

**DERET KOMPOSISI DARI SUATU MODUL**



---

**SKRIPSI**

---

Oleh :

**ANI NURHAYATI**

**J2A 006 001**

**PROGRAM STUDI MATEMATIKA JURUSAN MATEMATIKA  
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM**

**UNIVERSITAS DIPONEGORO**

**SEMARANG**

**2010**

**DERET KOMPOSISI DARI SUATU MODUL**

**ANI NURHAYATI**

**J2A 006 001**

Diajukan sebagai syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains

pada

Program Studi Matematika

**PROGRAM STUDI MATEMATIKA JURUSAN MATEMATIKA  
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM  
UNIVERSITAS DIPONEGORO**

**SEMARANG**

**2010**

## HALAMAN PENGESAHAN

Judul : Deret Komposisi dari suatu Modul

Nama : Ani Nurhayati

NIM : J2A 006 001

Telah diujikan pada sidang Tugas Akhir tanggal 16 Juni 2010

dan dinyatakan **lulus** pada tanggal 18 Juni 2010

Semarang, Juni 2010  
Panitia Penguji Tugas Akhir  
Ketua,

Bambang Irawanto, S.Si, M.Si  
NIP. 19670729 199403 1 001

Mengetahui,  
Ketua Jurusan Matematika  
FMIPA UNDIP

Mengetahui,  
a/n. Ketua Program Studi Matematika  
Sekretaris,

Dr. Widowati, S.Si, M.Si  
NIP. 19690214 199403 2 002

Suryoto, S.Si, M.Si  
NIP. 19680714 199403 1 004

## HALAMAN PENGESAHAN

Judul : Deret Komposisi dari suatu Modul

Nama : Ani Nurhayati

NIM : J2A 006 001

Telah diujikan pada sidang Tugas Akhir tanggal 16 Juni 2010

Pembimbing Utama

Semarang, Juni 2010  
Pembimbing Anggota

Drs. YD. Sumanto, M.Si  
NIP. 19640918 199301 1 002

Suryoto, S.Si, M.Si  
NIP. 19680714 199403 1 004

## KATA PENGANTAR

Alhamdulillah segala puji syukur penulis panjatkan kehadirat Allah SWT karena rahmat dan hidayah-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan tugas akhir ini. Sholawat dan salam penulis sampaikan kepada Rasulullah SAW beserta keluarganya, sahabatnya, dan orang-orang yang tetap setia mengikuti sunnahnya.

Tugas akhir yang berjudul “**Deret Komposisi dari suatu Modul**” ini disusun sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Strata Satu (S1) pada Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Diponegoro Semarang.

Banyak pihak yang telah membantu dalam penyelesaian Tugas Akhir ini. Oleh karena itu, rasa hormat dan terimakasih penulis ingin sampaikan kepada :

1. Ibu Dra. Rum Hastuti, M.Si selaku Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Diponegoro Semarang.
2. Ibu Dr. Widowati, M.Si selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Diponegoro Semarang.
3. Bapak Bambang Irawanto, S.Si, M.Si selaku Ketua Program Studi Matematika yang telah memberikan dukungan kepada penulis baik secara akademik maupun nonakademik selama masa studi.
4. Bapak Drs. YD. Sumanto, M.Si selaku dosen pembimbing I yang dengan penuh kesabaran membimbing dan mengarahkan penulis hingga selesainya Tugas Akhir ini.

5. Bapak Suryoto, S.Si, M.Si selaku dosen pembimbing II yang juga telah membimbing dan mengarahkan penulis hingga selesainya Tugas Akhir ini.
6. Semua pihak yang telah membantu hingga selesainya tugas akhir ini, yang tidak dapat penulis sebutkan satu persatu. Semoga Allah SWT membalas segala kebaikan yang telah Anda berikan kepada penulis, Amin.

Penulis menyadari bahwa dalam pembuatan Tugas Akhir ini masih banyak kekurangannya. Untuk itu penulis mengharapkan kritik dan saran yang bersifat membangun demi kesempurnaan Tugas Akhir ini. Semoga Tugas Akhir ini bisa membawa manfaat bagi penulis sendiri khususnya dan bagi para pembaca pada umumnya.

Semarang, Juni 2010

Penulis

## ABSTRAK

Misalkan  $R$  suatu ring dan  $M \neq \{0\}$  adalah modul atas ring  $R$ , rangkaian modul bagian - modul bagian dari  $M$  adalah barisan  $\{M_i\}_{i=0}^n$  sedemikian sehingga  $\{0\} = M_0 \subsetneq M_1 \subsetneq M_2 \subsetneq \dots \subsetneq M_n = M$ . Suatu elemen maksimal dari himpunan semua rangkaian modul bagian - modul bagian dari  $M$  disebut deret komposisi. Panjang dari modul  $M$  atas ring  $R$  dinotasikan  $\ell(M)$ . Setiap deret komposisi dari suatu modul mempunyai panjang yang sama,  $n = \ell(M)$ . Misalkan  $\{0\} = M_0 \subsetneq M_1 \subsetneq M_2 \subsetneq \dots \subsetneq M_n = M$  adalah deret komposisi jika dan hanya jika setiap modul  $M_i/M_{i-1}$  ( $1 \leq i \leq n$ ) adalah modul sederhana.

Kata kunci : modul, modul sederhana, modul semi sederhana, deret komposisi, panjang modul.

## ABSTRACT

Let  $R$  is a ring and  $M \neq \{0\}$  is  $R$ -module, a chain of submodules of  $M$  is a sequence  $\{M_i\}_{i=0}^n$  such that  $\{0\} = M_0 \subsetneq M_1 \subsetneq M_2 \subsetneq \dots \subsetneq M_n = M$ . A maximal element of set of all chains of submodules of  $M$  is called a composition series of  $M$ . The length of  $R$ -module is denoted  $\ell(M)$ . Every composition series of  $M$  has same length,  $n = \ell(M)$ . Let  $\{0\} = M_0 \subsetneq M_1 \subsetneq M_2 \subsetneq \dots \subsetneq M_n = M$  be a composition series if and only if each of the modules  $M_i/M_{i-1}$  ( $1 \leq i \leq n$ ) is a simple module.

Keywords : module, simple module, semisimple module, composition series, length of  $R$ -module.

## DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL.....	i
HALAMAN PENGESAHAN.....	ii
KATA PENGANTAR .....	iv
ABSTRAK .....	vi
ABSTRACT.....	vii
DAFTAR ISI.....	viii
DAFTAR SIMBOL .....	x
DAFTAR GAMBAR .....	xii
DAFTAR TABEL.....	xiii
BAB I. PENDAHULUAN .....	1
1.1 Latar Belakang.....	1
1.2 Perumusan Masalah.....	2
1.3 Pembatasan Masalah.....	2
1.4 Tujuan Penulisan .....	2
1.5 Metode Penulisan.....	2
1.6 Sistematika Penulisan .....	3
BAB II. TEORI PENUNJANG .....	4
2.1 Pemetaan.....	4
2.2 Grup .....	7
2.3 Ring .....	11
2.4 Modul.....	14
BAB III. PEMBAHASAN .....	31
3.1 Modul Sederhana .....	31
3.2 Deret Komposisi dari suatu Modul .....	42

BAB IV. PENUTUP .....	67
DAFTAR PUSTAKA .....	68

## DAFTAR SIMBOL

$\subseteq$	: Himpunan bagian atau subset
$A \subsetneq B$	: $A \subseteq B$ tetapi $A \neq B$
$\cap$	: Irisan
$\cup$	: Gabungan
$*$	: Operasi biner secara umum
$\circ$	: Operasi komposisi
$\cdot$	: Operasi pergandaan
$+$	: Operasi penjumlahan
$\emptyset$	: Himpunan kosong
$e$	: Elemen identitas
$\cong$	: Isomorfik ke
$\in$	: Anggota dari
$\notin$	: Bukan anggota dari
$\oplus$	: Jumlahan langsung
$\neq$	: Tidak sama dengan
$f: A \rightarrow B$	: $f$ pemetaan dari $A$ ke $B$
$f(a)$	: Bayangan elemen $a$ terhadap $f$
$\mathbb{Z}$	: Bilangan bulat
$\mathbb{Q}$	: Bilangan rasional
$\mathbb{R}$	: Bilangan riil

$Z_n$	: Bilangan bulat modulo $n$ .
$x^{-1}$	: Invers dari $x$
$\text{Ker}(f)$	: Kernel dari homomorfisma $f$
$\text{Im}(f)$	: Image dari homomorfisma $f$
$\ell(M)$	: Panjang dari modul $M$
$\text{Hom}_R(M, N)$	: Himpunan semua homomorfisma modul atas ring $R$ dari $M$ ke $N$
$\text{End}_R(M)$	: Himpunan semua homomorfisma modul atas ring $R$ dari $M$ ke $M$
$\text{Ann}(X)$	: Annihilator dari $X$
$(\Rightarrow)$	: Bukti ke kanan
$(\Leftarrow)$	: Bukti ke kiri

## DAFTAR GAMBAR

	Halaman
Gambar 2.1 Contoh pemetaan dari $A$ ke $B$ .....	5
Gambar 2.2 Contoh pemetaan surjektif .....	5
Gambar 2.3 Contoh pemetaan injektif .....	6
Gambar 2.4 Contoh pemetaan bijektif .....	7
Gambar 3.1 Pemetaan $f : R \rightarrow M$ .....	35
Gambar 3.2 Pemetaan $(\varphi \circ \phi)$ .....	56
Gambar 3.3 Pemetaan $\phi$ .....	62
Gambar 3.4 Pemetaan $\varphi$ .....	64

## DAFTAR TABEL

	Halaman
Tabel 2.1 Tabel operasi penjumlahan $H$ grup bagian $G$ .....	9
Tabel 3.1 Jumlahan langsung <i>submodule nontrivial</i> sejati dari $Z_6$ .....	40
Tabel 3.2 Jumlahan langsung <i>submodule nontrivial</i> sejati dari $Z_8$ untuk $M_1 \oplus M_2$ .....	41
Tabel 3.3 Jumlahan langsung <i>submodule nontrivial</i> sejati dari $Z_8$ untuk $M_1 \oplus M_1$ .....	41
Tabel 3.4 Jumlahan langsung <i>submodule nontrivial</i> sejati dari $Z_8$ untuk $M_2 \oplus M_2$ .....	42
Tabel 3.5 Contoh $Z_{42}$ modul semi sederhana atas $Z_{42}$ .....	45

# BAB I

## PENDAHULUAN

### 1.1 Latar Belakang

Modul merupakan perumuman dari suatu ruang vektor, dimana modul atas lapangan merupakan ruang vektor. Sedangkan modul sendiri adalah modul atas ring. Lebih jelasnya, skalar yang digunakan pada modul merupakan elemen-elemen dari suatu ring, sedangkan skalar yang digunakan pada ruang vektor merupakan elemen-elemen dari lapangan. Konsep dari modul tersebut merupakan penyatuan dasar dalam matematika dari teori grup dan ring. Modul dapat dikatakan sederhana jika modul tersebut hanya memiliki modul bagian  $\{0\}$  dan modul itu sendiri. Sedangkan jumlahan langsung (*direct sums*) dari modul sederhana akan membentuk modul semi sederhana.

Barisan modul bagian – modul bagian dari suatu modul dapat disusun menjadi sebuah rangkaian. Misalkan  $M$  modul atas ring  $R$ , rangkaian modul bagian dari  $M$  adalah  $\{M_i\}_{i=0}^n$  sedemikian sehingga  $\{0\} = M_0 \subsetneq M_1 \subsetneq M_2 \subsetneq \dots \subsetneq M_n = M$ . Sedangkan suatu elemen maksimal dari himpunan semua rangkaian modul bagian – modul bagian  $M$  disebut deret komposisi (*composition series*).

Dalam tugas akhir ini, akan dibahas tentang deret komposisi dari suatu modul, teorema, bukti dan contoh yang terkait dengan materi tersebut.

## **1.2 Permasalahan**

Berdasarkan uraian di atas permasalahan yang akan dibahas dalam tugas akhir ini adalah sifat-sifat apa sajakah yang terkait dengan modul dan bagaimana suatu rangkaian dari modul bagian – modul bagiannya dapat dikatakan deret komposisi.

## **1.3 Pembatasan Masalah**

Dalam tugas akhir ini dibatasi hanya pada modul dua sisi yaitu modul kiri sekaligus modul kanan atas ring komutatif. Sehingga setiap ideal dalam ring, merupakan ideal kiri sekaligus ideal kanan.

## **1.4 Tujuan Penulisan**

Tujuan dari penulisan tugas akhir ini adalah mengkaji lebih dalam tentang dasar modul, khususnya modul yang mempunyai deret komposisi dan hubungan diantara keduanya.

## **1.5 Metode Penulisan**

Metode yang digunakan penulis dalam penyusunan tugas akhir ini adalah studi literature yang dilakukan dengan mengumpulkan bahan pustaka yang berkaitan dengan deret komposisi dari suatu modul. Selanjutnya mempelajari materi-materi yang terkait dengan deret komposisi pada modul, seperti: definisi pemetaan, grup, ring, modul, dan teorema-teorema yang berkaitan beserta hubungan antar materi-materinya.

## **1.6 Sistematika Penulisan**

Tugas akhir ini dibagi menjadi 4 bab. Bab I Pendahuluan. Bab ini memuat latar belakang, permasalahan, pembatasan masalah, tujuan penulisan, metode penulisan dan sistematika penulisan. Bab II Materi Penunjang memuat materi penunjang yang digunakan dalam pembahasan tugas akhir ini. Bab ini berisi materi tentang pengertian pemetaan, grup, ring dan modul. Bab III Pembahasan, bab ini berisi materi yang merupakan pokok bahasan dalam tugas akhir ini yaitu mengenai Deret Komposisi dari suatu Modul. Pada bab ini, dijelaskan definisi dan teorema mengenai Deret Komposisi dari suatu Modul. Bab IV Penutup, bab ini berisi kesimpulan dari seluruh pembahasan dalam tugas akhir ini.