

**PELABELAN TOTAL TITIK AJAIB PADA *COMPLETE GRAPH***



---

**SKRIPSI**

---

Oleh :

**Novi Irawati**

**J2A 005 038**

**PROGRAM STUDI MATEMATIKA JURUSAN MATEMATIKA  
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM  
UNIVERSITAS DIPONEGORO  
SEMARANG  
2010**

**PELABELAN TOTAL TITIK AJAIB PADA *COMPLETE GRAPH***

**Disusun Oleh :**

**Novi Irawati**

**J2A 005 038**

**SKRIPSI**

Diajukan sebagai syarat untuk memperoleh gelar *Sajana Sains*

pada

Program Studi. Matematika

**JURUSAN MATEMATIKA  
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM  
UNIVERSITAS DIPONEGORO  
SEMARANG  
2010**

## HALAMAN PENGESAHAN

Judul : PELABELAN TOTAL TITIK AJAIB PADA *COMPLETE GRAPH*  
Nama : Novi Irawati  
Nim : J2A 005 038

Telah diujikan pada sidang Tugas Akhir tanggal 31 Mei 2010 dan  
Dinyatakan lulus pada tanggal 7 Juni 2010.

Semarang, 7 Juni 2010  
Panitia Penguji Tugas Akhir  
Ketua,

Dra. Hj. Sunarsih M.Si  
NIP. 1958 09011986032002

Ketua Jurusan Matematika  
Fakultas MIPA Universitas Diponegoro

Mengetahui,  
Ketua Program Studi Matematika  
Jurusan Matematika FMIPA UNDIP

Dr. Widowati, S.Si M.Si  
NIP. 196902141994032002

Bambang Irawanto, S.Si M.Si  
NIP. 196707291994031001

## HALAMAN PENGESAHAN

Judul : PELABELAN TOTAL TITIK AJAIB PADA *COMPLETE GRAPH*

Nama : Novi Irawati

NIM : J2A 005 038

Telah diujikan pada Sidang Tugas Akhir tanggal 31 Mei 2010

Semarang, 7 Juni 2010

Pembimbing Utama

Pembimbing Anggota

R. Heri Sulistyono U, S.Si, M.Si  
NIP 1972 02 03 1998 02 1 001

Drs. Bayu Surarso, M.Sc, Ph.D  
NIP. 1963 11 05 1988 03 1 001

## KATA PENGANTAR

Puji syukur penulis panjatkan kehadirat Allah SWT yang telah melimpahkan rahmat dan hidayah-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan tugas akhir ini. Sholawat dan salam penulis sampaikan kepada Rasulullah SAW beserta keluarganya, sahabatnya, dan orang-orang yang tetap istiqomah dalam mengikuti sunnahnya.

Tugas akhir ini berjudul **“Pelabelan Total Titik Ajaib pada *Complete Graph*”** disusun sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar sarjana sains pada Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Diponegoro Semarang.

Pada kesempatan ini penulis mengucapkan terima kasih kepada :

1. Ibu Dr. Widowati, S.Si, M.Si. selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Diponegoro, sekaligus dosen wali yang telah membimbing dan mengarahkan penulis selama penulis menjadi mahasiswi Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Diponegoro .
2. Drs. Bambang Irawanto, M.Si selaku Ketua Program Studi Matematika FMIPA Universitas Diponegoro.
3. Bapak R. Heri Sulisty U, S.Si, M.Si selaku pembimbing I yang dengan penuh kesabaran membimbing dan mengarahkan penulis hingga selesainya tugas akhir ini.
4. Bapak Drs. Bayu Suraso, M.Sc, Ph.D selaku pembimbing II yang juga telah membimbing dan mengarahkan penulis hingga selesainya tugas akhir ini.

5. Bapak dan Ibu dosen Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Diponegoro, dimana penulis mendapatkan ilmu pengetahuan.
6. Semua pihak yang telah membantu hingga selesainya tugas akhir ini, yang tidak dapat penulis sebutkan satu persatu. Semoga Allah membalas segala kebaikan yang telah Anda berikan kepada penulis. Amin.

Penulis menyadari bahwa tugas akhir ini masih jauh dari sempurna. Oleh karena itu kritik dan saran yang bersifat membangun sangat penulis harapkan. Semoga tugas akhir ini dapat memberikan manfaat bagi semua pihak.

Semarang, Mei 2010

Penulis

## ABSTRAK

Misalkan  $G$  adalah sebuah graf dengan himpunan titik  $V = V(G)$  dan himpunan sisi  $E = E(G)$  dengan  $e = |E(G)|$  dan  $v = |V(G)|$ . Suatu **pelabelan total titik ajaib** (*vertex-magic total labeling*) pada graf  $G(V, E)$  adalah pemetaan bijektif  $\lambda$  dari  $V \cup E$  ke himpunan bilangan integer  $\{1, 2, 3, \dots, v + e\}$  sedemikian sehingga terdapat bilangan bulat positif  $k$  yang memenuhi  $\lambda(x) + \sum \lambda(xy) = k$  untuk setiap  $x \in V$ . Selanjutnya  $k$  disebut konstanta ajaib pada  $G$  dan  $G$  disebut graf total titik ajaib. Pada tugas akhir ini dikaji tentang pelabelan total titik-ajaib pada *complete graph*  $K_n$  untuk  $n$  ganjil dan genap dengan menggunakan algoritma yang disusun dari algoritma penyusunan persegi ajaib yang dimodifikasi.

Kata kunci : Pelabelan total titik ajaib, *complete graph*  $K_n$ , persegi ajaib.

## ABSTRACT

Let  $G$  be a graph with vertex set  $V = V(G)$  and edge set  $E = E(G)$  and let  $e = |E(G)|$  and  $v = |V(G)|$ . A vertex-magic total labeling of a graph  $G(V, E)$  is a bijection map  $\lambda$  from  $V \cup E$  to the integers  $\{1, 2, 3, \dots, v + e\}$  such that there exists a positive integer  $k$  satisfying  $\lambda(x) + \sum \lambda(xy) = k$ , for every  $x \in V$ . Then  $k$  is called a magic constant and  $G$  is called vertex-magic total graph. In this Final Project, we consider a vertex-magic labeling of complete graph  $K_n$  for odd and even  $n$  with use an algorithm which is composed of a modified construction magic square algorithm.

Keywords : *vertex-magic total labeling, Complete graph  $K_n$ , magic square.*



## DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL.....	i
HALAMAN PENGESAHAN I.....	ii
HALAMAN PENGESAHAN II.....	iii
KATA PENGANTAR.....	iv
ABSTRAK.....	vi
ABSTRACT.....	vii
DAFTAR ISI.....	viii
DAFTAR GAMBAR.....	x
DAFTAR SIMBOL.....	xiii
BAB I PENDAHULUAN .....	1
1.1 Latar Belakang.....	1
1.2 Perumusan Masalah.....	2
1.3 Pembatasan Masalah.....	3
1.4 Tujuan Penulisan.....	3
1.5 Metode dan Teknik Penelitian .....	3
1.6 Sistematika Penulisan.....	3
BAB II DASAR TEORI .....	5
2.1 Definisi Dasar .....	5
2.2 Jenis – jenis Graf.....	11

2.3	Faktorisasi Graf.....	16
2.4	Pemetaan .....	18
2.5	Persegi ajaib .....	20
2.5	Pelabelan Graf.....	28
BAB III PELABELAN TOTAL TITIK AJAIB PADA <i>COMPLETE GRAPH</i>		33
3.1	Pelabelan Total Titik Ajaib .....	33
3.1.1	Batas-Batas konstanta Ajaib Pada Pelabelan Total Titik Ajaib.....	37
3.2	Pelabelan Total Titik Ajaib Pada <i>Complete Graph</i> .....	38
3.2.1	Pelabelan Total Titik Ajaib Pada Graf Complete $K_n$ dimana $n$ ganjil.....	39
3.2.1	Pelabelan Total Titik Ajaib Pada <i>Complete Graph</i> $K_m$ dimana $m$ genap.....	51
BAB IV PENUTUP.....		69
DAFTAR PUSTAKA.....		70

## DAFTAR GAMBAR

Gambar 2.1 Graf $G_1$ .....	7
Gambar 2.2 Graf $G_2$ .....	9
Gambar 2.3 Graf $G_3$ dan $G_4$ .....	10
Gambar 2.4 Graf $G_5$ dan $G_6$ .....	10
Gambar 2.5 Graf $G_7$ , $G_8$ dan $G_9$ .....	11
Gambar 2.6 Graf $G_{10}$ dan $G_{11}$ .....	12
Gambar 2.7 Graf $G_{12}$ dan $G_{13}$ .....	13
Gambar 2.8 <i>Complete Graph</i> .....	14
Gambar 2.9 Graf Lingkaran .....	14
Gambar 2.10 Graf Roda .....	15
Gambar 2.11 Graf Teratur .....	15
Gambar 2.12 Graf <i>Bipartite</i> .....	16
Gambar 2.13 Matching pada graf $G$ .....	17
Gambar 2.14 Pemetaan injektif .....	19
Gambar 2.15 Pemetaan surjektif .....	20
Gambar 2.16 Pemetaan bijektif .....	20
Gambar 2.17 Persegi Ajaib orde 3 .....	21
Gambar 2.18 Persegi Ajaib orde 5 .....	22
Gambar 2.19 Hasil Perhitungan pada Persegi Ajaib orde 5 .....	23
Gambar 2.20 Hasil penyusunan Persegi Ajaib orde 5 dengan metode 2 .....	24
Gambar 2.21 Hasil penyusunan Persegi Ajaib orde 5 dengan metode 3 .....	25
Gambar 2.22 Hasil penyusunan Persegi Ajaib orde 5 dengan metode 4 .....	26
Gambar 2.23 Susunan angka persegi ajaib orde 4 .....	27
Gambar 2.24 Persegi Ajaib orde 4 .....	28
Gambar 2.25 Penyusunan Persegi Ajaib orde 8 .....	28
Gambar 2.26 Pelabelan titik sisi ajaib graf Path $P_2$ .....	31
Gambar 2.27 Pelabelan total titik ajaib graf Path $P_3$ .....	31

Gambar 2.28 Pelabelan sisi titik ajaib graf Path $P_2$ .....	32
Gambar 2.29 Pelabelan total sisi ajaib graf lingkaran $C_5$ .....	32
Gambar 3.1 Pelabelan semi ajaib graf tangga $L_3$ .....	34
Gambar 3.2 Pelabelan total titik ajaib graf lingkaran $C_6$ .....	35
Gambar 3.3 Pelabelan Total Titik Anti Ajaib (23,1) Graf Lingkaran $C_7$ .....	36
Gambar 3.4 Tabel pelabelan untuk <i>complete graph</i> $K_n$ .....	39
Gambar 3.5 Tabel hasil setelah langkah 1 .....	42
Gambar 3.6 Tabel hasil setelah langkah 2 .....	43
Gambar 3.7 Tabel hasil setelah langkah 3 .....	43
Gambar 3.8 Tabel hasil setelah langkah 4 .....	43
Gambar 3.9 Tabel Pelabelan total titik ajaib untuk $K_3$ .....	43
Gambar 3.10 Pelabelan total titik ajaib <i>complete graph</i> $K_3$ .....	44
Gambar 3.11 Tabel hasil setelah langkah 1 .....	46
Gambar 3.12 Tabel hasil setelah langkah 2 .....	46
Gambar 3.13 Tabel hasil setelah langkah 3 .....	46
Gambar 3.14 Tabel hasil setelah langkah 4 .....	47
Gambar 3.15 Pelabelan total titik ajaib untuk $K_5$ .....	47
Gambar 3.16 Tabel hasil setelah langkah 1 .....	49
Gambar 3.17 Tabel hasil setelah langkah 2 .....	49
Gambar 3.18 Tabel hasil setelah langkah 3 .....	40
Gambar 3.19 Tabel hasil setelah langkah 4 .....	50
Gambar 3.20 Pelabelan total titik ajaib untuk $K_7$ .....	51
Gambar 3.21 Tabel penyusunan Pelabelan total titik ajaib untuk $K_3$ .....	55
Gambar 3.22 Tabel Pelabelan total titik ajaib untuk $K_3$ .....	55
Gambar 3.23 persegi ajaib orde 3 .....	55
Gambar 3.24 Tabel $L_1$ .....	56
Gambar 3.25 Tabel $L_2$ .....	56
Gambar 3.26 Tabel $P_1$ dan $P_2$ .....	56
Gambar 3.27 Tabel pelabelan total titik ajaib <i>complete graph</i> $K_6$ .....	57
Gambar 3.28 pelabelan total titik ajaib <i>complete graph</i> $K_6$ .....	57

Gambar 3.29 Tabel penyusunan Pelabelan total titik ajaib untuk $K_3$ .....	62
Gambar 3.30 Penyusunan Pelabelan total titik ajaib untuk $K_3$ .....	62
Gambar 3.31 persegi ajaib orde 3 .....	63
Gambar 3.32 Tabel $L_1$ .....	63
Gambar 3.33 Tabel $L_2$ .....	63
Gambar 3.34 Tabel $L_3$ .....	64
Gambar 3.35 Tabel $L_4$ .....	64
Gambar 3.36 Tabel $P_1$ dan $P_2$ .....	64
Gambar 3.37 Tabel $P_3$ dan $P_4$ .....	65
Gambar 3.38 Tabel $M_1$ dan $M_1^t$ .....	65
Gambar 3.39 Tabel $M_2$ dan $M_2^t$ .....	65
Gambar 3.40 Tabel $M_3$ dan $M_3^t$ .....	66
Gambar 3.41 Tabel $M_4$ dan $M_4^t$ .....	66
Gambar 3.42 Tabel pelabelan total titik ajaib <i>complete graph</i> $K_{12}$ .....	66
Gambar 3.43 Pelabelan total titik ajaib <i>complete graph</i> $K_{12}$ .....	67

## DAFTAR SIMBOL

$v_i$	: Titik ke $i$
$e_i$	: Sisi ke $i$
$G$	: Sebuah Graf
$n$	: Order / banyak titik pada graf $G$
$m$	: Order / banyak sisi pada graf $G$
$Q$	: Order / banyak titik dan sisi pada graf $G$ atau $(m+n)$
$V(G)$	: Himpunan titik pada graf $G$
$E(G)$	: Himpunan sisi pada graf $G$
$\text{der}(u)$	: Derajat titik $u$
$P_n$	: Graf path dengan $n$ titik
$K_n$	: <i>Complete Graph</i> dengan $n$ titik
$K_{n,n}$	: Graf <i>bipartite complete</i> dengan $n$ titik
$C_n$	: Graf sikel dengan $n$ titik
$L_n$	: Graf tangga dengan $n$ pasang titik.
$w(x)$	: Bobot titik $x$
$w(xy)$	: Bobot sisi $xy$
$\lambda$	: Pemetaan
$k$	: Konstanta Ajaib
$=$	: Sama dengan
$\leq$	: Lebih kecil sama dengan

$>$	: Lebih besar
$\in$	: Anggota dari
$\subseteq$	: Subset / himpunan bagian
$\cup$	: union / gabungan
$\Sigma$	: Sigma / jumlahan
$Mod$	: Modulo / sisa pembagian
$\binom{h}{2}$	: kombinasi 2 dari $h$
$M_{ij}$	: Tabel dengan baris $i$ dan kolom $j$

# **BAB I**

## **PENDAHULUAN**

### **1.1. Latar Belakang.**

Teori graf pertama kali diperkenalkan oleh Leonhard Euler pada tahun 1736. Saat itu dia memikirkan kemungkinan untuk menyeberangi semua jembatan di kota Kaliningrad, Rusia, tepat satu kali dan kembali ke tempat semula. Publikasi atas permasalahan ini dan solusi yang dia tawarkan saat ini dikenal dengan teori graf.

Graf merupakan pasangan himpunan titik dan himpunan sisi. Pengaitan titik-titik pada graf membentuk sisi dan dapat direpresentasikan pada gambar sehingga membentuk pola graf tertentu. Pola-pola yang terbentuk didefinisikan dan dikelompokkan menjadi kelas-kelas graf. Beberapa kelas graf menurut banyaknya sisi yang insiden terhadap titik antara lain graf reguler, yang derajat setiap titiknya adalah sama dan graf irreguler, yang derajat setiap titiknya ada yang tidak sama.

Pelabelan graf merupakan suatu topik dalam teori graf. Objek kajiannya berupa graf yang secara umum direpresentasikan oleh titik dan sisi serta himpunan bagian bilangan asli yang disebut label. Pertama kali diperkenalkan oleh Sadlàck (1964), kemudian Stewart (1966), Kotzig dan Rosa (1970).

Pelabelan merupakan pemetaan injektif yang memetakan unsur himpunan titik dan atau unsur himpunan sisi ke bilangan asli yang disebut label. Pelabelan titik adalah pelabelan dengan domain himpunan titik, pelabelan sisi adalah pelabelan



dengan domain himpunan sisi, dan pelabelan total adalah pelabelan dengan domain gabungan himpunan titik dan himpunan sisi.

Pelabelan titik dan sisi dari graf bisa dilakukan dengan banyak cara. Salah satu cara yang bisa digunakan adalah melabelinya dengan bilangan. Ada banyak jenis pelabelan graf yang telah dikembangkan, diantaranya adalah pelabelan graceful, pelabelan harmoni, pelabelan total tak beraturan, pelabelan ajaib, dan pelabelan anti ajaib. Dalam pengembangan pelabelan ajaib, dikenal pula pelabelan total titik-ajaib, pelabelan total titik ajaib super, pelabelan total sisi-ajaib, dan pelabelan total sisi-ajaib super.

Hingga saat ini pemanfaatan teori pelabelan graf sangat dirasakan peranannya, terutama pada sektor sistem komunikasi dan transportasi, navigasi geografis, radar, penyimpanan data komputer, dan juga desain circuit gabungan pada komponen elektronik.

Dalam perang di dunia modern ini penggunaan peluru kendali sudah tidak asing lagi. Penggunaan peluru kendali ini mengurangi perang secara fisik dalam jarak dekat, karena peluru kendali dapat diluncurkan dari jarak jauh. Dalam peluncurannya perlu diperhitungkan secara matang agar tepat sasaran. Untuk mengantisipasi kedatangan peluru kendali dari pasukan musuh, peluru kendali ini dapat di deteksi dengan menggunakan pendeteksi sinyal radar, sehingga dapat dilakukan antisipasi secepat mungkin. Selain untuk mendeteksi keberadaan peluru kendali baik yang akan diluncurkan ataupun yang datang dari musuh, deteksi sinyal radar ini juga digunakan untuk deteksi keberadaan pesawat tempur. Desain penting dari kode nonperiodik untuk sinyal radar dan peluru kendali ini ekuivalen dengan pelabelan pada *complete*

*graph*, dimana setiap titik yang ada dihubungkan dengan satu sisi yang mempunyai label yang selalu berbeda. Label sisi ini menggambarkan jarak antar titik, sedangkan label titiknya merupakan posisi pada saat sinyal dikirimkan.

Pada tugas akhir ini, penulis melakukan kajian pelabelan total titik ajaib (*vertex magic total labeling*) pada salah satu subkelas graf reguler yaitu *complete graph*  $K_n$ , dimana salah satu aplikasinya digunakan dalam desain penting dari kode nonperiodik untuk sinyal radar dan peluru kendali.

## **1.2. Perumusan Masalah**

Permasalahan yang akan dibahas dalam tugas akhir ini adalah bagaimana memberikan pelabelan total titik ajaib pada *complete graph*.

## **1.3. Pembatasan Masalah**

Pada tugas akhir ini, graf yang dikaji adalah subkelas dari graf sederhana yaitu pada *complete graph*  $K_n$  yang meliputi *complete graph*  $K_n$  dengan  $n$  ganjil dan *complete graph*  $K_m$  dengan  $m$  genap, lebih khusus pada  $m \equiv 2 \pmod{4}$  dan  $m \equiv 4 \pmod{8}$ .

## **1.4. Tujuan Penulisan**

Memahami algoritma pelabelan total titik ajaib dan konstanta ajaib yang ada didalamnya dalam pelabelan total titik ajaib pada *complete graph*.

### **1.5. Metode dan Teknik Penelitian**

Metode yang digunakan adalah studi literatur, yaitu mengumpulkan informasi dari beberapa buku dan jurnal yang berkaitan dengan pelabelan total titik ajaib, serta buku tentang algoritma untuk diterapkan pada penyusunan algoritma pelabelan total titik ajaib *Complete graph*.

### **1.6. Sistematika Penulisan**

Tugas akhir ini terdiri dari empat bab sebagai berikut :

- a. Bab I sebagai pendahuluan yang memuat latar belakang, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan, dan sistematika penulisan.
- b. Dalam Bab II disajikan secara singkat mengenai konsep dasar, yaitu berbagai macam definisi dan teorema-teorema pada teori graf yang relevan dengan pelabelan total titik ajaib pada *Complete graph  $K_n$*  dalam bentuk definisi, notasi serta beberapa teorema hasil penemuan sebelumnya yang menunjang pengerjaan tugas akhir ini.
- c. Selanjutnya, dalam Bab III dibahas mengenai hasil utama dari tugas akhir ini yaitu memuat penyusunan algoritma dan implementasinya berupa metode dan langkah – langkah pembuktian dengan cara mengkonstruksi pelabelan total titik ajaib pada *Complete graph  $K_n$* . Pada bab ini juga ditampilkan hasil simulasi.
- d. Bab IV memuat kesimpulan dari pengerjaan tugas akhir secara keseluruhan.