggota

Suryoto, S.Si, M.Si

NIP. 19680714 199403 1 004

Drs. YD. Sumanto, M.Si

NIP. 19640918 199301 1 002

ABSTRAK

Suatu BCK -aljabar merupakan kelas dari K -aljabar bilamana grup pembangunnya adalah grup komutatif, sehingga sifat-sifat yang berlaku pada K -aljabar akan berlaku juga pada BCK -aljabar. Jika pada grup terdapat konsep homomorfisma grup, maka pada BCK -aljabar juga terdapat homomorfisma BCK -aljabar. Selain homomorfisma BCK -aljabar juga terdapat ideal dari BCK -aljabar. Sebagai generalisasi dari homomorfisma BCK -aljabar, akan diperkenalkan semi-homomorfisma BCK -aljabar. Dapat diperlihatkan setiap homomorfisma BCK -aljabar adalah semi-homomorfisma BCK -aljabar. Akan tetapi dengan memanfaatkan konsep ideal dari BCK -aljabar dapat dibuktikan semi-homomorfisma BCK -aljabar merupakan homomorfisma BCK -aljabar.

Kata kunci : BCK -aljabar, homomorfisma BCK -aljabar, semi-homomorfisma BCK -aljabar, ideal BCK -aljabar.

ABSTRACT

A *BCK*-algebra is a class of the *K*-algebra with abelian group functioned as generator group, so that the properties in effect on the *K*-algebra will be applicable also on *BCK*-algebras. If the group there is the concept of a group homomorphism, then at the *BCK*-algebras there is also a homomorphism of *BCK*-algebras. Besides a homomorphism of *BCK*-algebras there is also ideal of a *BCK*-algebras. As a generalization of a homomorphism of *BCK*-algebras, a semi-homomorphism of *BCK*-algebras is introduced. It can be shown every homomorphism of *BCK*-algebras is also a semi-homomorphism of *BCK*-algebras. But by utilizing the concept of ideal of *BCK*-algebras can be proved a semi-homomorphism of *BCK*-algebras is a homomorphism of *BCK*-algebras.

Key words : *BCK*-algebras, homomorphism of *BCK*-algebras, semi-homomorphism of *BCK*-algebras, ideal of *BCK*-algebras.

DAFTAR ISI

	Halaman
HALAMAN JUDUL	i
HALAMAN PENGESAHAN	ii
KATA PENGANTAR	iv
ABSTRAK	v
ABSTRACT	vi
DAFTAR ISI	vii
DAFTAR SIMBOL	ix
DAFTAR TABEL	x
DAFTAR LAMPIRAN	xi
BAB I PENDAHULUAN	1
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Perumusan Masalah	2
1.3 Pembatasan Masalah	2
1.4 Tujuan Penulisan	3
1.5 Sistematika Penulisan	3
BAB II TEORI PENUNJANG.....	4
2.1. Relasi	4
2.2. Teori Grup	7
2.3. K -aljabar	14
BAB III PEMBAHASAN	20
3.1. BCK -aljabar	20
3.2. Semi-homomorfisma BCK -aljabar	52

BAB IV PENUTUP	82
3.1. Kesimpulan	82
3.2. Semi-homomorfisma <i>BCK</i> -aljabar	82
DAFTAR PUSTAKA	83
LAMPIRAN	84

DAFTAR SIMBOL

R	: Relasi
0	: Elemen khusus
\leq	: Relasi terurut parsial
$\not\leq$: Bukan relasi terurut parsial
\odot	: Operasi biner pada K -aljabar G
\oplus	: Operasi biner pada K -aljabar Z_3
$*$: Operasi biner pada BCK -aljabar X
\cdot	: Operasi biner pergandaan
\bullet	: Operasi biner bullet
$+$: Operasi biner penjumlahan
2^A	: Power set dari himpunan A
f	: Pemetaan
R_a	: Pemetaan kanan pada BCK -aljabar X
L_a	: Pemetaan kiri pada BCK -aljabar X
$Id(X)$: Himpunan semua ideal dari BCK -aljabar X
$IId(X)$: Himpunan semua ideal tak tereduksi dari BCK -aljabar X
$Os(X)$: Himpunan semua sistem order BCK -aljabar X

DAFTAR TABEL

	Halaman
Tabel 2.1	Pendefinisian operasi biner pergandaan \cdot pada G 9
Tabel 2.2	Pendefinisian operasi biner penjumlahan $+$ pada Z_3 16
Tabel 2.3	Pendefinisian operasi biner \oplus pada Z_3 16
Tabel 2.4	Aksioma K1' pada Z_3 dengan operasi biner \oplus 17
Tabel 2.5	Aksioma K2' pada Z_3 dengan operasi biner \oplus 18
Tabel 2.6	Pendefinisian operasi biner \odot pada G 19
Tabel 3.1	Pendefinisian operasi biner $*$ pada X 21
Tabel 3.2	Pembuktian aksioma BCK1 pada X dengan operasi biner $*$ 22
Tabel 3.3	Pembuktian aksioma BCK2 pada X dengan operasi biner $*$ 24
Tabel 3.4	Pembuktian aksioma BCK5 pada X dengan operasi biner $*$ 25
Tabel 3.5	Pendefinisian operasi biner $*$ pada X 37
Tabel 3.6	Pendefinisian operasi biner $*$ pada Y 37
Tabel 3.7	Pembuktian f suatu homomorfisma BCK -aljabar 38
Tabel 3.8	Pembuktian aksioma ideal BCK -aljabar no.2..... 40
Tabel 3.9	Pendefinisian operasi biner $*$ pada X 48
Tabel 3.10	Pembuktian aksioma sistem order BCK -aljabar no.1 50
Tabel 3.11	Pembuktian aksioma sistem order BCK -aljabar no.2 51
Tabel 3.12	Pembuktian f suatu semi-homomorfisma BCK -aljabar 53
Tabel 3.13	Pendefinisian operasi biner $*$ pada X 55
Tabel 3.14	Pembuktian f suatu semi-homomorfisma BCK -aljabar 55

DAFTAR LAMPIRAN

	Halaman
Lampiran 1 Tabel pembuktian R_0 dan R_b homomorfisma BCK -aljabar	84
Lampiran 2 Tabel pembuktian R_0, R_a, R_b, R_c dan R_d homomorfisma BCK -aljabar	85

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Suatu struktur aljabar merupakan himpunan yang tidak kosong dengan paling sedikit sebuah relasi ekuivalensi, satu atau lebih operasi biner dan memenuhi aksioma-aksioma tertentu. Selama ini mungkin hanya diketahui grup dan ring saja yang merupakan salah satu contoh dari struktur aljabar, ternyata masih banyak sekali struktur aljabar yang lain salah satunya yaitu K -aljabar.

Di dalam K -aljabar dibagi menjadi dua kelas besar berdasarkan grup pembangunnya, yaitu Q -aljabar apabila grup yang membangun K -aljabar adalah grup komutatif dan B -aljabar apabila grup yang membangun K -aljabar adalah grup yang tidak komutatif. Kemudian Q -aljabar masih dibagi lagi menjadi beberapa kelas, yaitu BCH -aljabar, BCK -aljabar, BCI -aljabar. Disini akan lebih diperkenalkan kelas dari K -aljabar yaitu BCK -aljabar.

BCK -aljabar pertama kali diperkenalkan ke dalam matematika oleh Y. Imai dan K. Iseki pada tahun 1966. Dari tahun ke tahun, ilmu pengetahuan berkembang semakin pesat, begitu juga dengan BCK -aljabar. BCK -aljabar telah diterapkan pada banyak cabang matematika seperti teori grup, analisis fungsional, teori probabilitas, topologi, dan sebagainya.

Fenomena yang menarik dari BCK -aljabar adalah BCK -aljabar juga mempunyai konsep-konsep yang hampir sama dengan grup. Jika di dalam grup mempunyai konsep homomorfisma grup maka konsep homomorfisma pada BCK -aljabar pun juga berlaku. Berdasarkan konsep homomorfisma BCK -aljabar ternyata terdapat suatu perumusannya yaitu konsep semi-homomorfisma BCK -aljabar. Dimana semi-homomorfisma BCK -aljabar adalah generalisasi dari homomorfisma BCK -aljabar maka sangatlah menarik untuk memperkenalkan semi-homomorfisma BCK -aljabar dalam kaitannya mempelajari BCK -aljabar.

1.2 Perumusan Masalah

Berdasarkan uraian di atas permasalahan yang akan dibahas dalam tugas akhir ini adalah apakah BCK -aljabar dan semi-homomorfisma BCK -aljabar itu serta sifat-sifat apa sajakah yang berlaku di dalamnya.

1.3 Pembatasan masalah

Pada tugas akhir ini untuk mempermudah pemahaman BCK -aljabar dan semi-homomorfisma BCK -aljabar maka hanya akan dibahas mengenai BCK -aljabar yang berhingga.

1.4 Tujuan Penulisan

Berdasarkan uraian di atas, tujuan penulisan dari tugas akhir ini adalah memperkenalkan suatu struktur aljabar baru yang disebut *BCK*-aljabar yang di dalamnya terdapat konsep semi-homomorfisma *BCK*-aljabar sebagai generalisasi dari homomorfisma *BCK*-aljabar beserta sifat-sifat yang berlaku di dalamnya.

1.5 Sistematika Penulisan

Tugas akhir ini terdiri dari 4 bab dan beberapa subbab. Bab I Pendahuluan yang berisi latar belakang, perumusan masalah, pembatasan masalah, tujuan penulisan dan sistematika penulisan. Bab II Teori Penunjang yang memuat materi penunjang untuk pembahasan selanjutnya. Bab tersebut berisi materi tentang relasi, teori grup dan *K*-aljabar. Bab III merupakan Pembahasan dalam memperkenalkan konsep semi-homomorfisma *BCK*-aljabar yang meliputi struktur *BCK*-aljabar dan semi-homomorfisma *BCK*-aljabar. Bab IV Penutup yang berisi tentang hasil yang diperoleh dari pembahasan.