

**MENENTUKAN INVERS DRAZIN  
DARI MATRIKS SINGULAR**



**SKRIPSI**

Oleh :

**Liniswatil Khasanah**

**J2A006031**

**PROGRAM STUDI MATEMATIKA JURUSAN MATEMATIKA  
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM  
UNIVERSITAS DIPONEGORO  
SEMARANG**

**2010**

**MENENTUKAN INVERS DRAZIN  
DARI MATRIKS SINGULAR**

**LINISWATIL KHASANAH  
J2A 006 031**

Skripsi

Diajukan sebagai syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains

pada

Program Studi Matematika

**PROGRAM STUDI MATEMATIKA JURUSAN MATEMATIKA  
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM  
UNIVERSITAS DIPONEGORO  
SEMARANG  
2010**

## HALAMAN PENGESAHAN

Judul : Menentukan Invers Drazin dari Matriks Singular

Nama : Liniswatil Khasanah

NIM : J2A 006 031

Telah diujikan pada sidang Tugas Akhir tanggal 17 Juni 2010 dan dinyatakan **lulus** pada tanggal 23 Juni 2010.

Semarang, 23 Juni 2010  
Panitia Penguji Tugas Akhir  
Ketua,

Drs. Y.D. Sumanto, M.Si  
NIP. 19640918 199301 1 002

Mengetahui,  
Ketua Jurusan Matematika  
FMIPA UNDIP

Mengetahui,  
Ketua Program Studi Matematika  
Jurusan Matematika FMIPA UNDIP

Dr. Widowati, S.Si, M.Si  
NIP. 19690214 199403 2 002

Bambang Irawanto, S.Si, M.Si  
NIP. 19670729 199403 1 001

## HALAMAN PENGESAHAN

Judul : Menentukan Invers Drazin dari Matriks Singular

Nama : Liniswatil Khasanah

NIM : J2A 006 031

Telah diujikan pada sidang Tugas Akhir tanggal 17 Juni 2010.

Pembimbing Utama

Semarang, 23 Juni 2010  
Pembimbing Anggota

Bambang Irawanto, S.Si, M.Si  
NIP. 19670729 199403 1 001

Dra. Titi Udjiani SRRM, M.Si  
NIP. 19640223 199102 2 001

## KATA PENGANTAR

Puji syukur penulis panjatkan kehadiran Tuhan Yang Maha Esa atas segala rahmat dan karunia-Nya sehingga Tugas Akhir ini dapat terselesaikan. Tugas Akhir yang berjudul **“MENENTUKAN INVERS DRAZIN DARI MATRIKS SINGULAR”** ini disusun sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Strata Satu (S1) pada Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Diponegoro.

Banyak pihak yang telah membantu dalam penyelesaian Tugas Akhir ini. Oleh karena itu, rasa hormat dan terima kasih ingin penulis sampaikan kepada :

1. Ibu Dra. Rum Hastuti, M.Si selaku Dekan FMIPA UNDIP Semarang.
2. Ibu Dr. Widowati, M.Si selaku Ketua Jurusan Matematika FMIPA UNDIP Semarang.
3. Bapak Bambang Irawanto, S.Si, M.Si selaku Ketua Program Studi Matematika Jurusan Matematika FMIPA UNDIP Semarang.
4. Bapak Bambang Irawanto, S.Si, M.Si dan Ibu Dra. Titi Udjiani SRRM, M.Si selaku Dosen Pembimbing I dan II yang telah bersedia meluangkan waktunya untuk memberikan bimbingan hingga Tugas Akhir ini terselesaikan.
5. Semua pihak yang tidak dapat penulis sebutkan satu per satu.

Penulis menyadari Tugas Akhir ini masih banyak kekurangannya. Untuk itu kritik dan saran yang membangun sangat penulis harapkan. Senoga Tugas Akhir ini dapat bermanfaat bagi penulis dan para pembaca.

Semarang, Juni 2010

Penulis

## ABSTRAK

Suatu matriks singular  $A$  berukuran  $n \times n$  mempunyai invers yaitu invers Drazin dan dituliskan dengan  $A^D$ . Invers ini dapat dicari dengan menentukan matriks Modal  $M$  yang diperumum dan matriks bentuk kanonik Jordan  $J$  dari matriks  $A$ . Matriks Modal  $M$  yang diperumum merupakan matriks yang kolom-kolomnya terdiri dari vektor-vektor eigen yang diperumum  $\mathbf{x}_m$  dari matriks  $A$  sedangkan matriks bentuk kanonik Jordan  $J$  merupakan matriks yang entri pada diagonal utamanya berupa matriks blok Jordan  $J_k(\lambda)$ . Selanjutnya, dua matriks tersebut digunakan untuk menentukan invers Drazin dari matriks  $A$ .

Kata kunci : Invers Drazin, Bentuk kanonik Jordan

## ABSTRACT

A singular matrix  $A$  with size  $n \times n$  has an inverse called the Drazin inverse and denoted by  $A^D$ . This inverse can be obtained by specifying a generalized Modal matrix  $M$  and Jordan canonical form  $J$  of matrix  $A$ . Generalized Modal matrix  $M$  is a matrix where its columns consist of generalized eigen vectors  $\mathbf{x}_m$  from the matrix  $A$ , while the Jordan canonical form  $J$  is a matrix whose entries on its main diagonal consist of Jordan block matrices  $J_k(\lambda)$ . Next, two matrices were used to determine the Drazin inverse of matrix  $A$ .

Keywords: Drazin inverse, Jordan canonical form

## DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL .....	i
HALAMAN PENGESAHAN.....	ii
KATA PENGANTAR .....	iii
ABSTRAK .....	iv
ABSTARCT .....	v
DAFTAR ISI .....	vi
DAFTAR SIMBOL .....	vii
BAB I PENDAHULUAN .....	1
1.1 Latar Belakang .....	1
1.2 Permasalahan .....	2
1.3 Pembatasan Masalah .....	2
1.4 Tujuan Penulisan .....	2
1.5 Sistematika Penulisan .....	2
BAB II TEORI PENUNJANG .....	4
2.1 Ruang Vektor .....	4
2.2 Matriks .....	9
2.3 Transformasi Linier .....	11
2.4 Nilai Eigen dan Vektor Eigen .....	17
BAB III PEMBAHASAN .....	21
3.1 Matriks Blok Diagonal.....	21
3.2 Bentuk Kanonik Jordan .....	32
3.3 Invers Drazin .....	53
BAB IV PENUTUP .....	64
4.1 Kesimpulan .....	64
4.2 Saran .....	64
DAFTAR PUSTAKA .....	65



## DAFTAR SIMBOL

$A^D$	: Invers Drazin dari matriks $A$
$A^{-1}$	: Invers dari matriks $A$
$A^T$	: Transpos dari matriks $A$
$\mathbb{C}$	: Himpunan semua bilangan kompleks
$\mathbf{I}_n$	: Matriks identitas berukuran $n \times n$
$J$	: Matriks bentuk kanonik Jordan
$J_k(\lambda)$	: Matriks blok Jordan berukuran $k \times k$ yang bersesuaian dengan $\lambda$
$\ker(\mathbf{T})$	: Kernel dari transformasi linier $\mathbf{T}$
$M$	: Matriks Modal yang diperumum
$M_n(\mathbb{C})$	: Himpunan matriks berukuran $n \times n$ dengan entri bilangan kompleks
$\text{rank}(A)$	: Rank dari matriks $A$
$\mathbf{R}^n$	: Ruang vektor dimensi $n$
$\mathbf{x}_m$	: Vektor eigen yang diperumum dengan tipe $m$
$\lambda$	: Nilai eigen
$\oplus$	: Penjumlahan langsung
$\cup$	: Union / gabungan
$\rho_m$	: Banyaknya vektor eigen yang diperumum dengan tipe $m$

# BAB I

## PENDAHULUAN

### I. LATAR BELAKANG

Sebuah matriks dikatakan mempunyai invers jika dan hanya jika matriks tersebut non singular atau dengan kata lain jika kolom-kolom atau baris-barisnya bebas linier. Dalam perkembangannya dibutuhkan sebuah invers matriks yang diperumum untuk mengetahui invers dari suatu matriks jika matriks tersebut singular atau jika kolom-kolom atau baris-barisnya bergantung linier.

Invers dari suatu matriks yang diperumum juga dikenal dengan nama invers semu. Invers tersebut mempunyai sifat-sifat invers dari suatu matriks, namun tidak harus semua sifat terpenuhi. Ada beberapa jenis invers matriks yang diperumum diantaranya yaitu invers kiri dan invers kanan ( invers satu sisi ), invers Drazin, invers grup, invers Bott-Duffin, dan invers Moore-Penrose. Pada tugas akhir ini penulis akan membahas mengenai invers Drazin.

Invers Drazin pertama kali dikenalkan oleh Michael P Drazin pada tahun 1958. Invers Drazin dari matriks  $A$  dituliskan dengan  $A^D$ . Ada beberapa metode yang dapat digunakan untuk menentukan invers Drazin dari suatu matriks diantaranya yaitu dengan menggunakan matriks bentuk kanonik Jordan, metode Leverrier Faddeev, dan metode semi iterative tipe BI-CG. Invers Drazin ini dapat diaplikasikan pada beberapa bidang, diantaranya yaitu konvergensi asimtotik semigrup operator,

sistem persamaan differensial linear, rantai Markov, kriptografi, multibody sistem dinamik, dan metode numerik.

## **II. PERMASALAHAN**

Berdasarkan uraian di atas permasalahan yang akan dibahas dalam tugas akhir ini adalah apakah invers Drazin itu dan bagaimana menentukan invers Drazin dari suatu matriks, khususnya matriks singular dengan menggunakan matriks bentuk kanonik Jordan.

## **III. PEMBATAAN MASALAH**

Adapun pembatasan masalah dalam penulisan tugas akhir ini adalah hanya membahas mengenai perhitungan invers Drazin dari suatu matriks, khususnya matriks singular dengan menggunakan matriks bentuk kanonik Jordan.

## **IV. TUJUAN PENULISAN**

Berdasarkan uraian di atas tujuan dari penulisan tugas akhir ini adalah memperkenalkan salah satu bentuk invers matriks yang diperumum yaitu invers Drazin dan menentukan invers Drazin dari suatu matriks, khususnya matriks singular dengan menggunakan matriks bentuk kanonik Jordan.

## **V. SISTEMATIKA PENULISAN**

Tugas Akhir ini terdiri dari 4 bab dan beberapa subbab, Bab I Pendahuluan yang berisi latar belakang, permasalahan, pembatasan masalah, tujuan penulisan dan sistematika penulisan. Pada Bab II Teori Penunjang yang memuat materi penunjang

untuk pembahasan selanjutnya. Bab tersebut berisi materi tentang ruang vektor, matriks, transformasi linier, dan nilai eigen serta vektor eigen. Bab III membahas tentang matriks blok diagonal, bentuk kanonik Jordan, dan invers Drazin. Sedangkan Bab IV Penutup yang berisi tentang hasil yang diperoleh dari pembahasan.