

PELABELAN $L(3, 2, 1)$ PADA BEBERAPA JENIS

GRAF SEDERHANA



SKRIPSI

Oleh :

Melati Dwi Setyaningsih

J2A 005 031

**PROGRAM STUDI MATEMATIKA JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM**

UNIVERSITAS DIPONEGORO

SEMARANG

2010

**PELABELAN $L(3, 2, 1)$ PADA BEBERAPA JENIS
GRAF SEDERHANA**

Melati Dwi Setyaningsih

J2A 005 031

skripsi

Diajukan sebagai syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains

pada

Program Studi Matematika

**PROGRAM STUDI MATEMATIKA JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS DIPONEGORO
SEMARANG
2010**

HALAMAN PENGESAHAN

Lembar 1

Judul : Pelabelan $L(3, 2, 1)$ pada Beberapa Jenis Graf Sederhana

Nama : Melati Dwi Setyaningsih

NIM : J2A 005 031

Telah diujikan pada sidang Tugas Akhir tanggal 18 Juni 2010 dan dinyatakan **lulus** pada tanggal 22 Juni 2010.

Semarang, Juni 2010
Panitia Penguji Tugas Akhir
Ketua,

Drs. Bayu Surarso, M.Sc, Ph.D

NIP. 19631105 198803 1 001

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika
FMIPA UNDIP

Mengetahui,
Ketua Program Studi Matematika
Jurusan Matematika FMIPA

Dr. Widowati, S.Si, M.Si
NIP. 19690214 199403 2 002

Bambang Irawanto, S.Si, M.Si
NIP. 19670729 199403 1 001

HALAMAN PENGESAHAN

Lembar 2

Judul : Pelabelan $L(3, 2, 1)$ pada Beberapa Jenis Graf Sederhana

Nama : Melati Dwi Setyaningsih

NIM : J2A 005 031

Telah diujikan pada sidang Tugas Akhir tanggal 18 Juni 2010

Semarang, Juni 2010

Pembimbing Utama

Pembimbing Anggota

Bambang Irawanto, S.Si, M.Si
NIP. 19670729 199403 1 001

Drs. YD Sumanto, M.Si
NIP. 19640918 199301 1 002

KATA PENGANTAR

Puji syukur penulis panjatkan ke hadirat Allah SWT yang telah memberikan rahmat dan karunia Nya, sehingga Tugas Akhir ini dapat terselesaikan.

Tugas Akhir yang berjudul **“PELABELAN $L(3,2,1)$ PADA BEBERAPA JENIS GRAF SEDERHANA”** ini disusun sebagai syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Strata Satu (S1) pada Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Diponegoro.

Banyak pihak yang telah membantu dalam penyelesaian Tugas Akhir ini. Oleh karena itu, rasa hormat dan terima kasih penulis ingin sampaikan kepada :

1. Dra. Rum Hastuti, M.Si selaku Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Diponegoro Semarang.
2. Ibu Dr. Widowati, S.Si, M.Si selaku Ketua Jurusan Matematika FMIPA UNDIP dan dosen wali penulis.
3. Bapak Bambang Irawanto, S.Si, M.Si selaku Ketua Program Studi Matematika FMIPA UNDIP dan sebagai dosen pembimbing I yang telah meluangkan waktu memberikan bimbingannya hingga selesainya Tugas Akhir ini.
4. Bapak Drs. YD Sumanto, M.Si selaku dosen pembimbing II yang telah meluangkan waktu memberikan bimbingannya hingga selesainya Tugas Akhir ini.
5. Semua pihak yang tidak dapat kami sebutkan satu per satu.

Penulis menyadari bahwa Tugas Akhir ini masih jauh dari sempurna. Oleh karena itu kritik dan saran yang bersifat membangun sangat penulis harapkan. Semoga Tugas Akhir ini bermanfaat bagi semua.

Semarang, Juni 2010

Penulis

ABSTRAK

Pelabelan $L(3, 2, 1)$ pada graf G adalah suatu fungsi f dari himpunan titik $V(G)$ ke himpunan bilangan bulat positif sedemikian sehingga untuk dua titik v_1, v_2 , jika $d(v_1, v_2) = 1$ maka $|f(v_1) - f(v_2)| \geq 3$; jika $d(v_1, v_2) = 2$ maka $|f(v_1) - f(v_2)| \geq 2$; dan jika $d(v_1, v_2) = 3$ maka $|f(v_1) - f(v_2)| \geq 1$. Bilangan pelabelan $L(3, 2, 1)$, $k(G)$, dari suatu graf G adalah bilangan bulat positif terkecil k sedemikian sehingga G memiliki pelabelan $L(3, 2, 1)$ dengan k sebagai label maksimum. Pada tugas akhir ini akan dijelaskan tentang penentuan bilangan pelabelan $L(3, 2, 1)$ untuk graf lengkap, graf bipartit lengkap dan graf bintang, graf path, graf sikel, graf ulat, dan graf n -ary tree. Pelabelan $L(3, 2, 1)$ ini juga dapat diaplikasikan, salah satunya pada penentuan letak stasiun radio agar tidak bercampur dengan siaran dari stasiun radio lain yang dekat dengan daerah tersebut.

Kata kunci : pelabelan radio, pelabelan jarak, pelabelan $L(3, 2, 1)$, graf sederhana.

ABSTRACT

An $L(3, 2, 1)$ -labeling of a graph G is a function f from the vertex set $V(G)$ to the set of positive integers such that for any two vertices v_1, v_2 , if $d(v_1, v_2) = 1$ then $|f(v_1) - f(v_2)| \geq 3$; if $d(v_1, v_2) = 2$ then $|f(v_1) - f(v_2)| \geq 2$; and if $d(v_1, v_2) = 3$ then $|f(v_1) - f(v_2)| \geq 1$. The $L(3, 2, 1)$ -labeling number $k(G)$ of G is the smallest positive integer k such that G has an $L(3, 2, 1)$ -labeling with k as the maximum label. In this minithesis will be explained about determining the $L(3, 2, 1)$ -labeling number for complete graphs, complete bipartite graphs and stars, paths, cycles, caterpillars, and n -ary tree. The $L(3, 2, 1)$ -labeling can be used to determining location of the radio stations so that there is no interference with the broadcast of other radio station nearby.

Keywords : radio labeling, distance labeling, $L(3, 2, 1)$ -labeling, simple graphs.

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL.....	i
HALAMAN PENGESAHAN.....	ii
KATA PENGANTAR	iv
ABSTRAK	v
ABSTRACT	vi
DAFTAR ISI.....	vii
DAFTAR SIMBOL.....	ix
DAFTAR GAMBAR	xi
BAB I PENDAHULUAN	1
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Perumusan Masalah	2
1.3 Pembatasan Masalah	3
1.4 Metode Pembahasan	3
1.5 Tujuan Penulisan	3
1.6 Sistematika Penulisan	3
BAB II TEORI PENUNJANG	4
2.1 Teori Graf	4
2.1.1 Definisi Graf	4
2.1.2 Terminologi Graf	5
2.2 Jenis – jenis Graf	10
2.3 Pohon (<i>Tree</i>)	15
2.4 Pelabelan Graf	20
BAB III PELABELAN $L(3, 2, 1)$ PADA BEBERAPA JENIS GRAF SEDERHANA	24
3.1 Pelabelan $L(3, 2, 1)$	24
3.2 Pelabelan $L(3, 2, 1)$ pada Beberapa Jenis Graf Sederhana	26

3.2.1 Pelabelan $L(3, 2, 1)$ pada Graf Lengkap	27
3.2.2 Pelabelan $L(3, 2, 1)$ pada Graf Bipartit Lengkap dan Graf Bintang	29
3.2.3 Pelabelan $L(3, 2, 1)$ pada Graf Path	34
3.2.4 Pelabelan $L(3, 2, 1)$ pada Graf Sikel	40
3.2.5 Pelabelan $L(3, 2, 1)$ pada Graf Ulat (<i>Caterpillar</i>)	54
3.2.6 Pelabelan $L(3, 2, 1)$ pada Graf N-ary Tree	60
 BAB IV PENUTUP	 72
4.1 Kesimpulan	72
4.2 Saran	72
 DAFTAR PUSTAKA	 73

DAFTAR SIMBOL

G	: Graf
$G(V, E)$: Graf G dengan himpunan titik V dan himpunan garis E
$V(G)$: Himpunan titik pada graf G
$E(G)$: Himpunan garis pada graf G
v_i	: Titik ke i
e_i	: Garis ke i
n	: Jumlah titik pada graf G
$d(u, v)$: Jarak antara titik u dan v
$\text{der}(v)$: Derajat titik v
\in	: Anggota dari
$=$: Sama dengan
\neq	: Tidak sama dengan
\geq	: Lebih besar sama dengan
\leq	: Lebih kecil sama dengan
$>$: Lebih besar dari
$<$: Lebih kecil dari
\equiv	: Kongruen
\subseteq	: Himpunan bagian (<i>subset</i>)
$k(G)$: Label tertinggi dari suatu titik pada graf G
K_n	: Graf lengkap dengan n titik
$K_{m,n}$: Graf bipartit lengkap dengan m titik hitam dan n titik putih
S_n	: Graf bintang dengan n titik

- P_n : Graf path dengan n titik
- C_n : Graf sikel dengan n titik
- Cat_n : Graf ulat seragam dengan n titik
- T_n : Pohon (*Tree*) dengan n titik
- f : Fungsi atau pemetaan
- Δ : Derajat maksimum pada suatu graf
- : Telah terbukti

DAFTAR GAMBAR

Gambar 2.1 Graf G_1	5
Gambar 2.2 Graf G_2	9
Gambar 2.3 Graf G_3	10
Gambar 2.4 Graf G_4 , G_5 dan G_6	11
Gambar 2.5 Graf Lengkap	12
Gambar 2.6 Graf Bipartit	12
Gambar 2.7 Graf Bipartit Lengkap dan Graf Bintang	13
Gambar 2.8 Graf Path	14
Gambar 2.9 Graf Sikel	14
Gambar 2.10 Tree dan Bukan Tree	15
Gambar 2.11 Graf Ulat	16
Gambar 2.12 Graf Ulat Seragam	16
Gambar 2.13 Aras	18
Gambar 2.14 Tree Berakar (<i>Rooted Tree</i>)	19
Gambar 2.15 Graf N-ary Tree, Binary Tree, dan Full N-ary Tree.....	20
Gambar 2.16 Fungsi atau Pemetaan dari A ke B	21
Gambar 2.17 Pewarnaan Graf	22
Gambar 2.18 Contoh Pelabelan Graf	23
Gambar 3.1 Graf G	25
Gambar 3.2 Pelabelan $L(3, 2, 1)$ pada Graf Lengkap K_4	28
Gambar 3.3 Jaringan Radio dengan Bentuk Graf Lengkap K_4	29
Gambar 3.4 Pelabelan $L(3, 2, 1)$ pada Graf Bipartit Lengkap $K_{2,4}$	31
Gambar 3.5 Jaringan Radio dengan Bentuk Graf Bipartit Lengkap $K_{2,4}$	32
Gambar 3.6 Pelabelan $L(3, 2, 1)$ pada Graf Bintang S_5	33
Gambar 3.7 Jaringan Radio dengan Bentuk Graf Bintang S_5	34
Gambar 3.8 Pelabelan $L(3, 2, 1)$ pada Graf Path dengan $n = 1$	37
Gambar 3.9 Pelabelan $L(3, 2, 1)$ pada Graf Path dengan $n = 2$	38
Gambar 3.10 Pelabelan $L(3, 2, 1)$ pada Graf Path dengan $n = 3$	38
Gambar 3.11 Pelabelan $L(3, 2, 1)$ pada Graf Path dengan $n = 4$	38

Gambar 3.12 Pelabelan $L(3, 2, 1)$ pada Graf Path dengan $n = 5$	38
Gambar 3.13 Pelabelan $L(3, 2, 1)$ pada Graf Path dengan $n = 6$	39
Gambar 3.14 Pelabelan $L(3, 2, 1)$ pada Graf Path dengan $n = 7$	39
Gambar 3.15 Pelabelan $L(3, 2, 1)$ pada Graf Path P_8	39
Gambar 3.16 Jaringan Radio dengan Bentuk Graf Path P_8	40
Gambar 3.17 Pelabelan $L(3, 2, 1)$ pada Graf Sikel dengan $k(C_4) = 8$	42
Gambar 3.18 Pelabelan $L(3, 2, 1)$ pada Graf Sikel dengan $k(C_5) = 9$	43
Gambar 3.19 Pelabelan $L(3, 2, 1)$ pada Graf Sikel dengan $k(C_6) = 8$	44
Gambar 3.20 Pelabelan $L(3, 2, 1)$ pada Graf Sikel dengan $k(C_7) = 10$	45
Gambar 3.21 Pelabelan $L(3, 2, 1)$ pada Graf Sikel dengan $n \geq 3$, jika $n = 3$ maka $k(C_n) = 7$	51
Gambar 3.22 Pelabelan $L(3, 2, 1)$ pada Graf Sikel dengan $n \geq 3$, jika n genap maka $k(C_n) = 8$	51
Gambar 3.23 Pelabelan $L(3, 2, 1)$ pada Graf Sikel dengan $n \geq 3$, jika n ganjil dan $n \neq 3, 7$ maka $k(C_n) = 9$	52
Gambar 3.24 Pelabelan $L(3, 2, 1)$ pada Graf Sikel dengan $n \geq 3$, jika $n = 7$ maka $k(C_n) = 10$	53
Gambar 3.25 Jaringan Radio dengan Bentuk Graf Sikel C_7	53
Gambar 3.26 Pelabelan $L(3, 2, 1)$ pada Graf Ulat Seragam, dengan $n > 2$ maka $k(Cat_n) > 2\Delta + 2$	56
Gambar 3.27 Pelabelan $L(3, 2, 1)$ pada Graf Ulat Seragam, dengan $\Delta > 2$ dan $n > 2$ maka $k(Cat_n) = 2\Delta + 3$	57
Gambar 3.28 Pelabelan $L(3, 2, 1)$ pada Graf Ulat dengan $\Delta > 2$ maka $k(Cat_n) = 2\Delta + 2$	59
Gambar 3.29 Jaringan Radio dengan Bentuk Graf Ulat Cat_9	60
Gambar 3.30 Pelabelan $L(3, 2, 1)$ pada Graf n -ary tree dengan $n = 2$ maka $k(G) \leq 2n + 6$	62
Gambar 3.31 Pelabelan $L(3, 2, 1)$ pada Graf n -ary tree dengan $n = 3$ maka $k(G) \leq 2n + 6$	63
Gambar 3.32 Pelabelan $L(3, 2, 1)$ pada Graf n -ary tree dengan $n = 4$ maka $k(G) \leq 2n + 6$	63

Gambar 3.33 Pelabelan $L(3, 2, 1)$ pada n -ary tree dengan $n = 2$ maka $k(G) < 2n + 6$ dimana baik 6 maupun 7 tidak dapat muncul sebagai label untuk elemen dari A	65
Gambar 3.34 Pelabelan $L(3, 2, 1)$ pada n -ary tree dengan $n = 3$ maka $k(G) < 2n + 6$ dimana baik 6 maupun 7 tidak dapat muncul sebagai label untuk elemen dari A	66
Gambar 3.35 Pelabelan $L(3, 2, 1)$ pada n -ary tree dengan $n = 4$ maka $k(G) < 2n + 6$ dimana baik 6 maupun 7 tidak dapat muncul sebagai label untuk elemen dari A	67
Gambar 3.36 Pelabelan $L(3, 2, 1)$ pada graf n -ary tree dengan $n = 2$ maka $k(G) < 2n + 6$ dimana himpunan terakhir memuat angka genap sampai titik tertentu kemudian sesudah itu angka ganjil	69
Gambar 3.37 Pelabelan $L(3, 2, 1)$ pada graf n -ary tree dengan $n = 3$ maka $k(G) < 2n + 6$ dimana himpunan terakhir memuat angka genap sampai titik tertentu kemudian sesudah itu angka ganjil	69
Gambar 3.38 Pelabelan $L(3, 2, 1)$ pada graf n -ary tree dengan $n = 4$ maka $k(G) < 2n + 6$ dimana himpunan terakhir memuat angka genap sampai titik tertentu kemudian sesudah itu angka ganjil	71
Gambar 3.39 Jaringan Radio dengan Bentuk Graf N-ary Tree	71

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Pelabelan graf saat ini menjadi topik yang banyak mendapat perhatian, karena model-model yang ada pada pelabelan graf berguna untuk aplikasi yang luas, seperti masalah dalam jaringan komunikasi, transportasi, ilmu komputer, riset operasi, desain sirkuit, teori koding, kristalografi sinar-x, dan radar. Pada prinsipnya, pelabelan graf merupakan pemberian nilai (label) pada titik, sisi, kedua titik dan sisi ataupun pada bidang. Pelabelan graf pertama kali diperkenalkan oleh Sadlăčk tahun 1964, kemudian Stewart tahun 1966, Kotzig dan Rosa tahun 1970.

Pelabelan $L(3, 2, 1)$ adalah suatu model sederhana dari masalah penugasan jaringan radio. Pelabelan ini merupakan perluasan dari pelabelan $L(2, 1)$ yang diperkenalkan oleh Griggs dan Yeh. Pelabelan $L(3, 2, 1)$ juga merupakan salah satu jenis masalah pewarnaan graf dimana dalam suatu graf jika terdapat dua titik dengan jarak satu maka harus memiliki label dengan selisih minimal 3, jika terdapat dua titik dengan jarak dua maka harus memiliki label dengan selisih minimal 2, dan jika terdapat dua titik dengan jarak tiga maka harus memiliki label dengan selisih minimal 1.

Masalah tugas alur adalah suatu masalah penugasan saluran radio secara efisien ke pemancar radio di berbagai lokasi, dengan menggunakan bilangan bulat positif yang menggambarkan saluran radio. Sedemikian sehingga pemancar dengan lokasi yang “dekat” menerima saluran frekuensi yang berbeda, dan saluran

untuk pemancar dengan lokasi yang “sangat dekat” menerima frekuensi dengan perbedaan paling tidak dua bagian. Oleh karena itu, saluran frekuensi ini tidak boleh bercampur dengan satu sama lain.

Jaringan radio adalah jaringan yang terdiri dari pemancar dan penerima gelombang yang didistribusikan lintas region. Saat ini, seiring dengan kemajuan teknologi permintaan jaringan radio semakin lama semakin banyak. Oleh karena itu, terdapat beberapa masalah yang muncul dalam jaringan radio tersebut antara lain yaitu kesulitan dalam mendistribusikan gelombang frekuensi dari stasiun radio satu ke stasiun radio lainnya yang dekat agar tidak bercampur dan agar bentangan frekuensi yang digunakan diperkecil. Dalam kehidupan nyata, situasi ini dapat dimodelkan dengan pelabelan $L(3,2,1)$ pada beberapa jenis graf sederhana, dimana titik – titiknya menggambarkan stasiun radio, sisi-sisinya menggambarkan dekatnya (*proximity*) dari stasiun radio, dan labelnya merepresentasikan frekuensi yang mungkin. Adapun contoh graf sederhana yang dibahas di sini antara lain yaitu graf lengkap, graf bipartit lengkap dan graf bintang, graf path, graf sikel, graf ulat (*caterpillar*), dan graf n -ary tree.

1.2 Perumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang yang telah diuraikan di atas, permasalahan yang dikemukakan dalam tugas akhir ini adalah bagaimana menentukan pelabelan $L(3,2,1)$ pada beberapa jenis graf sederhana dan aplikasinya dalam kehidupan nyata.

1.3 Pembatasan Masalah

Permasalahan pada tugas akhir ini dibatasi mengenai pelabelan $L(3, 2, 1)$ pada graf sederhana yang meliputi graf lengkap, graf bipartit lengkap dan graf bintang, graf path, graf sikel, graf ulat (*caterpillar*), dan graf n -ary tree.

1.4 Metode Pembahasan

Metode yang digunakan adalah studi literatur, yaitu mengumpulkan informasi dari beberapa buku dan jurnal yang berkaitan dengan pelabelan $L(3, 2, 1)$ pada beberapa jenis graf sederhana.

1.5 Tujuan Penulisan

Penulisan tugas akhir ini bertujuan untuk menentukan pelabelan $L(3, 2, 1)$ pada beberapa jenis graf sederhana dan aplikasinya dalam kehidupan nyata.

1.6 Sistematika Penulisan

Sistematika penulisan dalam tugas akhir ini terbagi menjadi empat bab yaitu Bab I Pendahuluan, pada bab ini berisi tentang latar belakang, perumusan masalah, pembatasan masalah, metode pembahasan, tujuan penulisan, dan sistematika penulisan. Bab II Teori Penunjang, pada bab ini berisi tentang teori-teori yang mendasari pembahasan pada tugas akhir ini yang meliputi definisi graf, beberapa istilah dalam graf, jenis-jenis graf, pohon (*tree*), dan pelabelan graf. Bab III Pembahasan, pada bab ini berisi pembahasan tentang pelabelan $L(3, 2, 1)$ dan pelabelan $L(3, 2, 1)$ pada beberapa jenis graf sederhana. Bab IV Penutup, pada bab ini berisi tentang kesimpulan dan saran.